Definition der parametrisierten Flächen

Definition (5.11)

Eine parameterisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche ist ein Paar (A, ϕ) bestehend aus einer kompakten, zusammenhängenden, Jordan-messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer injektiven $\mathscr{C}^1$-Abbildung $\phi : A \to \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{rg} \phi'(p) = 2$ für alle $p \in A$ gilt.

Definition der Parametertransformationen

Definition (5.12)

Seien (A, ϕ) und (B, ψ) zwei parametrisierte $\mathscr{C}^1$-Flächen mit derselben Spur. Eine Parametertransformation zwischen (A, ϕ) und (B, ϕ) ist ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus $\rho : A \to B$ mit $\psi \circ \rho = \phi$. Gilt det $\rho'(p) > 0$ für alle $p \in A$, dann nennt man ρ orientierungserhaltend. Ansonsten gilt $\rho'(p) < 0$ für alle $p \in A$, und man bezeichnet ρ als orientierungsumkehrend.

Definition der Flächenintegrale

Definition (5.15)

Sei (B, ϕ) eine parameterisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche mit kompaktem Definitionsbereich B, $f : \phi(B) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : \phi(B) \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld auf B. Dann wird das Integral

$$\int_{(B,\phi)} f\, dA \quad = \quad \int_B (f \circ \phi)(x, y)\, \|\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2)\|\, d(x, y)$$

ein Flächenintegral 1. Art und das Integral

$$\int_{(B,\phi)} \langle F, dA\rangle \quad = \quad \int_B \langle (F \circ \phi)(x, y)\,,\, \phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2)\rangle\, d(x, y)$$

ein Flächenintegral 2. Art genannt. Insbesondere bezeichnet man $v_2((B, \phi)) = \int_{(B,\phi)} 1\, dA$ als Inhalt der parametrisierten $\mathscr{C}^1$-Fläche.

Orientierte stückweise $\mathscr{C}^1$-Flächen

Definition (5.20)

Ein Einheitsvektorfeld auf einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ mit $\|\nu(p)\| = 1$ für alle $p \in S$. Sei nun (S, ν) ein Paar bestehend aus einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und einem Einheitsvektorfeld ν auf S. Eine Parametrisierung von (S, ν) als stückweise $\mathscr{C}^1$-Fläche ist eine endliche Familie $((A_i, \phi_i))_{i \in I}$ parametrisierter $\mathscr{C}^1$-Flächen mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt $S = \bigcup_{i \in I} \phi_i(A_i)$.

(ii) Für jedes $i \in I$ existiert eine Jordansche Nullmenge $N_i \subseteq A_i$, so dass für alle $p \in A_i \setminus N_i$ jeweils $\phi_i'(p)(e_1) \times \phi_i'(p)(e_2)$ ein positives skalares Vielfaches von $\nu(\phi_i(p))$ ist.

(iv) Für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt $\phi_i(A_i \setminus N_i) \cap \phi_j(A_j \setminus N_j) = \varnothing$.

Ein Paar (S, ν) nennen wir eine orientierte kompakte stückweise $\mathscr{C}^1$-Fläche, wenn das Paar eine entsprechende Parametrisierung besitzt. Wir bezeichnen ν dann auch als Einheitsnormalenfeld auf S.

Integrale über orientierte stückweise $\mathscr{C}^1$-Flächen

Definition (5.21)

Sei (S, ν) eine orientierte kompakte stückweise $\mathscr{C}^1$-Fläche, $((A_i, \phi_i))_{i \in I}$ eine Parametrisierung, $f : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist das Flächenintegral 1. Art von f bzw. das Flächenintegral 2. Art von F definiert durch

$$\int_{(S,\nu)} f \, dA \quad = \quad \sum_{i \in I} \int_{(A_i,\phi_i)} f \, dA$$

bzw.

$$\int_{(S,\nu)} \langle F, dA \rangle \quad = \quad \sum_{i \in I} \int_{(A_i,\phi_i)} \langle F, dA \rangle.$$

Zusammenhang zwischen Flächenintegralen 1. und 2. Art

Proposition (5.22)

Sei (S,ν) eine orientierte kompakte stückweise $\mathscr{C}^1$-Fläche, $((A_i,\phi_i))_{i\in I}$ eine Parametrisierung und $F : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt für jedes $i \in I$ die Gleichung

$$\int_{(A_i,\phi_i)} \langle F, dA\rangle \quad = \quad \int_{(A_i,\phi_i)} F_1\nu_1\, dA + \int_{(A_i,\phi_i)} F_2\nu_2\, dA + \int_{(A_i,\phi_i)} F_3\nu_3\, dA.$$

Beispiel für eine orientierte stückweise $\mathcal{C}^1$-Fläche.

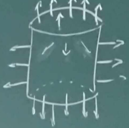
Zylinderoberfläche Seien $h, r \in \mathbb{R}^+$

Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,h],\ x^2+y^2 \le r^2\}$

Oberfläche $S = \partial Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,h],\ x^2+y^2 = r^2\}$

$\cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \{0,h\},\ x^2+y^2 \le r^2\}$

äußeres Einheitsnormalenfeld



Sei $p = (x,y,z) \in S$

1. Fall: $z \in]0,h[$ $\nu(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y)\|_2}(x,y,0)$

2. Fall. $x^2+y^2 < r^2$, $z = h$

$\nu(x,y,z) = e_3$

2. Fall:

$$\nu(x, y, z) = e_3$$

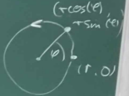
3. Fall: $x^2 + y^2 < r^2$, $z = 0$ $\quad \nu(x, y, z) = -e_3$

Für alle Punkte $p \in S$, für die kein Fall zutrifft, kann für $\nu(p)$ ein bel. Vektor der Länge 1 gewählt werden

Definition einer Parametrisierung

(1) Mantel (A_1, ϕ_1) mit $A_1 = [0, \pi] \times [0, h]$,

$$\phi_1(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$ Rückseite



(A_2, ϕ_2) mit $A_2 = [\pi, 2\pi] \times [0, h]$

$$\phi_2(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$ Vorderseite

$K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$

(2) Deckel und Boden

(K_r, ϕ_3) mit $\phi_3(x, y) = (x, y, h)$ Deckel

$$\phi_3'(x,y) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(K_4, ϕ_4) mit $\phi_4(x,y) = (y, x, 0)$

Zusammenhang zwischen Flächenintegralen 1. und 2. Art.

z.zg: $$\int_{(A_i,\phi_i)} \langle F, dA \rangle = \sum_{k=1}^{3} \int_{(A_i,\phi_i)} F_k \nu_k \, dA$$

$$\int_{(A_i,\phi_i)} \langle F, dA \rangle = \int_{A_i} \Big\langle (F\circ\phi)(x,y), \phi_i'(x,y)(e_1) \times \phi_i'(x,y)(e_2) \Big\rangle \, d(x,y)$$

Nach Voraussetzung ist $\phi_i'(x,y)(e_1) \times \phi_i'(x,y)(e_2)$ ein positives Vielfaches vom Einheitsnormalenfeld also gleich

$$\|\phi_i'(x,y)(e_1) \times \phi_i'(x,y)(e_2)\| (\nu \circ \phi)(x,y)$$

$$\Rightarrow \int \langle F, dA \rangle = \sum_{k=1}^{3} \int_{A_i} (F_k \circ \phi)(x,y) \cdot \|\phi_i'(x,y)(e_1) \times \phi_i'(x,y)(e_2)\| \cdot (\nu_k \circ \phi)(x,y) \, d(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \int_{A_i} F_k \nu_k \, dA \quad \square$$

Unabhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung

Proposition (5.23)

Sei (S, ν) eine orientierte kompakte stückweise $\mathscr{C}^1$-Fläche, $f : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind die Integrale $\int_{(S,\nu)} f \, dA$ und $\int_{(S,\nu)} \langle F, dA \rangle$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

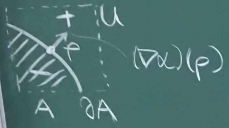
Definition der äußeren Einheitsnormalenfelder

Definition (5.24)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge.

- Wir bezeichnen eine Punkt $p \in \partial A$ als glatten Randpunkt von A, wenn eine offene Umgebung U von p und eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung $\alpha : U \to \mathbb{R}$ existieren, so dass die Bedingungen $\alpha'(p) \neq 0$ und $A \cap U = \{x \in U \mid \alpha(x) \leq 0\}$ erfüllt sind.
- Man bezeichnet dann $\|(\nabla\alpha)(p)\|^{-1}(\nabla\alpha)(p)$ als äußeren Einheitsnormalenvektor der Menge A im Randpunkt p.
- Ein Vektorfeld ν auf dem Rand ∂A mit der Eigenschaft, dass ν in jedem glatten Randpunkt mit einem äußeren Einheitsnormalenvektor übereinstimmt, nennen wir ein äußeres Einheitsnormalenfeld.

zur Definition des äußeren Einheitsnormalenfeldes.



Beispiel Zylinderoberfläche:

Sei p ein Punkt auf dem Deckel, d. h.

$p=(x_0, y_0, h)$ mit $x_0^2+y_0^2<r^2$

$U=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<r^2,\ z\in\mathbb{R}^+\}$

$\alpha: U\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto z-h$

Dann ist $Z\cap U=\{(x,y,z)\mid \alpha(x,y,z)\le 0\}$ erfüllt.

$(\nabla\alpha)(x,y,z)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \nu(x,y,z)=e_3$

Definition der Randkurven

Definition (5.25)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Wir bezeichnen einen Weg $\gamma : [a, b] \to A$ als Randkurve von A, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und eine endliche Teilmenge $\{t_1, ..., t_{m-1}\}$, so dass $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ stetig differenzierbar ist, wobei $t_0 = a$ und $t_m = b$ gesetzt wird.

(ii) Es ist $\gamma([a, b]) = \partial A$, und für $t \in [a, b] \setminus \{t_0, ..., t_m\}$ ist $\gamma(t)$ ein glatter Randpunkt von A.

Die Teilstücke $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ bezeichnen wir als $\mathscr{C}^1$-Randkomponenten von A.

Positiv orientierte Randkurven

Proposition (5.26)

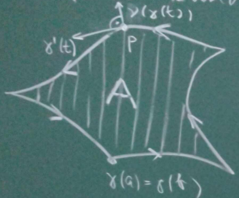
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine Randkurve von A. Dann existiert auf ∂A ein Einheitsnormalenfeld ν, dass für alle bis auf endlich viele $t \in [a, b]$ durch

$$\nu(\gamma(t)) \quad = \quad \pm\|\gamma'(t)\|^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Tritt in dieser Gleichung durchweg das Pluszeichen auf, dann sprechen wir von einer positiv orientierten Randkurve.

Dann ist $Z \cap U = \{(x,y,z) \mid \alpha(x,y,z) \le 0\}$ erfüllt

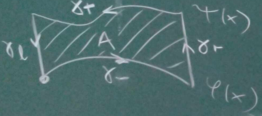
Zur Def. der Randkurve



Erinnerung: Normalbereich im $\mathbb{R}^2$ bzgl. y-Achse

benötige stetige Fkt. $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \le \psi$

Normalbereich $A = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$



Seien φ, ψ stetig diff'bar

Dann besitzt A eine positiv orientierte Randkurve der Form

$$\gamma = \gamma_- + \gamma_r + \gamma_+ + \gamma_l$$

mit $\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, \varphi(t))$

$\gamma_r : [\varphi(b), \psi(b)] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (b, t)$

$\gamma_+ : [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a+b-t, \psi(a+b-t))$

$\gamma_l : [\varphi(a), \psi(a)] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a, \varphi(a)+\psi(a)-t)$

Zerlegungen in Normalbereiche

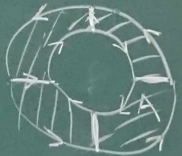
Definition (5.27)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge und γ eine positiv orientierte Randkurve von A. Unter einer Zerlegung von A in $\mathscr{C}_1$-Normalbereiche bezüglich der x-Achse verstehen wir eine endliche Familie $N_1, ..., N_r$ von solchen Normalbereichen mit $\mathscr{C}^1$-Begrenzungsfunktionen, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $A = \bigcup_{i=1}^r N_i$, und für $i \neq j$ schneiden sich N_i und N_j höchstens in Randpunkten.

(ii) Die Kurve γ und die positiv orientierten Ränder der Normalbereiche N_i können so in $\mathscr{C}^1$-Komponenten zerlegt werden, dass jede Randkomponente γ_i von einem N_i entweder mit einer solchen Komponente γ übereinstimmt, oder eine Randkomponente γ_j in einem N_j mit $j \neq i$ existiert, so dass $\gamma_j = -\gamma_i$ gilt.

Beispiel für eine Zerlegung in Normalbereiche



Anmerkung:

Die Zeichnung ist für die Definition 5.27 nicht ganz passend, weil für die dargestellte Menge A keine (einzelne, zusammenhängende) Randkurve existiert. Statt dessen hat der Rand zwei Komponenten, eine innere und eine äußere. Eine passendes Bild erhält man, wenn man den Kreisring A beispielsweise an der rechten Seite auftrennt, also an Stelle von

$$A \quad = \quad \{(s\cos(\varphi), s\sin(\varphi) \mid s \in [r, R]\ ,\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

die Menge

$$A_\varepsilon \quad = \quad \{(s\cos(\varphi), s\sin(\varphi) \mid s \in [r, R]\ ,\ \varphi \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]\}$$

für ein kleines positives ε betrachtet. Dieses Gebiet besitzt dann eine positiv orientierte Randkurve im Sinne von Prop. 5.26, und eine Zerlegung in Normalbereiche wie in Def. 5.27 beschrieben.

Definition der Divergenz

Definition (5.28)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann nennt man die Funktion $\mathrm{div}(F) : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathrm{div}(F)(p) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \partial_k F_k(p) \qquad \text{die Divergenz von } F.$$

Gauß'scher Integralsatz der Ebene

Satz (5.29)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge, die eine positiv orientierte Randkurve γ und Zerlegungen in Normalbereiche sowohl bezüglich der x- als auch bezüglich der y-Achse besitzt. Sei $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^2$ ein äußeres Einheitsnormalenfeld. Dann kann die positiv orientierte Randkurve so gewählt werden, dass für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld F auf A die Gleichung

$$\int_\gamma \langle F, \nu \rangle \, ds \quad = \quad \int_A \mathrm{div}(F)(x,y) \; d(x,y) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

zum Gauß'schen Integralsatz in der Ebene