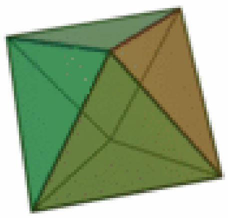
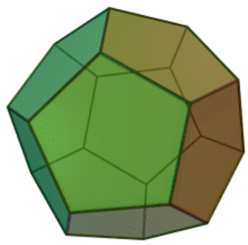
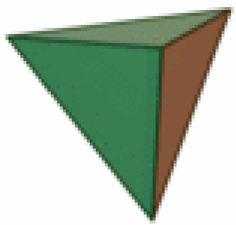
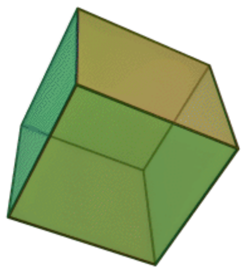
Philipps-Universität Marburg
Fachbereich 12: Mathematik und Informatik
PS: Klassische Probleme der Mathematik
Leitung: Prof. Harald Upmeier, Benjamin Schwarz
Referentin: Irina Kaiser
WS 2009/2010

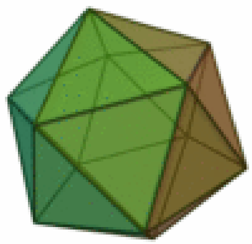






Platonische Körper





Inhaltsverzeichnis

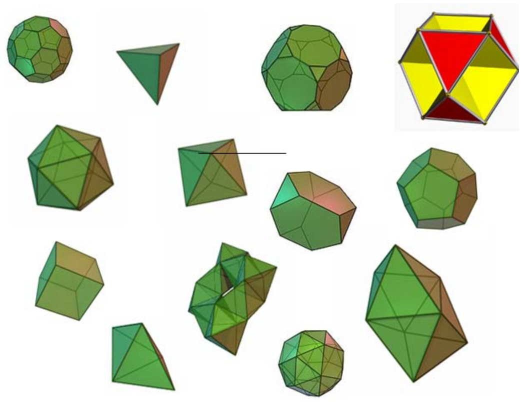
Die Platonischen Körper

Diese Körper haben die Menschheit fasziniert seit es Mathematik gibt und vielleicht schon vorher. Sie beziehen ihre Faszination daraus, dass sie hochsymmetrische geometrische Körper sind - die regelmäßigsten Körper - abgesehen von der Kugel, die aufgrund ihrer Vollkommenheit eine Sonderrolle spielt.

Wir werden nun Schritt für Schritt auf die besonderen Eigenschaften der Platonischen Körper eingehen. Wir fangen bei der grundlegendsten Eigenschaft an: Ein Platonischer Körper ist ein Polyeder!

Polyeder

Sowohl beim Pflastern als auch bei der Symmetrie war schon von Polyedern (griechisch: Vielflächner) die Rede. Quader, Prisma, Pyramide, Pyramidenstumpf und noch viele mehr. Alle samt sind Polyeder. Beispiele für Polyeder aus dem Alltag sind Schränke, Pyramiden, Häuser, Kristalle oder Spielwürfel. Keine Polyeder sind Kugeln, Kegel, Flaschen, Tortenstücke, da sie krumme Randflächen besitzen.



Polyeder
Ein **Polyeder** (auch Vielflächner oder Ebenflächner) ist ein Teil des dreidimensionalen Raumes, der von *Polygonen* begrenzt wird, welche folglich miteinander gerade Kanten bilden.

Polygon(Vieleck)

Ebene Figur, die durch eine Folge paarweise verbundener Geradenstücken begrenzt wird. Die Geradenstücken sind die *Seiten*, ihre Verbindungspunkte die *Ecken* des Polygons. Kurz gesagt: Ein n-Eck! Beispiele dafür sind Dreiecke, Vierecke, Siebenecke, Zwanzigecke, etc.

Ein beliebiger Polyeder kann sogar Durchbohrungen und innere Hohlräume haben (die dann ebenfalls von geraden Flächen und Kanten begrenzt sein müssen) und muss keinerlei Symmetrie aufweisen.

Schauen wir uns die Unterteilung der Polyeder etwas genauer an. Die Platonischen Körper gehören nämlich zu ganz besonderen Polyedern: Ein Platonischer Körper ist ein einfaches Polyeder!

Einfache Polyeder

Ein einfaches Polyeder besitzt keine „Löcher“. Das bedeutet, dass sich seine Oberfläche stetig in eine Kugeloberfläche deformieren lässt.

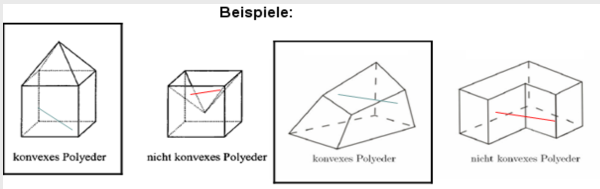
Wir differenzieren weiter und stellen fest: Ein Platonischer Körper ist ein konvexes Polyeder!

Konvexe Polyeder

Konvexe Körper waren bereits den Pythagoräern im 6. Jahrhundert vor Christus bekannt.

Konvexe Polyeder

Ein Polyeder ist konvex, wenn zu je *zwei Punkten* aus dem Inneren des Polyeders die *Verbindungsstrecke* zwischen diesen *im Innern* des Polyeders verläuft.



Schließlich sind wir bei einer konkreten Definition der Platonischen Körper angelangt:

Reguläre Polyeder

Besonders fasziniert waren die Menschen in der Antike von Polyedern mit hohem Symmetriegrad und von der Feststellung, dass es bei naheliegenden Symmetrieforderungen nur eine sehr kleine Anzahl solcher Körperformen gibt. Am symmetrischsten sind die *regulären* oder *platonischen* Polyeder. Sie sind dadurch definiert, dass ihre Flächen paarweise kongruente **reguläre Polygone** (*n-Ecke*) sind und an den Polyederecken gleich viele Kanten aneinander stoßen.

Reguläre Polyeder/ Platonische Körper

Ein konvexes Polyeder, das aus lauter kongruenten(deckungsgleichen), *regulären Polygonen* (n-Ecken) zusammengesetzt ist, von denen an jeder Ecke gleich viele aneinander stoßen, ist ein reguläres Polyeder bzw. ein Platonischer Körper.

Reguläre Polygone

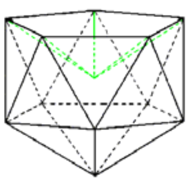
Es sind Polygone, deren Seiten gleich lang und deren Innenwinkel gleich groß sind.

Die platonischen Körper wurden schon in der Antike gründlich studiert, und es wurde ein einfacher Beweis dafür gefunden, dass es nur diese fünf Körper gibt, nämlich das Tetraeder, den Würfel, das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder.
Bevor wir auf diesen Beweis zu sprechen kommen, fassen wir nun noch einmal zusammen, welche besondern Eigenschaften die Platonischen Körper besitzen:

Ein Platonischer Körper ist ein Polyeder mit den Eigenschaften:

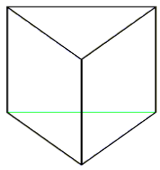
(1) Der Körper ist *konvex.*
(2) Alle Begrenzungsflächen sind *regelmäßige Vielecke*.
(3) Alle Begrenzungsflächen sind *kongruent*.
(4) An *jeder Ecke* stoßen *gleich viele Kanten* zusammen.

Wir betrachten Beispiele, die 3 der 4 Eigenschaften erfüllen, um uns klar zu werden, wie wichtig jede einzelne Eigenschaft ist:



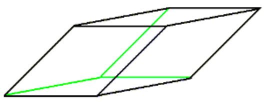
(1) darf nicht fehlen

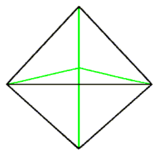
(3) darf nicht fehlen.



(2) darf nicht fehlen

(4) darf nicht fehlen





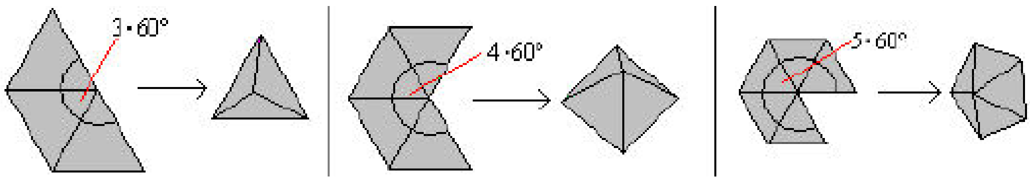
Versuchen wir nun durch Betrachtung der Anordnung und der Innenwinkel der an jeder Ecke zusammenstoßenden Vielecke zu beweisen, dass es nur fünf Polyeder dieser Art gibt:

Weshalb gibt es nur fünf Platonische Körper?

1. Beweis:

Der Beweis dafür findet sich schon bei dem griechischen Mathematiker Euklid. Er beruht auf folgenden Überlegungen:
Um eine Polyederecke bilden zu können, sind wenigstens drei Polygone nötig. Die Summe der Winkel zwischen den Kanten, die in eine Ecke einlaufen, muss kleiner als 360° sein, da sich ansonsten keine konvexe Ecke ergeben würde. Die einfachste Begrenzungsfläche für ein regelmäßiges Polyeder ist das gleichseitige Dreieck mit einem Innenwinkel von 60°.

Stoßen drei dieser Dreiecke zusammen, so ergibt sich die Tetraederecke, vier solche Dreiecke ergeben die Oktaederecke (4·60°=240!) und fünf die Ikosaederecke (5·60°=300°). Sechs oder noch mehr solcher Vielecke ergeben bereits eine Winkelsumme von mindestens 360° und formen daher keine konvexe Ecke mehr.



Wählt man Quadrate (Innenwinkel: 90°) bzw. regelmäßige Fünfecke (Innenwinkel: 108°) zur Begrenzung des Polyeders, so können aus demselben Grund lediglich drei dieser Flächen eine Ecke darstellen, nämlich die Würfelecke bzw. die Dodekaederecke.

Sechs gleichseitige Dreiecke, vier Quadrate und drei regelmäßige Sechsecke (Innenwinkel 120°) ergeben jeweils genau 360°, so dass keine Ecke entsteht, sondern reguläre Parkettierungen der Ebene. Alle anderen Möglichkeiten (vier regelmäßige Fünfecke, drei regelmäßige Siebenecke, etc.) überschreiten diesen Winkel bereits. Aus regelmäßigen Polygonen mit mindestens sechs Ecken, d.h. aus Polygonen, die Innenwinkel von mindestens 120° besitzen, kann schließlich kein reguläres Polyeder mehr aufgebaut werden. **Es gibt demzufolge nur fünf regelmäßige Polyeder!**

Vorbereitungen für den 2. Beweis

Wir wollen uns noch einen anderen Beweis ansehen, für den wir die Eulersche Polyederformel benötigen. Diese ist charakteristisch für einfache Polyeder. Indem wir diese Formel und die speziellen Eigenschaften regulärer Polyeder in den nächsten Beweis mit einfließen lassen, erhalten wir einen allgemein Beweis dafür, dass es nur 5 reguläre Polyeder gibt.

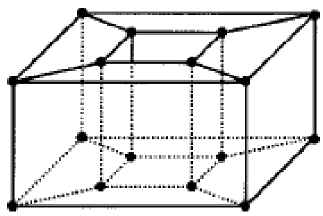
Die Eulersche Polyederformel

Im Jahr 1983 wurde in der DDR anlässlich des 200. Todestages des Mathematikers Leonhard Euler eine Briefmarke herausgegeben, die neben einem Bild von Euler die Eulersche Polyederformel und ein Ikosaeder zeigt. Die Formel besagt folgendes:

Briefmarke, die 1983 anlässlich des 200. Todestages von Leonhard Euler herausgegeben wurde (vgl. Böhm/Quaisser 1991, S.I)

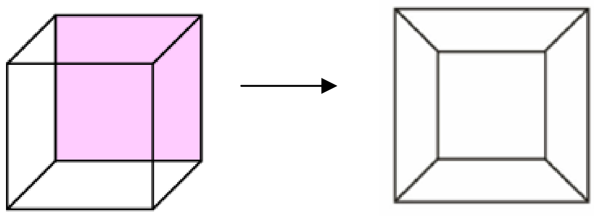
Satz: **Eulersche Polyederformel**
In einem einfachen Polyeder möge **E** die Anzahl der Ecken, **K** die Anzahl der Kanten und **F** die Anzahl der Flächen sein. Dann ist immer (1) $\mathbf{E - K + F = 2}$

Wenden wir die Formel auf ein Beispiel (e = f = 16 und k = 32) eines nicht-einfachen Polyeders durch den ein quaderförmiges Loch gebohrt wurde an und werden uns noch mal bewusst, was die nicht-einfachen von den einfachen Polyedern unterscheidet und uns zu vergewissern, dass der Satz nicht für nicht-einfache Polyeder gilt. (16-32+16=0)



Beweis der Eulerschen Polyederformel:

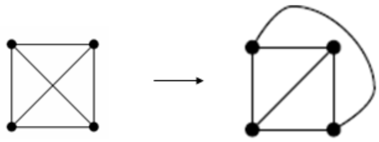
Um die eulersche Polyederformel zu beweisen, stellen wir uns vor, dass das gegebene einfache Polyeder hohl ist. Die Oberfläche besteht aus einer Gummihaut.
Wenn wir nun eine Fläche des Polyeders herausschneiden (rosa), können wir die übrige Oberfläche nun so deformieren, dass sie letztendlich flach in einer Ebene liegt. Dabei haben wir natürlich die Flächen und Winkel zwischen den Kanten des Polyeders verändert. Doch das Netz der Ecken und Kanten in der Ebene wird genau dieselbe Anzahl an Ecken und Kanten enthalten wie das ursprüngliche Polyeder, während die Zahl der Polygone um eins kleiner geworden ist, da wir eine Fläche weggeschnitten haben.



*Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, sehen wir uns einen kurzen Einschub an, der uns über die **Gültigkeit der Eulerschen Polyederformel für planaren Graphen** und deren Bezug zu konvexen Polyedern informieren soll:*

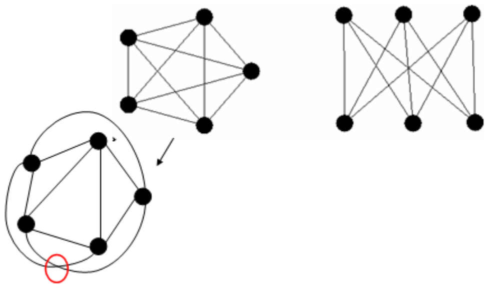
Planarer Graph

Ein Graph, der in der Ebene R^2 gezeichnet werden kann, ohne dass sich Kanten kreuzen (bzw. ein ebenes, zusammenhängendes Netz, dessen Kanten einander nicht schneiden) wird als *planarer Graph* bezeichnet.



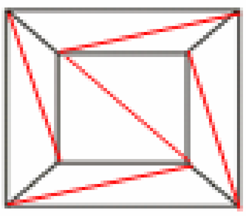
Ist ein Polyeder konvex, d. h. hat ein Polyeder ein zusammenhängendes Inneres ohne Löcher, kann die Beziehung seiner Flächen, Kanten und Ecken auch in Form eines zusammenhängenden planaren Graphen dargestellt werden, für den die Eulersche Formel gilt.

Nicht-planare Graphen



Der linke ist der vollständige Graph vom Grad 5, der als *K5* bezeichnet wird; der rechte ist der vollständige *bipartite* Graph mit 3 Knoten in jeder Teilmenge und wird als *K3,3* bezeichnet. (Ein Graph heißt bipartit, wenn die Knoten so in zwei Teilmengen A und B zerfallen, dass für jede Kante der Quell- und der Zielknoten in verschiedenen Teilmengen liegen.) Sie sind die kleinsten nicht-planaren Graphen. Ein Graph ist genau dann nicht-planar, wenn er eine Unterteilung des K5 oder des K3,3 als Teilgraph enthält.

Folgerung: Wird der eulersche Polyedersatz zuerst für planare Graphen bewiesen, so ergibt sich der klassische Polyedersatz hieraus als Spezialfall. Unser Beweis zeigt mit struktureller Induktion die Gültigkeit des Satzes für planare Graphen.

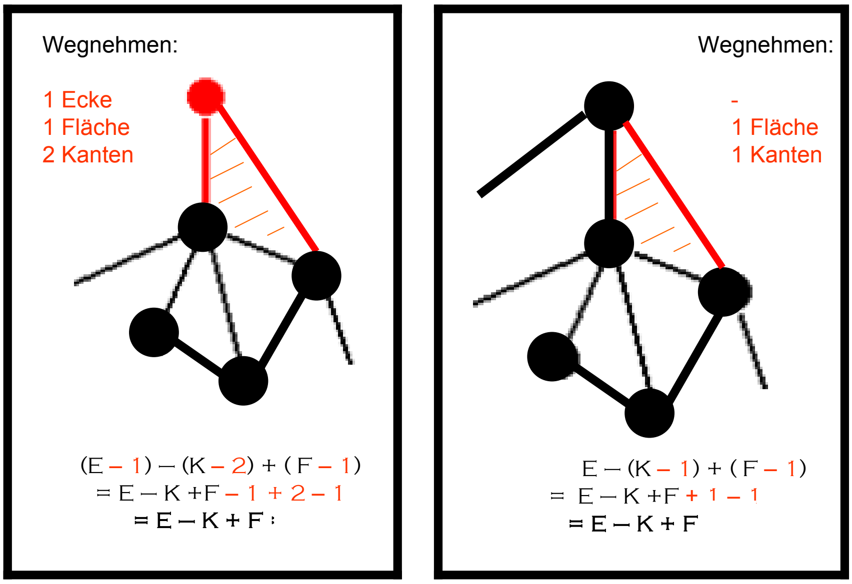


Betrachten wir wieder unseren planaren Graphen, der sich aus dem Netz des Würfels ergeben hat. Wir wollen zeigen, dass für das ebene Netz die Formel E – K + F = 1 gilt, sodass, wenn die herausgeschnittene Fläche mitgezählt wird, E – K + F = 2 für das ursprüngliche Polyeder herauskommt.

Wir ziehen in allen Polygonen, die nicht bereits ein Dreieck sind, eine Diagonale. Resultat: Da sich K und F um denselben Wert vermehren, behält die Formel E – K + F denselben Wert bei und wir erhalten eine Figur aus lauter Dreiecken.

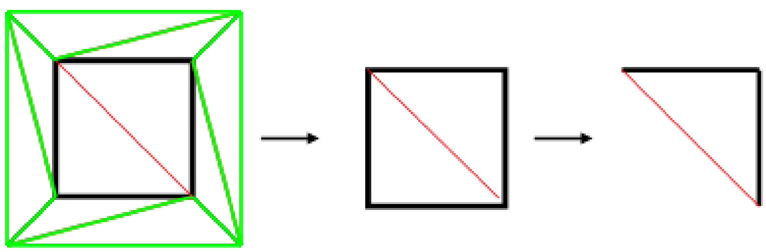
Indem wir den Graphen in einer Folge von Operationsschritten zweier Art nur noch auf eine Fläche, drei Ecken und drei Kanten reduzieren (denn hier wissen wir, dass die Formel gilt: E – K + F = 3 -3 +1 = 1) ohne die Gleichung zu verändern, ergibt sich der Beweis:

Zwei mögliche Operationen



…verändern die Formel nicht!!!

Einige der Dreiecke haben Kanten auf der Randlinie (grün) des ebenen Netzes. Wir entfernen nun diesen Dreiecken alles, was nicht zugleich zu anderen Dreiecken gehört. In einer passend gewählten Folge solcher Operationen entfernen wir stets Dreiecke mit Kanten auf der Randlinie (welche sich bei jeder Operation verändert!), bis nur noch ein Dreieck mit drei Kanten, drei Ecken und einer Fläche übrig ist. Für dieses einfachste Netz ist E – K + F = 3 -3 +1 = 1. Da sich die Größe E – K + F = 1 durch das Fortnehmen von Dreiecken nicht ändert, muss auch im ursprünglichen Netz E – K + F = 1 gewesen sein, das gleiche gilt für den Polyeder mit der herausgeschnittenen Fläche. Man erkennt, dass für den vollständigen Polyeder E – K + F = 2 gilt.



Die eben bewiesene Polyederformel machen wir uns nun beim nächsten Beweis zunutze:

2. Beweis, dass es nicht mehr als 5 reguläre Polyeder gibt:

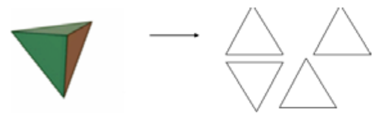
Reguläres Polyeder:

- *hat F Flächen, dessen jede ein reguläres n-Eck ist*
- *an jeder E Ecke treffen r Kanten zusammen*

Wir zählen die Kanten nach den Flächen ab:

(2) $nF = 2K$

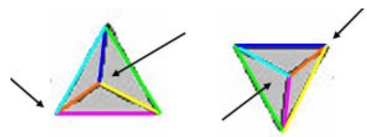
Da jede Kante zu zwei Flächen gehört



..und einmal nach den Ecken:

(3) $rE = 2K$

Da jede Kante zu zwei Ecken gehört



Wir erhalten aus (1) die Gleichung:

$$(2K)/r + (2K)/n - K = 2 \qquad \text{oder} \qquad (4) \quad 1/r + 1/n = 1/2 + 1/K$$

Von vornherein wissen wir, dass n≥3 und r≥3 sein müssen, da ein Polygon mindestens 3 Seiten haben muss und an jedem Polyedereckpunkt mindestens 3 Flächen zusammentreffen müssen. Doch können n und r nicht beide größer als 3 sein, denn sonst könnte die linke Seite von (4) nicht größer als 1/2 sein, was bei jedem positiven Wert von k jedoch der Fall sein muss.

Für $n = 3$:	Für $r = 3$:
$1/r - 1/6 = 1/K$ →r kann 3,4,5 sein →K = 6, 12, 30	$1/n - 1/6 = 1/K$ → n kann 3,4,5 sein → K = 6, 12, 30

Somit brauchen wir nur zu untersuchen, welche Werte r bzw. n haben kann, wenn n bzw. r = 3 ist.

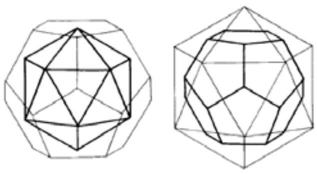
(2) bzw. (3) $n \cdot F = 2 \cdot K = r \cdot E$	Anzahl der Flächen F	Anzahl der Ecken E	Regulärer Polyeder
$3 \cdot F = 2 \cdot 6 = 3 \cdot E$	4	4	Tetraeder
$3 \cdot F = 2 \cdot 12 = 4 \cdot E$	6	8	Würfel
$3 \cdot F = 2 \cdot 30 = 5 \cdot E$	8	6	Oktaeder
$4 \cdot F = 2 \cdot 12 = 3 \cdot E$	20	12	Dodekaeder
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$5 \cdot F = 2 \cdot 30 = 3 \cdot E$	12	20	Ikosaeder

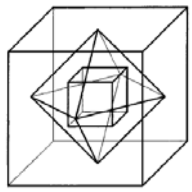
Einsetzten der gefundenen Werte für n, r und K in (2) und (3): (2) nF = 2K, (3) rE= 2K Lässt erkennen, dass nur 5 reguläre Polyeder existieren, nämlich die 5 Platonischen Körper!

Dualität

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Platonischen Körpern?

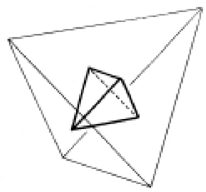
Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass zwischen dem Würfel und Oktaeder bzw. Dodekaeder und Ikosaeder ein enger Zusammenhang besteht. Sie besitzen jeweils gleich viele Kanten und die Anzahl der Ecken des einen Polyeders entspricht der Anzahl der Seitenflächen des anderen Körpers. Daher nennt man den Würfel und



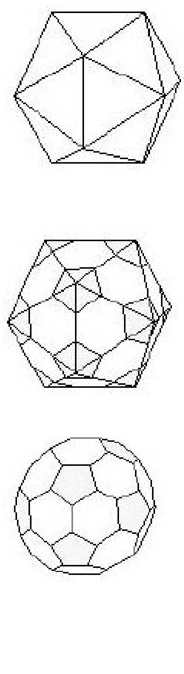


das Oktaeder bzw. das Dodekaeder und Ikosaeder zueinander duale Polyeder. Die Dualität kann geometrisch veranschaulicht werden. Werden beim Oktaeder die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen miteinander verbunden, so erhält man einen Würfel. Durch dieselbe Konstruktion entsteht umgekehrt aus einem Würfel ein Oktaeder. Ebenso kann die Dualität von Dodekaeder und Ikosaeder gezeigt werden.

Das Tetraeder ist zu sich selbst dual, denn wenn man die Mittelpunkte der Seiten eines Tetraeders verbindet, so entsteht wieder ein Tetraeder.



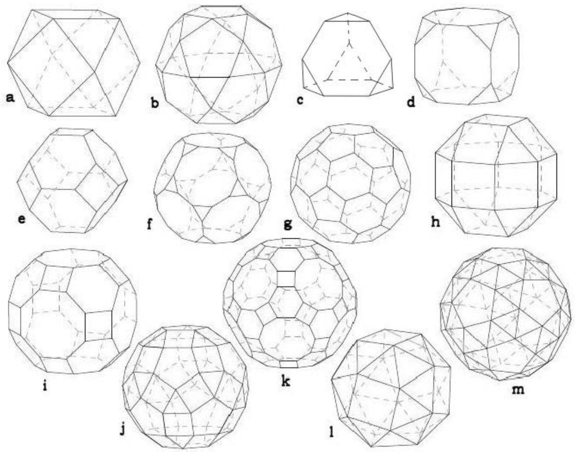
Archimedische Körper

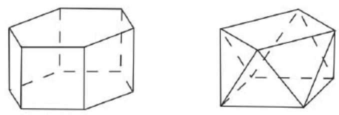


Der Fußball entsteht aus dem Ikosaeder, indem die Spitzen des Ikosaeders geeignet gekappt werden. Er wird daher auch als Ikosaederstumpf bezeichnet. Hierzu greift man sich eine beliebige Seitenfläche des Ikosaeders heraus und sieht nach, was mit diesem Dreieck beim Kappen des Ikosaeders passiert. An jeder Ecke des betrachteten gleichseitigen Dreiecks werden Dreiecke abgeschnitten, welche ebenfalls gleichseitig sind. Da das verbleibende Sechseck regelmäßig sein soll, müssen die Kanten der abgeschnittenen Dreiecke und die Kanten des Sechsecks gleich lang sein.

Dies erreicht man, indem man die Ikosaederkanten in drei gleich große Teile teilt. Die äußeren Drittel werden jeweils abgeschnitten und das innere Drittel bildet später eine Kante des Fußballs. Der Fußball bzw. Ikosaederstumpf gehört zu den Archimedischen Körpern.

Bei den **Archimedischen Körpern** handelt es sich um dreizehn konvexe Polyeder, die wie auch die Platonischen lediglich durch regelmäßige Polygone beschrieben werden, welche jedoch in diesem Fall nicht alle identisch sind. Ein Archimedischer Körper wird *aus mindestens zwei Arten von regelmäßigen Vielecken* so zusammengesetzt, dass die *Umgebungen aller Polyederecken kongruent* sind und das Polyeder somit von jeder Ecke aus betrachtet gleich erscheint. Die Abbildung zeigt die dreizehn Archimedischen Körper in der Übersicht. Zusätzlich gibt es noch unendlich viele Prismen und Antiprismen. Die Prismen und Antiprismen haben als Deckfläche und Bodenfläche jeweils ein gleichartiges Vieleck. Die Seitenflächen bestehen beim Prisma aus Quadraten und beim Antiprisma aus gleichseitigen Dreiecken.

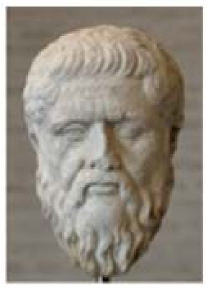




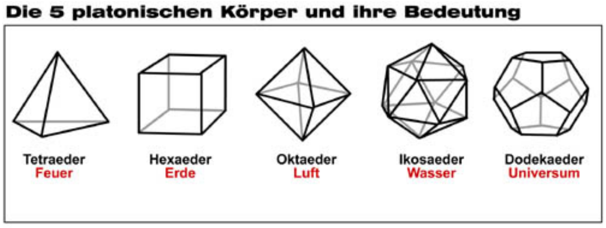
regelmäßiges Prisma   regelmäßiges Antiprisma

Zur Geschichte der Platonischen Körper

Das Hexaeder (Würfel) ist wohl in allen Hochkulturen des Altertums bekannt gewesen, das Dodekaeder soll Pythagoras entdeckt haben, dem auch das Tetraeder bekannt gewesen sein soll, allerdings noch unter dem Namen *Pyramide*. Die Bezeichnung Tetraeder hierfür stammt von Heron von Alexandria. Die Konstruktion des Dodekaeders sowie des Ikosaeders sollen wir Theaitetos von Athen (415/13-369 v. Chr.), einem Freund Platos, zu verdanken haben. Konvexe Körper waren bereits den Pythagoräern im 6. Jahrhundert vor Christus bekannt. Um 400 vor Christus hat Platon die später nach ihm benannten Körper in seine Philosophie eingebaut indem er sie mit den 4 Elementen Erde (Hexaeder), Wasser (Ikosaeder), Feuer (Tetraeder) und Luft (Oktaeder) und das Dodekaeder mit einer geheimnisvollen quinta essentia, dem Himmelsäther in Verbindung brachte. In seinem Dialog Timaios erklärt er, dass diese Körper

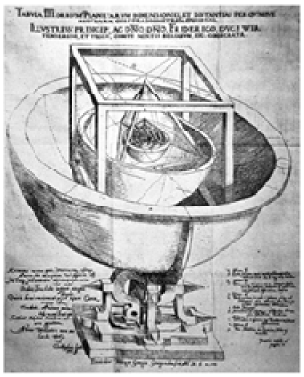


Die 5 platonischen Körper und ihre Bedeutung



zusammen mit der Kugel einen Abglanz, einen Widerschein des Göttlichen und Ewigen geben können, umgekehrt - erklärt Platon - können wir Menschen eine Ahnung davon bekommen, was das wirklich Göttliche, das wirklich Ewige ist. Im Buch XIII der Elemente des Euklid findet man bereits um 300 v. Chr. Konstruktionsbeschreibungen aller Platonischen Körper und den Nachweis, dass es nur diese regulären Polyeder gibt.

In der langen Zeit des Mittelalters gerieten die Polyeder in Vergessenheit. Mit der Renaissance im 15. und 16. Jahrhundert nach Christus und der Begeisterung für die Antike lebte das Interesse jedoch wieder auf. Sie fanden nicht nur Eingang in die Kunst (Leonardo Da Vinci, Albrecht Dürer), sondern sogar in die Astronomie. Johannes Kepler versuchte mit deren Hilfe die Bewegung der damals bekannten Planeten um die Sonne zu beschreiben. Aus seiner 1596 veröffentlichten Schrift ,,Mysterium cosmographicum" stammt die Abbildung unten, bei der einer Kugel ein Würfel einbeschrieben ist, so dass die Ecken des Würfels die Kugel berühren. In diesem Würfel steckt eine Kugel, die die Seitenflächen des Würfels berührt. In dieser Kugel stecken nacheinander ein Tetraeder, wieder eine Kugel, ein Dodekaeder, wieder eine Kugel, ein Ikosaeder, noch eine Kugel, ein Oktaeder und eine sechste Kugel. Jeder dieser Platonischen Körper besitzt eine Innenkugel, auf der die Mittelpunkte sämtlicher Flächen des Körpers liegen, sowie eine Außenkugel, auf der sämtliche Körperecken liegen. Diese Eigenschaft nutzte Johannes Kepler 1596 in seinem Jugendwerk Mysterium Cosmographicum aus, um die Abstände der damals sechs bekannten Planeten Saturn, Jupiter, Mars, Erde, Venus und Merkur des Sonnensystems zu erklären. Alle Planeten beschrieben danach Kreisbahnen auf Kugelschalen. Die außerordentlich exakten Himmelsbeobachtungen des kaiserlichen Astronoms Tycho Brahe, der Kepler ein Jahr vor seinem Tod 1601 zu seinem Gehilfen an den Hof nach Prag rief, machten die Diskrepanzen zwischen Modell und Beobachtung schnell deutlich und veranlassten Kepler, sein Modell zu verwerfen.



Und auch heute noch spielen die Platonischen Körper eine besondere Rolle, nicht mehr in der Astronomie, dafür aber immer noch für Künstler und Architekten. Eines der Werke in diesem Zusammenhang sind die berühmten Kuppelbauten von Buckminster Fuller aus dem 20. Jahrhundert.

Hauptquellen:

- Aigner, Martin ; Ziegler, Günter M.: Proofs from THE BOOK. Transl.from the English. (Das BUCH der Beweise.) 2nd ed. Berlin: Springer. 271 S.,2004
- Courant, Richard ; Robbins, Herbert: What is mathematics? (Was ist Mathematik?Übersetzt aus dem Englischen von Iris Runge, bearbeitet von Arnold Kirsch und Brigitte Rellich.) 5., unveränd. Au_. Berlin: Springer. xxii, 399 p.,2001
- Müller-Philipp, Susanne ; Gorski, Hans-Joachim: Leitfaden Geometrie.Für Studierende der Lehrämter. Wiesbaden: Vieweg. xv, 318 p., 2009