Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Satz (10.3)

Sei $f : U \to W$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Ist $a \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass $f'(a) \in \mathscr{L}(V, W)$ bijektiv ist, dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von a und eine offene Umgebung $\tilde{W} \subseteq W$ von $b = f(a)$ mit der Eigenschaft, dass durch $f|_{\tilde{U}}$ $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen $\tilde{U}$ und $\tilde{W}$ definiert ist.

(Leider ist die Aufnahme ersten Tafel verlorengegangen. Der Beweis setzt nun an der Stelle ein, wo er bereits auf die Situation zurückgeführt wurde, dass $V = W = \mathbb{R}^n$, $a = f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $f'(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ gilt.)

Existenz von Diffeomorphismen

Folgerung (10.4)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f'(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar ist. Dann ist $V = f(U)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und f ist ein Diffeomorphismus zwischen U und V.

können also o.B.d.A. voraussetzen: $f'(0_{\mathbb{R}^n}) = id_{\mathbb{R}^n}$

Sei $w \in \mathbb{R}^n$ vorgeg. z.zg: Liegt w „hinreichend nahe" bei $0_{\mathbb{R}^n}$ dann gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $f(v) = w$

$\iff w + v - f(v) = v$ Definieren wir $\varphi_w(v) = w + v - f(v)$,

dann ist $f(v) = w$ äquivalent zu $\varphi_w(v) = v$

Ansatz: Banach'scher Fixpunktsatz

Wähle $r \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n}) \subseteq U$ und $\| id_{\mathbb{R}^n} - f'(x) \| \le \frac{1}{2} \ \forall x \in \overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ (möglich, weil $f'(0_{\mathbb{R}^n}) = id_{\mathbb{R}^n}$ und f stetig diff'bar)

Für $x \in \overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ gilt dann $\varphi_w'(x) = id_{\mathbb{R}^n} - f'(x)$

Schrankensatz $\Rightarrow \| \varphi_w(x_1) - \varphi_w(x_2) \| \le \frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \|$ für alle $x_1, x_2 \in \overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$

Seien nun $w, x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\| < r$, $\|x\| \le 2r$. $\Rightarrow$

$$\|\varphi_w(x)\| = \|\varphi_w(x) - \varphi_w(0_{\mathbb{R}^n}) + \varphi_w(0_{\mathbb{R}^n})\| \le$$
$$\|\varphi_w(x) - \varphi_w(0_{\mathbb{R}^n})\| + \|\varphi_w(0_{\mathbb{R}^n})\| \le \tfrac{1}{2}\|x\| + \|w\| < 2r$$

also: $\varphi_w\left(\overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})\right) \overset{(**)}{\subseteq} B_{2r}(0_{\mathbb{R}^n}) \subseteq \overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$

Zusammen mit (*) folgt daraus, dass $\varphi_w|\overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ eine Kontraktion mit Konstante $\frac{1}{2}$ ist. Als abg. Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist $\overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ ein vollständiger metrischer Raum.

Banachscher Fixpunktsatz $\Rightarrow$ Für jedes $w \in B_r(0_{\mathbb{R}^n})$ gibt es ein $v \in \overline{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ mit $\varphi_w(v) = v$, also $f(v) = w$.

Wegen (**) liegt v in $B_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$. Unser Ergebnis ist also $f(B_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})) \supseteq B_r(0_{\mathbb{R}^n})$

Lt. Banachschem Fixpunktsatz ist das $v \in B_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ zu jedem w aus $B_r(0_{\mathbb{R}^n})$ jeweils eind. bestimmt. Setzen wir also $\overline{W} = B_r(0_{\mathbb{R}^n})$, $\overline{U} = f^{-1}(\overline{W}) \cap B_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$, so erhalten wir durch $f|_{\overline{U}}$ eine Bijektion zwischen $\overline{U}$ und $\overline{W}$.

Sei $g: \overline{W} \to \overline{U}$ die zugehörige Umkehrabb.

<u>Beh</u>: g ist stetig $\qquad \varphi_{0_{\mathbb{R}^n}}(x) = x - f(x)$

Seien $w_1, w_2 \in \overline{W}$, $x_1 = g(w_1)$, $x_2 = g(w_2)$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x_1 - x_2 = \varphi_{0_{\mathbb{R}^n}}(x_1) - \varphi_{0_{\mathbb{R}^n}}(x_2) + f(x_2) - f(x_1)$

$\Rightarrow \|x_2 - x_1\| \leq \|\varphi_{0_{\mathbb{R}^n}}(x_1) - \varphi_{0_{\mathbb{R}^n}}(x_2)\| + \|f(x_2) - f(x_1)\|$

$\leq \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| + \|f(x_2) - f(x_1)\| \Rightarrow \|g(w_2) - g(w_1)\| =$

$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{2}\|g(w_2) - g(w_1)\| + \|w_2 - w_1\|$ $\quad (\Rightarrow$ Beh$)$

$\Rightarrow \|g(w_2) - g(w_1)\| \leq 2\|w_2 - w_1\|$

Insgesamt erfüllt $f|\bar{U} : \bar{U} \to \bar{W}$ damit in jedem Punkt des Def.-bereichs alle Voraussetzungen der Umkehrregel. $\Rightarrow$ Mit f ist auch g stetig diff'bar, f also ein C^1-Diff. zwischen $\bar{U}$ und $\bar{W}$. $\square$

<u>Bew. von Folgerung (10.4)</u> Vor.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \overbrace{\mathbb{R}^n}^{C^1\text{-Abb}}$ injektiv, $f'(x)$ invertierbar $\forall x \in U$. z.zg.: $f|U$ ist C^1-Diff zwischen U und $f(U)$, $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

(1) Offenheit von $f(U)$: Sei $w \in f(U)$ vorgeg. und $u \in U$ mit $f(u) = w$. Satz (10.3) $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umg $U_1 \subseteq U$ von u, W_1 von w, so dass $f(W_1)$ offen, $f|U_1$ C^1-Diff. zwischen U_1 und W_1
$\Rightarrow$ $f(W_1)$ ist offene Umg von w, die (offenbar) in $f(U)$ enthalten ist

(2) Diffeomorph-Eig.: Als injektive Abb. $f: U \to \mathbb{R}^n$ ist $f|_U$ eine Bijektion zwischen U und $f(U)$.

Sei $w \in f(U)$ vorgeg. z.zg.: Die Umkehrabb. $g: f(U) \to U$ von $f: U \to f(U)$ ist stetig diff'bar in w. Wende wieder (10.3) an, um einen $\mathcal{C}^1$-Diff. $\tilde{g}$ zwischen offenen Umg. $U_1 \subseteq U$ von $u = g(w)$ und $W_1 \subseteq f(U)$ von w zu erhalten. $\tilde{g} = (f|_{U_1})^{-1}$ stimmt also auf W_1 mit g überein. Mit $\tilde{g}$ ist auch g in w stetig diff'bar. □

Implizit definierte Funktionen

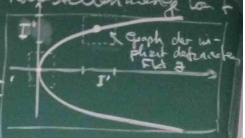
Definition (10.5)

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $I', I'' \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle. Wir sagen, eine Funktion $g : I' \to I''$ werde durch f implizit definiert, wenn für alle $(x, y) \in I' \times I''$ die Äquivalenz

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x) \quad \text{erfüllt ist.}$$

Beispiel. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto y^2 - x$

Nullstellenmenge von f



Beh. (i) Sei $I' = \mathbb{R}^+$. Dann gibt es auf I' zwei durch f implizit definierte Funktionen, nämlich $g: I' \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x}$ und $h: I' \to \mathbb{R}, \ x \mapsto -\sqrt{x}$

(ii) Gilt dagegen $0 \in I'$ für ein offenes Intervall $I' \subseteq \mathbb{R}$, so existiert keine durch f implizierte Fkt. auf I'.

zu (i) Sei $I'' = \mathbb{R}^+$. Dann gilt für alle $(x,y) \in I' \times I''$ die Äquivalen $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - x = 0 \Leftrightarrow$

$$y^2 = x \underset{x,y>0}{\overset{\sqrt{\cdot}}{\Longleftrightarrow}} y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = g(x)$$

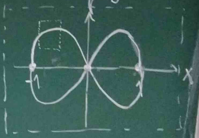
implizit eine Fkt. $g: I' \to I''$ definiert.
(Diese implizit def. Fkt. sind auf I' definiert durch $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Sei nun $I'' = \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.
Dann gilt für alle $(x,y) \in I' \times I''$ die Äquivalenz
$f(x,y) = 0 \iff y^2 - x = 0 \iff y^2 = x \overset{x>0}{\underset{y<0}{\iff}} y = -\sqrt{x}$
$\iff y = h(x)$

<u>zu (ii)</u> Setze nun $0 \in I'$ voraus. Ang., es gibt ein offenes Intervall, so dass f implizit die Fkt. $k: I' \to I''$ definiert. I' offen, $0 \in I' \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $-\varepsilon \in I'$
$(-\varepsilon, k(\varepsilon)) \in I' \times I'' \Rightarrow f(-\varepsilon, k(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow$
$k(\varepsilon)^2 - (-\varepsilon) = 0 \Rightarrow k(\varepsilon)^2 + \varepsilon = 0$ ↯ da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

<u>beachte:</u> $\partial_2 f(x,y) = 2y \Rightarrow \partial_2 f(x,0) = 0$.
$\partial_2 f(x,y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^+$

weiteres Beispiel: Lemniskate = Nullstellenmenge von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2(1-x^2) - y^2$



Ist $x \in \,]-1, 1[\, \setminus \{0\}$, dann gibt es ein offenes Intervall $I' \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in I'$ und ein offenes Intervall $I'' \subseteq \mathbb{R}$, so dass f implizit eine Fkt. $g: I' \to I''$ definiert.

(Diese implizit def. Fkt. sind auf I' definiert durch $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ bzw. $g(x) = -x\sqrt{1-x^2}$) Im Fall $-1, 0$ oder $1 \in I'$ existiert keine solche Fkt.

weiteres Bsp:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2(1-y^2) - x^2$