

Begleitmaterial zur Vorlesung Numerik II

Philipp Birken

Universität Kassel, AG Analysis und Angewandte Mathematik

Numerik I

- 1 Grundlagen der linearen Algebra
- 2 Lineare Gleichungssysteme
- 3 Interpolation

Numerik II

- 1 Numerische Integration
- 2 Nichtlineare Gleichungen
- 3 Lineare Ausgleichsprobleme
- 4 Eigenwertprobleme

Numerik I

- 1 Grundlagen der linearen Algebra
- 2 Lineare Gleichungssysteme
- 3 Interpolation

Numerik II

- 1 Numerische Integration
- 2 Nichtlineare Gleichungen
- 3 Lineare Ausgleichsprobleme
- 4 Eigenwertprobleme

Definition 1.1: Genauigkeitsgrad

Die Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ heißt Genauigkeitsgrad der Quadraturformel I_n , wenn

$$I_n(x^\nu) = I(x^\nu) \quad \text{für } \nu = 0, \dots, r \quad (1.0.5)$$

und

$$I_n(x^{r+1}) \neq I(x^{r+1}) \quad (1.0.6)$$

gilt. Der Genauigkeitsgrad einer Quadraturformel I_n ist mindestens von der Ordnung r , wenn (1.0.5) erfüllt ist.

Lemma 1.2: Eigenschaften der Quadraturformeln

Sei I_n durch (1.0.4) gegeben, dann gelten

- (a) $I_n(\alpha f + \beta g) = \alpha I_n(f) + \beta I_n(g)$, $\forall f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (b) I_n besitzt den Genauigkeitsgrad r

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_n(p) = I(p) & \text{für alle Polynome } p \in \Pi_r \\ I_n(p) \neq I(p) & \text{für alle Polynome } p \in \Pi_{r+1} \setminus \Pi_r. \end{cases}$$

Definition 1.3: Interpolatorische Quadraturformel

Zu gegebener Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $q_n \in \Pi_n$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom zu den Stützpunkten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n)) \in \mathbb{R}^2$ an paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$. Dann heißt

$$I_n(f) := \int_a^b q_n(x) dx$$

interpolatorische Quadraturformel.

Satz 1.5

Eine interpolatorische Quadraturformel besitzt die Gestalt

$$I_n(f) = (b - a) \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k) \quad (1.1.1)$$

mit

$$\sigma_k := \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{t - t_j}{t_k - t_j} dt \quad (1.1.2)$$

und

$$t_j := \frac{x_j - a}{b - a}. \quad (1.1.3)$$

Lemma 1.7

Für jede interpolatorische Quadraturformel $I_n(f) = (b - a) \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k)$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \sigma_k = 1. \quad (1.1.5)$$

Lemma 1.8

Für die Gewichte $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln I_n gilt

$$\sigma_k = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{s-j}{k-j} ds \quad \text{für } k = 0, \dots, n.$$

Lemma 1.7

Für jede interpolatorische Quadraturformel $I_n(f) = (b - a) \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k)$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \sigma_k = 1. \quad (1.1.5)$$

Lemma 1.8

Für die Gewichte $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln I_n gilt

$$\sigma_k = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{s-j}{k-j} ds \quad \text{für } k = 0, \dots, n.$$

Lemma 1.9

Für die Gewichte $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln gilt

$$\sigma_{n-k} = \sigma_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Satz 1.11

Die interpolatorische Quadraturformel $I_n(f) = (b - a) \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k)$ besitze mindestens den Genauigkeitsgrad $r \geq n$ und die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(r + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$|I(f) - I_n(f)| \leq c_r \frac{(b - a)^{r+2}}{(r + 1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(r+1)}(\xi)|, \text{ mit} \quad (1.2.1)$$

$$c_r = \int_0^1 \prod_{k=0}^r |t - t_k| dt,$$

wobei die paarweise verschiedenen Stützstellen t_{n+1}, \dots, t_r beliebig aus der Menge $[0, 1] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$ gewählt werden dürfen und die Werte t_0, \dots, t_n unter Verwendung der Substitution (1.1.7) auf Grundlage der Stützstellen x_0, \dots, x_n festgelegt werden.

Lemma 1.13

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, $h = \frac{b-a}{n}$ und $x_k = a + kh$ für $k = 0, \dots, n$. Für die Funktion

$$F(x) := \int_a^x \prod_{k=0}^n (y - x_k) dy, \quad x \in [a, b]$$

gilt

$$F(a) = F(b) = 0 \text{ und } F(x) > 0 \text{ für alle } x \in]a, b[.$$

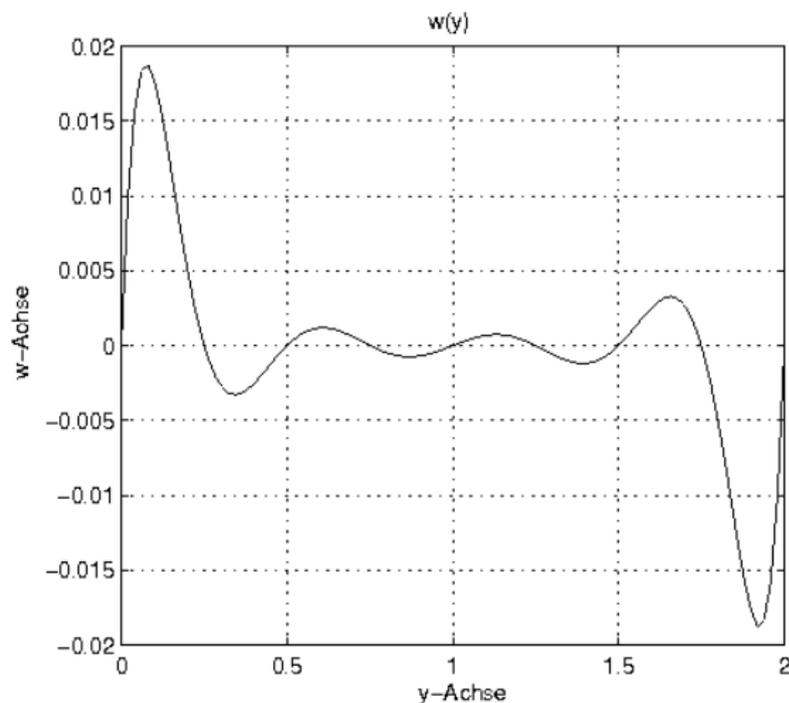


Abbildung: Knotenpolynom $\omega(x)$ auf $[0, 2]$ für $n = 8$.

Satz 1.14

Die abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln I_n besitzen für gerades $n \in \mathbb{N}$ den Genauigkeitsgrad $r = n + 1$.

Fixpunktiteration

| m | x_m | $\varepsilon_m = x_m - \ln 0.5 $ | $\varepsilon_m/\varepsilon_{m-1}$ | $\varepsilon_m/\varepsilon_{m-1}^2$ |
|-----|--------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 0 | 2.00000e+00 | 2.69315e+00 | | |
| 10 | -1.14424e+00 | 4.51092e-01 | 6.41009e-01 | 9.10884e-01 |
| 20 | -6.93834e-01 | 6.86986e-04 | 5.00343e-01 | 3.64408e+02 |
| 30 | -6.93148e-01 | 6.71345e-07 | 5.00000e-01 | 3.72387e+05 |
| 40 | -6.93147e-01 | 6.55611e-10 | 5.00000e-01 | 3.81324e+08 |
| 50 | -6.93147e-01 | 6.40266e-13 | 5.00000e-01 | 3.90531e+11 |

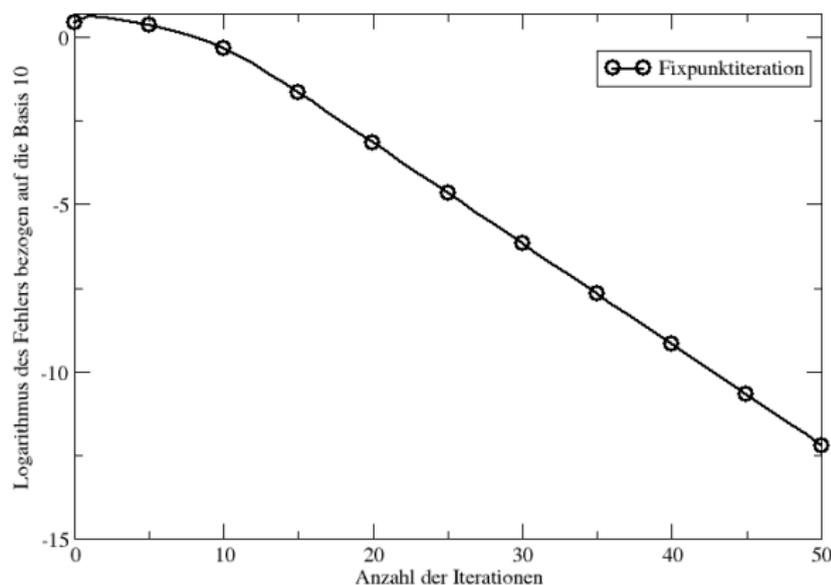


Abbildung: Konvergenzverlauf $\log_{10} \varepsilon_m$ des Fixpunktverfahrens.

Definition 2.3: Lokale Konvergenz

Das durch die stetige Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegebene Iterationsverfahren

$$\mathbf{x}_{m+1} = \Phi(\mathbf{x}_m), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.0.5)$$

heißt lokal konvergent mit Grenzwert $\bar{\mathbf{x}}$, wenn ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für Startvektoren

$$\mathbf{x}_0 \in B(\bar{\mathbf{x}}; \delta) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta\}$$

stets

$$\|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad m \rightarrow \infty \quad (2.0.6)$$

gilt.

Definition 2.4: Konvergenzgeschwindigkeit

Das Verfahren (2.0.5) heißt lokal konvergent von der Ordnung $p \geq 1$ mit Grenzwert $\bar{\mathbf{x}}$, wenn ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für Startvektoren $\mathbf{x}_0 \in B(\bar{\mathbf{x}}; \delta)$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}_{m+1} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq C \|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\|^p \quad \text{für } m = 0, 1, \dots, \quad (2.0.7)$$

mit einer Konstanten $0 \leq C = C(\mathbf{x}_0) < \infty$ gilt, wobei im Fall $p = 1$ zusätzlich $C < 1$ gefordert wird. Für $p = 1$ beziehungsweise $p = 2$ spricht man von linearer respektive quadratischer Konvergenz. Das Verfahren heißt lokal konvergent von genau der Ordnung p , falls es von der Ordnung p und keiner höheren Ordnung konvergent ist.

Satz 2.6

Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}$ gegeben und ϕ in \bar{x} p -mal differenzierbar ($p \in \mathbb{N}$). Weiter gelte

$$|\phi'(\bar{x})| < 1, \quad \text{falls } p = 1 \quad (2.0.9)$$

respektive

$$\phi^{(k)}(\bar{x}) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, p-1, \quad \text{falls } p \geq 2, \quad (2.0.10)$$

dann ist das Verfahren

$$x_{m+1} = \phi(x_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

lokal konvergent von der Ordnung p bezüglich \bar{x} . Gilt zudem $\phi^{(p)}(\bar{x}) \neq 0$, so liegt die genaue lokale Konvergenzordnung p bezüglich \bar{x} vor.

Newton-Verfahren

| m | x_m | $\varepsilon_m = x_m - \ln 0.5 $ | $\varepsilon_m / \varepsilon_{m-1}$ | $\varepsilon_m / \varepsilon_{m-1}^2$ |
|-----|---------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 0 | 2.00000e+00 | 2.69315e+00 | | |
| 1 | 1.06767e+00 | 1.76082e+00 | 6.53813e-01 | 2.42769e-01 |
| 2 | 2.39572e-01 | 9.32720e-01 | 5.29709e-01 | 3.00832e-01 |
| 3 | -3.66946e-01 | 3.26202e-01 | 3.49732e-01 | 3.74959e-01 |
| 4 | -6.45286e-01 | 4.78613e-02 | 1.46723e-01 | 4.49793e-01 |
| 5 | -6.920209e-01 | 1.12730e-03 | 2.35534e-02 | 4.92118e-01 |
| 6 | -6.93147e-01 | 6.35160e-07 | 5.63437e-04 | 4.99812e-01 |
| 7 | -6.93147e-01 | 2.01617e-13 | 3.17426e-07 | 4.99758e-01 |

Nichtlineare Gleichungssysteme

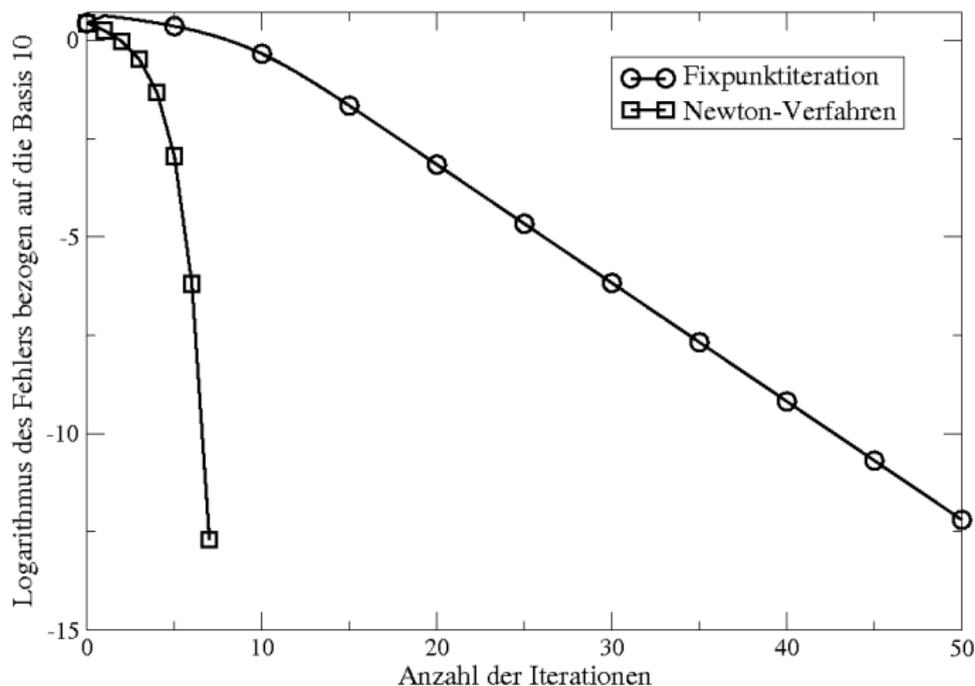


Abbildung: Konvergenzverlauf $\log_{10} \varepsilon_m$ des Newton-Verfahrens.

Satz 2.8

Die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitze die Nullstelle $x_* \in \mathbb{R}$ und sei in einer Umgebung von x_* hinreichend oft differenzierbar. Dann gelten

- (a) Das Newton-Verfahren konvergiert mindestens lokal quadratisch bezüglich x_* , falls

$$F'(x_*) \neq 0 \quad (2.1.1)$$

gilt.

- (b) Das Newton-Verfahren konvergiert lokal von mindestens dritter Ordnung bezüglich x_* , falls neben (2.1.1) auch

$$F''(x_*) = 0$$

gilt.

Vereinfachtes Newton-Verfahren

| m | x_m | $\varepsilon_m = x_m - \ln 0.5 $ | $\varepsilon_m / \varepsilon_{m-1}$ | $\varepsilon_m / \varepsilon_{m-1}^2$ |
|-----|--------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 0 | 2.00000e+00 | 2.69315e+00 | | |
| 50 | -6.67809e-01 | 2.53382e-02 | 9.31404e-01 | 3.42374e+01 |
| 100 | -6.92395e-01 | 7.52659e-04 | 9.32305e-01 | 1.15483e+03 |
| 150 | -6.93125e-01 | 2.26447e-05 | 9.32332e-01 | 3.83862e+04 |
| 200 | -6.93147e-01 | 6.81552e-07 | 9.32332e-01 | 1.27539e+06 |
| 250 | -6.93147e-01 | 2.05133e-08 | 9.32332e-01 | 4.23746e+07 |
| 300 | -6.93147e-01 | 6.17411e-10 | 9.32332e-01 | 1.40789e+09 |
| 350 | -6.93147e-01 | 1.85828e-11 | 9.32333e-01 | 4.67769e+10 |
| 400 | -6.93147e-01 | 5.59108e-13 | 9.32247e-01 | 1.55441e+12 |

Nichtlineare Gleichungssysteme

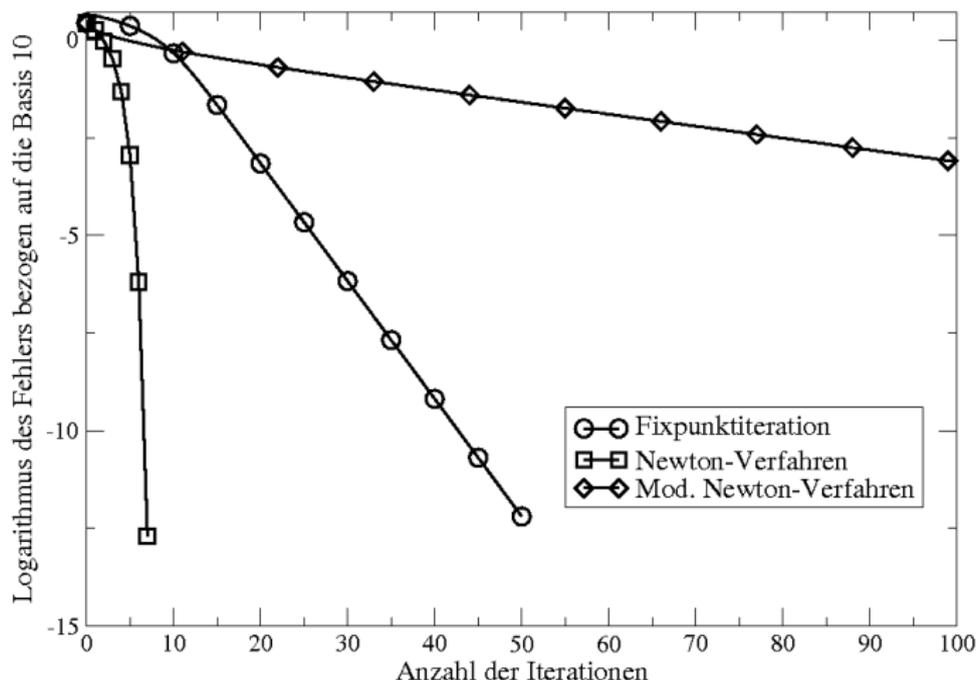


Abbildung: Konvergenzverlauf $\log_{10} \varepsilon_m$ des vereinfachten Newton-Verfahrens.

Satz 3.2: Satz von Gerschgorin

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, dann gilt mit den Kreisen

$$K_i := \left\{ \xi \mid |\xi - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

die Aussage

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n K_i.$$

Folgerung 3.3

Jede strikt diagonaldominante Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist regulär.

Satz 3.4

Jede irreduzible diagonaldominante Tridiagonalmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist regulär, falls für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ die Ungleichung

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (3.1.1)$$

gilt.

Folgerung 3.3

Jede strikt diagonaldominante Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist regulär.

Satz 3.4

Jede irreduzible diagonaldominante Tridiagonalmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist regulär, falls für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ die Ungleichung

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (3.1.1)$$

gilt.

Definition 3.5: Wertebereich einer Matrix

Unter dem Wertebereich einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ versteht man die Menge aller Rayleigh-Quotienten

$$\frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

d. h.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{A}) &= \left\{ \xi = \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \right\} \\ &= \left\{ \xi = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Lemma 3.6

Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathcal{W}(\mathbf{A}).$$

Satz 3.11

Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ habe die Eigenwerte

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad \text{mit} \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Ferner sei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein linker Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert λ_1 mit $\|\mathbf{y}\| = 1$. Ist $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{z}^{(0)}\| = 1$ und $\mathbf{y}^T \mathbf{z}^{(0)} \neq 0$ Startvektor der oben angegebenen Potenzmethode, dann gilt

$$\|\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)}\| - |\lambda_1| = \mathcal{O} \left(\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^k \right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Satz 3.11, fortgesetzt

Ferner existiert ein rechter Eigenvektor \mathbf{v} von \mathbf{A} zum Eigenwert λ_1 mit $\|\mathbf{v}\| = 1$ und

$$\|\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{v}\| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k\right), \quad k \rightarrow \infty, \text{ falls } \lambda_1 > 0$$

$$\|\mathbf{z}^{(k)} - (-1)^k \mathbf{v}\| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k\right), \quad k \rightarrow \infty, \text{ falls } \lambda_1 < 0.$$

Lemma 3.13

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und die Matrizen \mathbf{A}_k , \mathbf{Q}_k und \mathbf{R}_k gemäß (3.3.1), (3.3.2) bestimmt, dann gelten

$$(a) \quad \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^* \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k$$

$$(b) \quad \mathbf{A}_{k+1} = (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_k)^* \mathbf{A} (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_k)$$

$$(c) \quad \mathbf{A}^{k+1} = \prod_{j=0}^k \mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k \mathbf{R}_{k-1} \dots \mathbf{R}_0$$

Definition 3.14: Householder-Transformation

Eine Matrix der Gestalt

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} \mathbf{v} \mathbf{v}^* \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$

heißt Householder-Transformation oder Householder-Spiegelung.

Lemma 3.15

Die Householder-Transformation \mathbf{P} gemäß Definition 3.14 ist eine hermitesche, unitäre Matrix mit

$$\mathbf{P} \mathbf{v} = -\mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{\omega} \in \text{span}\{\mathbf{v}\}^\perp.$$

Lemma 3.16

Sei $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k)^T \in \mathbb{C}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^k$ sowie $\mathbf{z} \notin \text{span}\{\mathbf{e}_1\}$, dann gilt mit

$$\mathbf{v} := \frac{\mathbf{z} - \alpha \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{z} - \alpha \mathbf{e}_1\|_2}, \quad \alpha = \begin{cases} \frac{z_1}{|z_1|} \|\mathbf{z}\|_2 & , \text{ falls } z_1 \neq 0 \\ \|\mathbf{z}\|_2 & , \text{ falls } z_1 = 0 \end{cases}$$

und

$$\mathbf{P} := \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^*$$

die Eigenschaft

$$\mathbf{P}\mathbf{z} = \alpha \mathbf{e}_1 .$$

Satz 3.17

Jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kann unter Verwendung von $(n - 2)$ Householder-Transformationen auf obere Hessenbergform transformiert werden. D. h. mit $(n - 2)$ Householder-Matrizen $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{n-2}$ kann eine unitäre Matrix \mathbf{Q} derart definiert werden, dass

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}^* \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

eine Hessenbergmatrix darstellt.

Satz 3.18

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

und

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

sowie

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren. Ferner existiere eine LR -Zerlegung von \mathbf{X}^{-1} , dann konvergiert die Folge der Matrizen \mathbf{A}_k des QR -Verfahrens gegen eine rechte obere Dreiecksmatrix \mathbf{R} für dessen Diagonale $\text{diag}(\mathbf{R})$ gilt

$$\text{diag}(\mathbf{R}) = \text{diag}(\mathbf{D}).$$

Definition 4.2: Lineares Ausgleichsproblem

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Dann bezeichnen wir für gegebenen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ die Aufgabenstellung

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \stackrel{!}{=} \min$$

als lineares Ausgleichsproblem.

Definition 4.4

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann nennt man $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ eine *Ausgleichslösung* von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, wenn

$$\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 \leq \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Wir sagen $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ ist *Optimallösung* von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, wenn $\tilde{\mathbf{x}}$ eine Ausgleichslösung ist, deren euklidische Norm minimal ist.

Satz 4.5

Ein Vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Ausgleichslösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|_2 \stackrel{!}{=} \min, \quad (4.0.5)$$

wenn $\hat{\mathbf{x}}$ den sogenannten Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (4.0.6)$$

genügt.

Lemma 4.6

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(\text{Bild } \mathbf{A})^\perp = \text{Kern } \mathbf{A}^\top.$$

Lemma 4.7

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $n \leq m$, dann gilt

$$\text{Bild } \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \text{Bild } \mathbf{A}^\top.$$

Lemma 4.6

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(\text{Bild } \mathbf{A})^\perp = \text{Kern } \mathbf{A}^\text{T}.$$

Lemma 4.7

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $n \leq m$, dann gilt

$$\text{Bild } \mathbf{A}^\text{T} \mathbf{A} = \text{Bild } \mathbf{A}^\text{T}.$$

Satz 4.8

Das lineare Ausgleichsproblem laut Definition 4.2 besitzt stets eine Lösung.

Satz 4.9

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang } \mathbf{A} = n < m$, dann besitzt das lineare Ausgleichsproblem für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ genau eine Lösung.

Satz 4.8

Das lineare Ausgleichsproblem laut Definition 4.2 besitzt stets eine Lösung.

Satz 4.9

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang } \mathbf{A} = n < m$, dann besitzt das lineare Ausgleichsproblem für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ genau eine Lösung.

Satz 4.10

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang } \mathbf{A} < n < m$, dann stellt die Lösungsmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ des linearen Ausgleichsproblems für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ eine $(n - \text{Rang } \mathbf{A})$ -dimensionale Mannigfaltigkeit dar.

Satz 4.13

Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\text{Rang } \mathbf{B} = j < n$, dann existiert eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, eine rechte obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Permutationsmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass

$$\mathbf{BP} = \mathbf{QR} \quad (4.1.1)$$

gilt, wobei \mathbf{R} die Gestalt

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

mit einer regulären rechten oberen Dreiecksmatrix $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{j \times j}$ und einer Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{j \times (n-j)}$ aufweist.

Satz 4.16

Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang } \mathbf{A} = n < m$ existiert eine orthogonale Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ derart, dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{UR} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre rechte obere Dreiecksmatrix darstellt.

Definition 4.18: Pseudoinverse

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Eine Matrix $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ heißt generalisierte Inverse oder Pseudoinverse von \mathbf{A} , wenn

$$(i) \quad \mathbf{AGA} = \mathbf{A} \quad \text{und} \quad (ii) \quad \mathbf{GAG} = \mathbf{G}$$

gelten. Erfüllt \mathbf{G} zudem noch die Eigenschaften

$$(iii) \quad \mathbf{AG} \text{ und } \mathbf{GA} \text{ sind symmetrisch,}$$

so sprechen wir von einer Moore-Penrose-Inversen, die wir mit \mathbf{A}^\dagger bezeichnen.

Satz 4.19

Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang } \mathbf{A} = r < n \leq m$ existieren zwei orthogonale Matrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{W} = \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

gilt, wobei $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix darstellt.

Satz und Definition 4.20

Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang } \mathbf{A} = r \leq n \leq m$ existieren zwei orthogonale Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.2.7)$$

mit einer Diagonalmatrix $\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, die reelle, nichtnegative Diagonalelemente

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0 \quad (4.2.8)$$

aufweist. Die Darstellung (4.2.7) wird als Singulärwertzerlegung und die in (4.2.8) aufgeführte Diagonalelemente als Singulärwerte bezeichnet.

Satz 4.21

Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert genau eine Moore-Penrose-Inverse. Unter Verwendung der in Satz 4.20 genutzten Notation hat diese die Darstellung

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{U}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (4.2.9)$$

Satz 4.22

Sei $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Moore-Penrose-Inverse der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist die Lösungsmenge des linearen Ausgleichsproblems für gegebenes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{y} - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (4.2.10)$$

gegeben. Zudem stellt

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} \quad (4.2.11)$$

die Optimallösung im Sinne der Definition 4.4 dar.