

# Analysis einer Variablen

## ÜBUNGSBLATT 14

**Hinweis:** Dieses Blatt wird nicht mehr korrigiert und soll folglich auch *nicht* abgegeben werden.

1. (7 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

(b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  hat die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $\mathbb{R} \setminus \{0\}; x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$  die Form  $P(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ , wobei  $P$  ein Polynom vom Grad  $2n$  ist.

(c) Die durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist *glatt*.

(d) Bestimmen Sie die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0 = 0$ .

*Bemerkung:* Die Funktion stimmt mit ihrer Taylorreihe auf keiner Umgebung von 0 überein.

2. (3 Punkte) Finden Sie ein Beispiel einer beschränkten Funktion  $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , die nicht treppenapproximierbar ist und beweisen Sie dies.

3. (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral  $\int_0^b x^2 dx$  für  $b > 0$ , indem Sie eine Folge approximierender Treppenfunktionen  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finden und den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \tau_n(x) dx$  bestimmen.