Nicht-restriktive Vermeidung einiger Paradoxien in einem Behauptungsspiel

von Peter Zahn, TU Darmstadt, Fachbereich Mathematik, 2002

Übersicht: Behandelt werden folgende Paradoxien (Antinomien): Die Russellsche, die Grellingsche, der 'Lügner', die von Berry, eine Paradoxie zur Abzählung von Teilmengen von $\mathbb{N}$ (die in einer bestimmten Sprache darstellbar sind) und eine Paradoxie, die den Begriff der Zirkelfreiheit betrifft. Diese Paradoxien (die mit Ausnahme der beiden zuletzt erwähnten in [2] ausführlich diskutiert sind) lassen sich vermeiden, indem man die zirkelhaften 'Definitionen', auf denen sie beruhen, oder entsprechende Axiome ersetzt durch Einführungen entsprechender Aussagen durch Regeln zur Einschränkung von Behauptungen. Damit verfügen wir über eine allgemeine Methode zu einer im Sinne von [4] nicht-restriktiven Paradoxienvermeidung.

Ein **Ziel** ist es, zu zeigen, dass die im Folgenden besprochenen Paradoxien und die Erforderlichkeit ihrer Vermeidung kein Hindernis dafür bilden, in einer Sprache über diese selbst zu reden, etwas über Sprache im Allgemeinen auszusagen und z.B. in sprachwissenschaftliche Untersuchungen diese selbst einzuschließen.

Beliebige Aussagen (Behauptungssätze) teilen wir durch A, B mit. - Die im Folgenden betrachteten Paradoxien haben fast alle die Form $A \leftrightarrow \neg A$ ("A genau dann, wenn nicht A"). Aus ihnen erhält man je einen Widerspruch der Form $A \wedge \neg A$ ("A und nicht A") nach folgender Argumentation: Aus der Annahme A folgt $\neg A$ (wegen $(\rightarrow)$). Also $\neg A$. Also (wegen $(\leftarrow)$) auch A. Also insgesamt $A \wedge \neg A$. Als Schlussregeln haben wir dabei nur einige Regeln der intuitionistischen Logik (sogar nur der Minimallogik) benutzt. Denn wir sind nicht (wie üblich) von der Unterscheidung der beiden Fälle: 1. A, 2. $\neg A$ - ausgegangen, haben also nicht vorausgesetzt, einer dieser beiden Fälle müsse wahr sein (gelten, zutreffen o.ä.), d.h. wir haben nicht das 'Tertium non datur' $A \vee \neg A$ oder das entsprechende Bivalenzprinzip (nach dem jede Aussage wahr oder falsch sei) benutzt.

Beginnen wir mit **RUSSELLs Paradoxie**: $\mathcal{R}$ sei die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Für beliebige Mengen c gelte also: c ist Element von $\mathcal{R}$ genau dann, wenn c kein Element von c ist. Kurz:

$$c \in \mathcal{R} \;\leftrightarrow\; \neg\,(c \in c).$$

Da $\mathcal{R}$ eine Menge sein soll, gilt also speziell

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \;\leftrightarrow\; \neg\,(\mathcal{R} \in \mathcal{R}).$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch allein aus der 'Definition' von $\mathcal{R}$.

Gelegentlich wird behauptet, RUSSELLs Paradoxie rühre daher, dass $\mathcal{R}$ eine unendliche Menge sei. Diese Bedingung haben wir jedoch nirgends benutzt. Wir haben nur die Existenz einer einzigen Menge, nämlich $\mathcal{R}$, herangezogen.

Ich habe leichthin von der 'Definition' von $\mathcal{R}$ gesprochen. Falls es sich um eine Definition handelt, kann man sie auffassen als Definition von *Aussagen* der Form $c \in \mathcal{R}$, also insbesondere der Aussage $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$, die somit zirkelhaft, nämlich als ihr eigenes Negat definiert ist. Derart zirkelhafte Definitionen bergen also prinzipiell die Gefahr in sich, dass sie zu Widersprüchen führen. - Man kann sich die Menge $\mathcal{R}$ jedoch auch anders als durch eine Definition eingeführt denken.

Zur Orientierung diene uns folgende Version von RUSSELLs **Geschichte vom Dorfbarbier**: B., ein Barbier, der im Dorfe D. wohnt, hat sich verpflichtet, (1) alle Bewohner von D. zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren, und (2) *nur* die Bewohner von D. zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren. Nach (1) sollte B. insbesondere sich selbst rasieren, aber nach (2) darf er dies nicht tun. Dennoch ist jede der beiden Verpflichtungen (1), (2) für sich allein widerspruchsfrei.

Wir versuchen nun, RUSSELLs Menge $\mathcal{R}$ durch eine 'bedingte' Verbotsregel für Behauptungen einzuführen. Dabei lassen wir uns von der Idee leiten, eine Aussage sei wahr genau dann, wenn sie behauptet werden darf, d.h. wenn ihre Behauptung nicht (nach zugehörigen Regeln) verboten ist. Für $\mathcal{R}$ und beliebige Mengen c sei nun die Regel aufgestellt:

$$\text{Behaupte } c \in \mathcal{R} \textit{ nicht} \text{ bevor } \neg\,(c \in c) \text{ behauptet worden ist!}$$

Zur übersichtlicheren Darstellung derartiger Regeln zur Einschränkung von Behauptungen verwenden wir $\natural$ als Behauptungszeichen und $:\Rightarrow$ als Abkürzung für "nicht bevor" oder "erst dann, wenn" oder ggf. "nur dann, wenn". Damit läßt sich die angeführte Regel schreiben als

$$\natural\, c \in \mathcal{R} \quad :\Rightarrow \quad \natural\, \neg\,(c \in c).$$

Als Einzelfall dieser Regel erhalten wir:

$$\natural\, \mathcal{R} \in \mathcal{R} \quad :\Rightarrow \quad \natural\, \neg\,(\mathcal{R} \in \mathcal{R}).$$

Zur Ergänzung benötigen wir noch eine Regel für Negate beliebiger Aussagen A: Hierzu definieren wir zunächst: Eine Behauptung heiße "*intern verboten*", wenn sie nach bestimmten Regeln verboten ist, die wir "intern" nennen (Genaueres s. [5, p.9]). Die bisher aufgestellte Regel sei intern. (Ein Beipiel einer nicht internen Regel folgt noch.) Die Regel für Negate laute: "Behaupte $\neg A$ nur dann, wenn es intern verboten ist, A zu behaupten", kurz

$$\natural\, \neg A \quad :\Rightarrow \quad \text{intern verboten } \natural\, A.$$

Auch diese Regel sei intern. (Sie ist mit einem 'Eindeutigkeitsproblem' verbunden, auf das wir hier nicht eingehen; s. [5, p.10].)

Die angeführten Regeln seien die *einzigen* Regeln für Behauptungen von Aussagen der Formen $c \in \mathcal{R}$ und $\neg A$. Daher liegt die Vermutung nahe, sie seien umkehrbar. Denn falls $\natural\, c \in c$ intern verboten ist, können durch die Behauptungen von $\neg\,(c \in c)$ und $c \in \mathcal{R}$ in dieser Reihenfolge die dafür zuständigen Regeln nicht verletzt werden. Dies ist jedoch ggf. ein Trugschluss.

Nach den angeführten Regeln ist $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ ein Beispiel einer Aussage A, die nach den internen Regeln nur dann behauptet werden sollte, wenn dies intern verboten ist. Wir vereinbaren nun extra, dass die Behauptung einer derartigen Aussage A als intern verboten gilt. Also ist insbesondere $\natural\,\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ intern verboten. Somit würde $\natural\,\neg\,(\mathcal{R} \in \mathcal{R})$ keine Regel verletzen, ist also erlaubt. Hieraus dürfen wir aber *nicht* schließen, dass man auch $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ behaupten darf. Die Regel $\natural\,\mathcal{R} \in \mathcal{R} \;:\Rightarrow$ $\natural\,\neg\,(\mathcal{R} \in \mathcal{R})$ ist nicht umkehrbar. Es entsteht keine Paradoxie.

Wir betrachten jetzt der Einfachheit halber eine Aussage A, die der einzigen internen Regel "$\natural\, A \;:\Rightarrow$ intern verboten $\natural\, A$" unterworfen ist. Diese Regel verweist auf sich selbst, sodass man etwas unsicher sein könnte, ob A intern verboten ist. Daher die im vorigen Absatz getroffene Vereinbarung.

Das angekündigte Beispiel einer *nicht* internen Behauptungsregel laute: Man behaupte "Dieser Stab ist 24,8 cm lang" erst nach einer Vermessung des betreffenden Stabes mit dem Ergebnis 24,8 cm. Diese (noch verallgemeinerbare) Regel gelte nicht als intern, da z.B. ein Verbrennen des Stabes (der schätzungsweise 25 cm lang sei) vor seiner Vermessung nicht dazu ausreichen soll, dass die Behauptung der angeführten Aussage als intern verboten gilt und man somit behaupten darf, der Stab sei *nicht* 24,8 cm lang (gewesen).

Nun denken wir uns allgemeiner den Gebrauch von Aussagen der Form $c \in \{x\colon A(x)\}$ festgelegt durch die 'Komprehensionsregel'

$$\natural\, c \in \{x\colon A(x)\} \quad :\Rightarrow \quad \natural\, A(c).$$

Auch diese sowie alle im Folgenden angeführten Regeln zählen wir zu den internen Regeln. Ferner setzen wir für sie voraus, dass die in ihnen auf der linken Seite angeführten Behauptungen keinen weiteren Einschränkungen unterworfen sind. Dennoch ist die Komprehensionsregel wenigstens für $c \equiv \{x : \neg\,(x \in x)\}$ und $A(x) \equiv \neg\,(x \in x)$ nicht umkehrbar. [Wir schreiben $\varrho \equiv \sigma$ dafür, dass die durch ϱ, σ (wie soeben) mitgeteilten Schreibfiguren gestaltlich gleich sind.]

Für argumentationstechnische Zwecke (besonders in der Mathematik) ist jedoch die Verfügbarkeit nicht nur der Komprehensionsregel, sondern auch ihrer Umkehrung bekanntlich eine wichtiges Mittel. Damit ist ein Interesse an Übersichten begründet, aus denen hervorgeht, für welche Aussageformen $A(x)$ die Komprehensionsregel umkehrbar ist. Dies ist u.a. in verschiedenen verzweigten Typentheorien der Fall (vgl. [5, §7]).

Die **Paradoxie von GRELLING** entsteht aus der von RUSSELL dadurch, dass man Mengen durch sog. Prädikate (oder Prädikatoren) ersetzt. Ist P ein Prädikat und c ein Name oder eine Bezeichnung eines Gegenstandes, so schreiben wir kurz $P(c)$ für "P kommt c zu" oder "c ist P" o.ä. Für ein Prädikatenprädikat P tritt an die Stelle von c ein Name, etwa 'Q', eines Prädikats Q. Wir schreiben jedoch einfach $P(Q)$ statt P('Q'). [Im umgangssprachlichen Text haben wir bereits Anführungszeichen um symbolisch geschriebene Mitteilungen fortgelassen. Ferner haben wir schon die Schreibweise $\varrho \equiv \sigma$ statt 'ϱ'$\equiv$'σ' (gestaltliche Gleichheit) eingeführt.]

Wir betrachten nun das Prädikat $\mathcal{H}$, das allen Prädikaten P zukommt, die sich nicht selbst zukommen. (Solche Prädikate P heißen "heterologisch".) $\mathcal{H}$ sei also 'definiert' durch

$$\mathcal{H}(P) \leftrightarrow \neg P(P).$$

Wie bei RUSSELLs $\mathcal{R}$ kann man hieraus den Widerspruch $\mathcal{H}(\mathcal{H}) \wedge \neg\mathcal{H}(\mathcal{H})$ folgern. Ersetzt man die angeführte 'Definition' von $\mathcal{H}$ durch die Festlegung des Gebrauchs dieses Prädikats mit Hilfe der Regel

$$\natural\, \mathcal{H}(P) \quad :\Rightarrow \quad \natural\, \neg P(P),$$

so ist auch diese Regel für $P \equiv \mathcal{H}$ nicht umkehrbar. Es gilt $\neg\mathcal{H}(\mathcal{H})$, aber es entsteht keine Paradoxie mehr.

Wir behandeln die **Paradoxie vom Lügner** (in der sog. verstärkten Form)

L_1 : "Diese Aussage ist nicht wahr."

Der indexikalische Ausdruck "diese Aussage" (genauer: das in L_1 stehende Vorkommnis von "Diese Aussage") bezeichne dabei die gesamte Aussage L_1, in der er (es) steht. Nach üblicher Argumentation ist L_1 genau dann wahr, wenn L_1 nicht wahr ist.

Für eine normativ-pragmatische Untersuchung schreiben wir L_1 formalisiert als $\neg\mathcal{W}(i)$. Dabei stehe $\mathcal{W}$ für das Wahrheitsprädikat und i für "diese Aussage". i bezeichne hier also die gesamte Aussage $\neg\mathcal{W}(i)$. - Nach dem Vorbild von TARSKIs Wahrheitskonvention stellen wir nun die allgemeine Regel auf, dass - für eine Bezeichnung j einer Aussage - $\mathcal{W}(j)$ erst dann behauptet werden darf, wenn die durch j bezeichnete Aussage behauptet worden ist. Wir können das hier vorkommende Kennzeichnungsschema "die durch j bezeichnete Aussage" dadurch eliminieren, dass wir es ersetzen durch "für (mindestens) eine durch j bezeichnete Aussage". Dementsprechend können wir die letzte Regel auch so formulieren:

(T) $$\natural\, \mathcal{W}(j) \quad :\Rightarrow \quad \text{für ein } A\text{: } (j \text{ bezeichnet } A) \text{ und } \natural\, A.$$

Es liegt nahe, dabei die Bedingung "j bezeichnet A" so zu verstehen, dass zwar die Aussage A, aber keine von A gestaltlich verschiedene Aussage durch ein in $\mathcal{W}(j)$

oder in A selbst stehendes Vorkommnis von j bezeichnet wird. Dabei darf j auch ein indexikalischer Ausdruck sein. Fragen wie die, ob dabei A noch andere indexikalische Ausdrücke enthalten darf, und sich daraus ergebende Fragen lassen wir hier offen.

Da im diskutierten Falle (nur) $\neg\mathcal{W}(i)$ durch i bezeichnet wird, sollte man die Regel

$$\natural\,\mathcal{W}(i) \;\; :\Rightarrow \;\; \natural\,\neg\mathcal{W}(i)$$

nicht verletzen. Diese Regel ist nicht umkehrbar. Es gilt $\neg\mathcal{W}(i)$.

Eine andere Version des 'Lügners' hat die Form: "Die an der Stelle S stehende Aussage ist nicht wahr." Dabei steht S für eine eindeutige Beschreibung der Stelle, an der die soeben erwähnte Aussage steht. Durch Elimination der Kennzeichnung "Die an der Stelle S stehende Aussage" erhält diese Version des 'Lügners' die Form: "Es gibt keine Aussage, die an S steht und wahr ist." Dementsprechend definieren wir

$$L_2 \;\rightleftharpoons\; \neg\exists X\,(\mathcal{S}(X) \wedge \mathcal{W}(X)).$$

Dabei sei X eine Variable für Aussagen, und die Behauptbarkeit von Aussagen der Form $\mathcal{S}(A)$ sei festgelegt durch die Regel, dass $\mathcal{S}(A)$ *nur* im Falle $A \equiv L_2$ behauptet werden darf. Wir schreiben z.B. einfach $\mathcal{W}(A)$ statt $\mathcal{W}(`A')$. - Zur Behandlung der zugehörigen Paradoxie in unserem *'Behauptungsspiel'* stellen wir noch für Existenzaussagen und Konjunkte folgende Regeln auf

$$\begin{array}{rcl} \natural\,\exists x\,A(x) & :\Rightarrow & \text{für einen Wert } c \text{ von } x\text{: } \natural\,A(c) \\ \natural\,A \wedge B & :\Rightarrow & \natural\,A \;\text{ und }\; \natural\,B. \end{array}$$

(Diese Regeln sind 'normalerweise' umkehrbar.) Entsprechend sei auch die Behauptbarkeit von Aussagen der Form $\exists X\,A(X)$ ("Es gibt eine Aussage X derart, dass $A(X)$") geregelt. - Da $\mathcal{S}(A)$ nur für $A \equiv L_2$ behauptet werden darf, sollte man insbesondere folgende Regeln nicht verletzen:

$$\begin{array}{rl} & \natural\,\exists X\,(\mathcal{S}(X) \wedge \mathcal{W}(X)) \\ :\Rightarrow & \text{für ein } A\text{: } \natural\,\mathcal{S}(A) \wedge \mathcal{W}(A) \\ :\Rightarrow & \natural\,\mathcal{W}(L_2) \\ :\Rightarrow & \natural\,L_2. \end{array}$$

Nach der Definition von L_2 ist also $\natural\,\exists X\,(\mathcal{S}(X) \wedge \mathcal{W}(X))$ intern verboten und daher $\natural\,L_2$ erlaubt. Hieraus darf man aber nicht umgekehrt auf $\exists X\,(\mathcal{S}(X) \wedge \mathcal{W}(X))$ schließen.

Das Beispiel des 'Lügners' in der Version L_1 hat gezeigt, dass die allgemeine Regel (T) nicht in jedem Falle umkehrbar ist. Daher ist eine Behauptung der Form $\natural\,\mathcal{W}(j)$ höchstens dann für einen Hörer/Leser *'redundant'* (im Sinne von "erschließbar aus der Behauptung der mit j bezeichneten Aussage"), wenn ihm ohnehin *bekannt* ist, dass (T) im vorliegenden Einzelfalle umkehrbar ist. Dies ist allerdings 'normalerweise' der Fall. Man beachte aber, dass eine (im angedeuteten Sinne) redundante Wahrheitsrede dennoch zweckdienlich sein kann. Dies zeigt schon das Beispiel: "Alles, was er gestern im Vortrag gesagt hatte, ist wahr." (Zu den Themen "Redundanz" und "Zwecke der Wahrprädikation" s. [3, p.291ff., 311-319].)

Es ist an der Zeit, darauf hinzuweisen, dass unser unvollständig skizziertes Behauptungsspiel nur als ein vorläufiges 'Erklärungsmodell' dienen soll und (um für die Praxis des Argumentierens als Vorbild dienen zu können) nicht nur einer Ergänzung, sondern vor allem einer Liberalisierung bedarf (s. [5, §1, §3, §6]). (So mag man es als störend empfinden, dass es in diesem Behauptungsspiel z.B. für eine Behauptung der Form $\natural\, A \wedge B$ nicht genügt, die zugehörigen 'Argumente' A, B erst nachträglich vorzubringen. Allerdings sollte ein 'Behaupter' diese Argumente ohnehin schon vorher kennen, könnte sie dann also im stillen Gespräch zu sich selbst behaupten.)

Zur Paradoxie von BERRY: K stehe für die Kennzeichnung: "die kleinste natürliche Zahl, die nicht in Deutsch mit höchstens zwanzig Worten aus je höchstens zwanzig Buchstaben gekennzeichnet werden kann." Eine 20-er-Kennzeichnung sei eine Kennzeichnung, die höchstens eine natürliche Zahl kennzeichnet, in Deutsch geschrieben ist und aus höchstens 20 Worten aus je höchstens zwanzig Buchstaben besteht. K ist also eine 20-er-Kennzeichnung, die abgekürzt werden kann durch: "die kleinste natürliche Zahl, die keine 20-er Kennzeichnung hat."

Üblicherweise erhält man die Paradoxie von Berry wie folgt: Da es nur endlich viele 20-er-Kennzeichnungen, aber unendlich viele natürliche Zahlen gibt, hat mindestens eine natürliche Zahl keine 20-er-Kennzeichnung. Unter diesen natürlichen Zahlen gibt es eine kleinste, sagen wir n. Hiernach hat n keine 20-er-Kennzeichnung. n hat jedoch die 20-er-Kennzeichnung K: Widerspruch. - Wir sehen davon ab, dass wir etwas leichtfertig den nur *klassisch* beweisbaren Satz, dass jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element hat, benutzt haben, und wenden uns einer normativen Analyse zu:

Für beliebige eventuelle Kennzeichnungen J sei $B(J, 20)$ eine Abkürzung für "J ist eine 20-er-Kennzeichnung". Es gilt also $B(K, 20)$. Für irgendeine natürliche Zahl n bedeute $n = K$, dass n die kleinste natürliche Zahl ist, die keine 20-er-Kennzeichnung hat, oder ausführlicher, dass n keine 20-er-Kennzeichnung hat, und dass es keine kleinere natürliche Zahl gibt, die keine 20-er-Kennzeichnung hat. Wir betrachten nun folgende Behauptungsregeln, von denen die zweite - sie heiße "die zu $\natural\, n = K$ gehörige Regel" - neu aufgestellt sei:

$$\begin{array}{ll} & \natural\, B(K,20) \wedge n = K \\ :\Rightarrow & \natural\, n = K \\ :\Rightarrow & \natural\, \neg\exists J\,(B(J,20) \wedge n = J) \;\wedge\; \neg\exists x\,[\,x < n \wedge \neg\exists J\,(B(J,20) \wedge x = J)\,] \\ :\Rightarrow & \natural\, \neg\,\exists J\,(B(J,20) \wedge n = J). \end{array}$$

Angenommen, wir hätten $B(K, 20) \wedge n = K$ zu Recht behauptet. Dann dürften wir daraus doch nicht auf $\exists J\,(B(J,20) \wedge n = J)$ schließen. D.h. die Behauptungsregel für Existenzaussagen wäre in diesem Falle nicht umkehrbar. - Allerdings sind wir weit davon entfernt, ein n (etwa in Dezimalschreibweise oder gar in der Form von 'Zählzeichen' $|, ||, |||, ||||, \ldots$) tatsächlich angeben und durch K kennzeichnen zu können. Somit ist es zweifelhaft, ob jemals eine Aussage der Form $B(K,20) \wedge n = K$ behauptet werden darf.

Die zu $\natural\, n = K$ gehörige Regel lässt sich noch im Rahmen der allgemeinen Kennzeichnungstheorie erklären. An Stelle von K betrachten wir dazu eine beliebige Kennzeichnung $\iota x\, A(x)$ ("dasjenige x mit $A(x)$") derart, dass $A(n)$ für höchstens einen Wert n der Variablen x gilt. Für Elementarformeln $E(x)$ (in denen höchstens die Variable x und keine Kennzeichnungsterme vorkommen) sei definiert: $E(\iota x\, A(x)) \rightleftharpoons \exists x\,(A(x) \wedge E(x))$. Dies lässt sich auch durch die Behauptungsregel

$$\natural\, E(\iota x\, A(x)) \quad :\Rightarrow \quad \natural\, \exists x\,(A(x) \wedge E(x))$$

simulieren. - Nun nehmen wir an, dass für Werte n, k von x die Gleichung $n = k$ nur im Falle der gestaltlichen Gleichheit $n \equiv k$ behauptet werden darf. Dann sollte man folgende Regeln nicht verletzen

$$\natural\, n = \iota x\, A(x) \quad :\Rightarrow \quad \natural\, \exists x\,(A(x) \wedge n = x) \quad :\Rightarrow \quad \text{für ein } k\text{:}\ \ \natural\, A(k) \wedge n = k \quad :\Rightarrow \quad \natural\, A(n).$$

Somit sollte man insbesondere die obige zu $\natural\, n = K$ gehörige Regel nicht verletzen.

Allgemeine Betrachtungen: Ein Widerspruch kann in unserem Behauptungsspiel nur durch fehlerhaftes Argumentieren entstehen, da die Regel für Negate ein 'Widerspruchsverbot' enthält. Eine Regel dieses Spiels verlangt nur, ggf. bestimmte Behauptungen (vorläufig bzw. stets) zu unterlassen; durch solches Unterlassen wird aber keine andere Spielregel verletzt. Eine Behauptung kann nur insofern *erlaubt* sein, als sie (ggf. zusammen mit anderen dafür erforderlichen früheren Behauptungen) keine Regel verletzen würde.

Wie die behandelten Beispiele demonstrieren, hat die partielle Nichtumkehrbarkeit von Regeln den Grund, dass die beteiligten Aussagen Vorgänger von sich selbst sind: Die *unmittelbaren Vorgänger* einer komplexen Aussage A seien diejenigen Aussagen, für die (nach der zu $\natural\, A$ gehörigen Regel) bestimmte Bedingungen erfüllt sein müssen, bevor A behauptet werden darf. Mit der Abkürzung "u.Vg." für "(ist) unmittelbarer Vorgänger (von)" haben wir folgende unvollständige Liste:

$$\begin{array}{rll} A, B & \text{u.Vg.} & (A \wedge B) \\ A & \text{u.Vg.} & \neg A \\ A(c) & \text{u.Vg.} & \exists x\, A(x), \qquad\qquad \text{falls } c \text{ ein Wert von } x \text{ ist} \\ A(c) & \text{u.Vg.} & c \in \{x \colon A(x)\}. \end{array}$$

Die Aussagen der in der rechten Spalte angeführten Formen haben keine weiteren u.Vg. Die Vorgänger-Relation sei die transitive Hülle von 'u.Vg.'. - Da aber die

Umkehrbarkeit interner Regeln eine offensichtlich notwendige Bedingung für die Anwendbarkeit bekannter (logischer, mengentheoretischer und anderer) Schlussregeln auf Behauptungssätze ist, sind (partielle) Sprachen von Interesse, deren sämtliche Aussagen *zirkelfrei*, d.h. keine Vorgänger von sich selbst sind. Bekannte Beispiele sind Sprachen verzweigter Typentheorien.

Wir können evtl. 'harmlose' von 'schädlichen' Zirkeln unterscheiden. Die Aussagen $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$, $\mathcal{H}(\mathcal{H})$ und "Diese Aussage ist nicht wahr" sind Beispiele für Aussagen A, für die $\neg A$ ein u.Vg. ist - und somit ein 'negativer' Zirkel vorliegt. Es liegt nahe, zu vermuten, dass (nach geeigneter Definition) nur 'negative' Zirkel zu Paradoxien der hier behandelten Art führen. Es dürfte indes schwierig sein, für mathematische oder andere Zwecke geeignete Sprachen zu konstruieren, in denen zwar 'positive', aber keine 'negativen' Zirkel vorkommen, und dies zu beweisen.

Dennoch seien zwei Beispiele 'positiver' Zirkel angeführt:
Für $A \rightleftharpoons \{x : x \in x\} \in \{x : x \in x\}$ darf man nach der Komprehensionsregel A erst dann behaupten, wenn A schon behauptet worden ist. Man darf also A nicht behaupten. (Man könnte jedoch evtl. verschiedener Meinung sein, ob $\natural\, A$ *intern* verboten ist.) - Für $B \rightleftharpoons \{x\colon \neg\neg\,(x \in x)\} \in \{x\colon \neg\neg\,(x \in x)\}$ haben wir als Einzelfall der Komprehensionsregel: $\natural\, B \quad :\Rightarrow \quad \natural\, \neg\neg B$. Ist hiernach $\natural\, \neg B$ verboten und sind somit $\natural\, \neg\neg B$ und $\natural\, B$ erlaubt - oder verhält es sich umgekehrt?

Eine entsprechende Frage diskutieren wir am Beispiel einer Folge voneinander verschiedener Aussagen C_n, für welche die (einzige und somit umkehrbare) Regel aufgestellt sei: $\natural\, C_n \; :\Rightarrow \quad \natural\, \neg C_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dann ist es (mit einiger Plausibilität) verboten, sowohl C_m mit einer geraden Nummer m als auch C_n mit einer ungeraden Nummer n zu behaupten. Weiteres ist unbestimmt. - Beschließt man aber noch extra gemeinschaftlich, dass $\natural\, C_m$ z.B. für gerade m als intern verboten gelten soll, so darf man danach C_n für ungerade n behaupten. Erst nachdem entweder dieser oder der dazu 'komplementäre' Beschluss gefasst worden ist, sind Behauptungen entsprechender Aussagen C_n eindeutig erlaubt; die hier diskutierte Regel bleibt dann umkehrbar. Daher könnte man in unserem Behauptungsspiel noch gestatten, einen (und nur einen) dieser beiden Beschlüsse zu fassen. (In diesem Beispiel hat jede der Aussagen C_n eine unendliche Vorgängerfolge und heiße daher "unfundiert".)

Die oben behandelten Paradoxien außer der von RUSSELL heißen "semantisch". "Semantik" wird gelegentlich assoziiert mit der Existenz nicht-sprachlicher Bedeutungen von sprachlichen Bestandteilen (z.B. Prädikaten). Wir haben jedoch unsere Untersuchungen durch Reflexionen auf Regeln eines (fingierten) Behauptungsspiels durchgeführt; als semantische Bedingung ist dabei nur in der Paradoxie vom Lügner die Referenz von einem indexikalischen Ausdruck (i) auf eine Aussage $(\neg\mathcal{W}(i))$ eingegangen. Darüber hinaus haben wir keine 'realistische Interpretationssemantik' benutzt.

Unser Behauptungsspiel ermöglicht eine *nicht-restriktive* Antinomienvermeidung im Sinne von [4], bei der als sprachliche Mittel grundsätzlich auch zirkelhafte Aussagen und selbstreferentielle Prädikate zugelassen werden. In diesem allgemeinen sprachlichen Rahmen gelten allerdings viele Schlussweisen nur mit Ausnahmen, sodass die dort verfügbaren Argumentationsformen 'defekt', insgesamt unübersichtlich und wenig praktikabel sind. Zur Verfolgung spezieller Zwecke müssen die sprachlichen Mittel also doch wieder eingeschränkt werden.

Zum Vergleich mit unserem Behauptungsspiel sei noch die in [4, p. 327] angeführte Methode zur Antinomienvermeidung angeführt. Dort heißt es: "Ist D das Definiendum und A der definierende Ausdruck, so wird die Definition üblicherweise als Äquivalenz beider, $D \leftrightarrow A$, angesetzt. Dieses Schema muß nun in der angegebenen Weise durch Hinzunahme der Konsistenzbedingung K zum Definiens modifiziert werden und hat dann die allgemeine Form $D \leftrightarrow (A \wedge K)$, wobei K der Ausdruck '$\lceil A \rceil \neq \lceil \neg D \rceil$' ist." (An Stelle von "$\lceil$", "$\rceil$" werden dort sog. Quasi-Anführungszeichen benutzt, die hier nicht zur Verfügung stehen. - Das Zeichen "$\neq$" dient dort vermutlich zur Mitteilung der gestaltlichen Verschiedenheit.) Im Falle $D \equiv (\mathcal{R} \in \mathcal{R})$ (Russellsche Paradoxie) haben wir

$$D \leftrightarrow (\neg D \ \wedge \ \lceil \neg D \rceil \neq \lceil \neg D \rceil),$$

wobei das Definiens falsch ist. Somit ist D falsch - wie in unserem Behauptungsspiel. - Ersetzt man in diesem Beispiel die Menge $\mathcal{R}$ durch $\{x : \neg\neg\neg(x \in x)\}$, so erhält man eine Definition der Form

$$D \leftrightarrow (\neg\neg\neg D \ \wedge \ \lceil \neg\neg\neg D \rceil \neq \lceil \neg D \rceil),$$

in der die rechts stehende Ungleichung wahr ist - also das Definiens äquivalent zu $\neg\neg\neg D$ und damit zu $\neg D$ ist: Widerspruch.

Eine **Paradoxie zur Abzählung von Teilmengen von $\mathbb{N}$**: Wir werden die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ betrachten, die in einer bestimmten Sprache $\mathcal{L}$ darstellbar sind. Die Terme und Formeln von $\mathcal{L}$ seien aus insgesamt endlich vielen 'Buchstaben' (atomaren Figuren) aufgebaut. Als Metavariable verwenden wir: k, m für Elemente von $\mathbb{N}$ und x, y für Variable für Elemente von $\mathbb{N}$. $\mathcal{L}$ enthalte u.a. die Formeln der Gestalt $\alpha(k, m)$, $\alpha(x, y)$ sowie mit jeder Formel F wenigstens auch $k \in \{x : F\}$ und $\neg F$. - Mengendarstellungen der Gestalt $\{x : A(x)\}$ mit beliebigen Formeln $A(x)$ von $\mathcal{L}$ teilen wir durch M mit.

Nun beachten wir, dass diese Mengendarstellungen 'Worte' aus insgesamt endlich vielen Buchstaben sind, und sich daher lexikographisch anordnen lassen. Außer den Aussagen von $\mathcal{L}$ werden wir Hilfsaussagen der Form $\Lambda(k, M)$ verwenden. $\Lambda(k, M)$ bedeute, dass M an k-ter Stelle in der erwähnten lexikographischen Reihenfolge steht. - Eine Aussage der Gestalt $\alpha(k, m)$ bedeute, dass für die Mengendarstellung M mit $\Lambda(m, M)$ auch $k \in M$ gilt.

Formeln der Gestalt $\Lambda(s, T)$ sind i.Allg. nicht invariant gegenüber der extensionalen Gleichheit. Z.B. für $T(y) \rightleftharpoons \{x : A(x) \wedge y = y\}$ ist $T(1)$ zwar extensional gleich $T(2)$, es gilt aber nicht $\Lambda(k,T(1)) \leftrightarrow \Lambda(k,T(2))$. Daher zählen wir Formeln (und Aussagen) der Gestalt $\Lambda(s,T)$ nicht zu $\mathcal{L}$.

Sei $D \rightleftharpoons \{x : \neg\,\alpha(x,x)\}$, und k sei so gewählt, dass $\Lambda(k,D)$ gilt. Daraus ergibt sich insbesondere

$$\alpha(k,k) \;\leftrightarrow\; k \in D \;\leftrightarrow\; \neg\,\alpha(k,k)).$$

Damit erhalten wir eine Paradoxie, die der RUSSELLschen entspricht.

Auch diese Paradoxie lässt sich in unserem Behauptungsspiel vermeiden: Der Gebrauch von Aussagen der Gestalt $\alpha(k,m)$ sei durch die (einzige) Regel simuliert:

$$\natural\,\alpha(k,m) \;\; :\Rightarrow \quad \text{für ein } M\colon \;\; \natural\,\Lambda(m,M) \;\text{ und }\; \natural\, k \in M.$$

Nun sei wieder $\Lambda(k,D)$ vorausgesetzt. Dann sollte man $\Lambda(k,M)$ nur für $M \equiv D$ behaupten und somit folgende Regeln nicht verletzen

$$\natural\,\alpha(k,k) \;\; :\Rightarrow \quad \natural\, k \in D \;\; :\Rightarrow \quad \natural\,\neg\,\alpha(k,k).$$

Also gilt zwar $\neg\,\alpha(k,k)$, aber hieraus folgt nicht in umgekehrter Richtung, dass auch $\alpha(k,k)$ gilt. Auch hier liegt ein Zirkel vor.

Eine **Paradoxie betreffs Zirkelfreiheit**: Wir betrachten jetzt eine 'Definition' $\Delta\colon\;\; c \in M \leftrightarrow A(c)$ für spezielle $c, M, A(\,)$. Dabei hat $c \in M$ nur den u.Vg. $A(c)$. Ist dieser zirkelfrei, so ist auch $c \in M$ zirkelfrei, sodass Δ zu keinem Widerspruch führt. Daher liegt es nahe, falls $A(c)$ zirkelhaft ist, Δ zu ersetzen durch $c \in M \leftrightarrow \perp$; dabei sei $\perp$ eine Elementaraussage (z.B. $0 = 1$), deren Behauptung verboten ist. In diesem Falle hat $c \in M$ nur $\perp$ als u.Vg., ist also zirkelfrei. - Dementsprechend seien jetzt Mengen der Form $\{x\colon A(c)\}$ eingeführt durch die beiden Forderungen

$$\begin{array}{lll} F1: & c \in \{x\colon A(x)\} \;\leftrightarrow\; A(c), & \text{falls } A(c) \text{ zirkelfrei ist} \\ F2: & c \in \{x\colon A(x)\} \;\leftrightarrow\; \perp & \text{sonst.} \end{array}$$

Wir fordern ferner $F3$: $A(c)$ (bzw. $\perp$) sei ein u.Vg. von $c \in \{x : A(x)\}$ genau dann, wenn $A(c)$ zirkelfrei (bzw. zirkelhaft) ist. $c \in \{x\colon A(x)\}$ habe keine anderen u.Vg. (Diese Einführung von $\{x\colon A(x)\}$ setzt zwar voraus, dass $A(c)$ zirkelhaft oder zirkelfrei ist, 'tertium non datur'. Dies ist jedoch im Folgenden unerheblich.) - Nun sei

$$A \rightleftharpoons \{x\colon \neg\,(x \in x)\} \in \{x\colon \neg\,(x \in x)\}.$$

Man erhält insbesondere

$$\begin{array}{lll} A \;\leftrightarrow\; \neg A, & \text{falls } \neg A \text{ zirkelfrei ist} \\ A \;\leftrightarrow\; \perp, & \text{falls } \neg A \text{ zirkelhaft ist.} \end{array}$$

Falls $\neg A$ zirkelhaft ist, dann hat A nur $\perp$ als u.Vg., sodass $\neg A$ zirkelfrei ist (da $\neg A$ nur A als u.Vg. hat). Ist aber $\neg A$ zirkelfrei, dann ist $\neg A$ ein u.Vg. von A, und somit ist $\neg A$ zirkelhaft: Widerspruch.

Für eine Untersuchung in einen Behauptungsspiel rekonstruieren wir zunächst die Behauptbarkeit von Aussagen der Formen $A \prec_n B$ und $A \prec\!\prec B$ ("A ist Vorgänger von B") durch folgende interne Regeln, wobei wir $A \prec_1 B$ statt "A u.Vg. B" schreiben:

$$\begin{aligned} \natural\, A \prec_{n+1} B \quad &:\Rightarrow \quad \text{für ein } C: \ \ \natural\, A \prec_1 C \ \text{ und } \natural\, C \prec_n B \\ \natural\, A \prec\!\prec B \quad &:\Rightarrow \quad \text{für ein } n > 0: \ \ \natural\, A \prec_n B. \end{aligned}$$

Nach der Forderung $F1$ darf man $c \in \{x : Ax\}$ nur dann behaupten, wenn man auch Ac behaupten darf, und nach $F2$ nur dann, wenn Ac zirkelfrei ist. Der obigen Einführung von $\{x\colon A(x)\}$ entsprechen somit die internen Regeln

$$\begin{aligned} \natural\, c \in \{x\colon A(x)\} \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, A(c) \\ \natural\, c \in \{x\colon A(x)\} \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, \neg\, (A(c) \prec\!\prec A(c)). \end{aligned}$$

Hinzuzufügen ist nach $F3$ noch die Regel

$$\natural\, A(c) \prec_1 c \in \{x\colon A(x)\} \quad :\Rightarrow \quad \natural\, \neg\, (A(c) \prec\!\prec A(c)).$$

Die Aussage $c \in \{x\colon A(x)\}$ möge keine von $A(c)$ verschiedenen u.Vg. haben. (Wir zählen also $\perp$ nicht mehr zu den u.Vg. von $c \in \{x : A(x)$. Den Fall, dass auch $\neg\, (A(c) \prec\!\prec A(c))$ zu den u.Vg. von $c \in \{x\colon A(x)\}$ gezählt wird, werden wir noch in Betracht ziehen.) - Für die oben definierte Aussage A haben wir folgende speziellen Regeln:

$$\begin{aligned} \natural\, A \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, \neg A \\ \natural\, A \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, \neg\, (\neg A \prec\!\prec \neg A) \\ \natural\, \neg A \prec_1 A \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, \neg\, (\neg A \prec\!\prec \neg A). \end{aligned}$$

Da $\neg A$ nur A als u.Vg. hat und A höchstens $\neg A$ als u.Vg. hat, sollte man die zweite der folgenden Regeln nicht verletzen:

$$\begin{aligned} \natural\, \neg A \prec\!\prec \neg A \quad &:\Rightarrow \quad \text{für ein } n > 0\text{: } \natural\, \neg A \prec_n \neg A \\ &:\Rightarrow \quad \natural\, \neg A \prec_1 A \quad :\Rightarrow \quad \natural\, \neg\, (\neg A \prec\!\prec \neg A). \end{aligned}$$

Somit gilt $\neg\, (\neg A \prec\!\prec \neg A)$ und daher (Inversion!) auch $\neg A \prec_1 A$, also $\neg A \prec_2 \neg A$. Dies zeigt, dass - im momentan diskutierten Regelsytem - durch $\neg\, (X \prec\!\prec X)$ kein brauchbarer Begriff der Zirkelfreiheit dargestellt wird. Offensichtlich gilt auch $\neg A$, sodass die Regel "$\natural\, A :\Rightarrow \ \natural\, \neg A$ und $\natural\, \neg\, (\neg A \prec\!\prec \neg A)$" nicht umkehrbar ist.

Diese Ergebnisse erhält man auch dann, wenn man noch $\neg\, (A(c) \prec\!\prec A(c))$ zu den u.Vg. von $c \in \{x\colon A(x)\}$ und insbesondere $\neg\, (\neg A \prec\!\prec \neg A)$ zu den u.Vg. von A zählt.

Lässt man jedoch die Regel mit der Prämisse $\natural\, A(c) \prec_1 c \in \{x : A(x)\}$ fort und vereinbart dementsprechend, dass $c \in \{x : A(x)\}$ jedenfalls die beiden u.Vg. $A(c)$ und $\neg\, (A(c) \prec\!\prec A(c))$ (und nur diese) hat, dann darf man, falls $A(c)$ und

$\neg (A(c) \prec\prec A(c))$ einmal zu Recht behauptet werden, danach auch $c \in \{x : A(x)\}$ behaupten (da dann auch diese Aussage zirkelfrei ist).

Aus der sich aus der Forderung $F3$ ergebenden Paradoxie erhält man noch eine analoge Paradoxie dadurch, dass man in $F1$ - $F3$ den Begriff der Zirkelfreiheit durch den der Fundiertheit ersetzt. Eine Aussage heißt "fundiert", wenn sie keine unendliche Vorgängerfolge besitzt. (Um diese Bedingung vollkommen zu verstehen, müsste man allerdings über einen Begriff der (Vorgänger-)Folgen verfügen, der nicht mehr verallgemeinerungsfähig ist. Dies ist aber kaum erreichbar; vgl. daher [1, p. 171, 186f.].)

Literatur

[1] Lorenzen, Paul: *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer-Verlag 1955.

[2] Rheinwald, Rosemarie: *Semantische Paradoxien, Typentheorie und ideale Sprache*, de Gruyter, 1988.

[3] Siegwart, Geo: *Vorfragen zur Wahrheit: Ein Traktat über kognitive Sprachen*, Scientia Nova, Oldenbourg Verlag, 1997

[4] Wandschneider, Dieter: *Das Antinomienproblem und seine pragmatische Dimension*, in: H. Stachowiak: *Pragmatik* Band IV, Meiner Verlag, 1993.

[5] Zahn, Peter: *A Normative Model of Classical Reasoning in Higher Order Languages*, Synthese, Kluwer, To Appear.

Weitere Literatur über Paradoxien (Antinomien) s. [3], [5].