Prof. W. Bley 09.05.2014

4. Übungsblatt zur Algebraischen Geometrie II

Aufgabe 1 Sei R ein kommutativer Ring (mit 1) und Q ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul. Auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ definieren wir eine R-Modulstruktur durch $(rf)(a) := f(ra)$ für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q), a, r \in R$. Zeige: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ ist ein injektiver R-Modul.

Aufgabe 2 Sei R ein kommutativer Ring (mit 1). Sei $x \in R$ ein Nicht-Nullteiler und M und P seien R-Moduln. Zeige:
a) $\mathrm{Tor}_1(R/x, M) \simeq \{m \in M \mid xm = 0\}$.
b)

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/x, M) \simeq \begin{cases} \{m \in M \mid xm = 0\}, & \text{if } i = 0, \\ M/xM, & \text{if } i = 1, \\ 0 & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

c) P ist projektiv $\iff$ $\mathrm{Ext}^1_R(P, M) = 0$ für alle R-Moduln M.

Aufgabe 3 Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt welk (oder flasque oder flabby), falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Restriktionsabbildung $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ surjektiv ist.

a) Sei $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X. Sei $\mathcal{F}'$ welk. Zeige, dass für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ die Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0$$

exakt ist.
b) Sei wieder $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X. Zeige: $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ welk $\implies$ $\mathcal{F}''$ welk.

Hinweis zu a): Für $s \in \mathcal{F}''(U)$ betrachte man die Menge

$$\mathcal{M} := \{(t, V) \mid V \subseteq U \text{ offen, so dass es } t \in \mathcal{F}(V) \text{ gibt mit } \psi_V(t) = s\,|_V\}.$$

$\mathcal{M}$ ist partiell geordnet durch

$$(t_1, V_1) \leq (t_2, V_2) :\iff V_1 \subseteq V_2 \text{ und } t_2\,|_{V_1} = t_1.$$

Zeige nun, dass es in M maximale Element gibt. Zeige dann, dass für ein maximales Element $(\tilde{t}, \tilde{V})$ gilt: $\tilde{V} = U$.

Aufgabe 4 Sei $\{\mathcal{F}_i\}$ ein gerichtetes System von Garben auf dem noetherschen topologischen Raum X. Zeige, dass dann die Prägarbe $U \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_i(U)$ eine Garbe ist. Zeige weiter, dass dann $\Gamma(X, \varinjlim \mathcal{F}_i) = \varinjlim \Gamma(X, \mathcal{F}_i)$ gilt.