

Analysis einer Variablen

ÜBUNGSBLATT 14

Hinweis: Dieses Blatt wird nicht mehr korrigiert und soll folglich auch *nicht* abgegeben werden.

1. (7 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ hat die n -te Ableitung der Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\}; x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ die Form $P(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$, wobei P ein Polynom vom Grad $2n$ ist.

(c) Die durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist *glatt*.

(d) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$.

Bemerkung: Die Funktion stimmt mit ihrer Taylorreihe auf keiner Umgebung von 0 überein.

2. (3 Punkte) Finden Sie ein Beispiel einer beschränkten Funktion $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, die nicht treppenapproximierbar ist und beweisen Sie dies.

3. (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral $\int_0^b x^2 dx$ für $b > 0$, indem Sie eine Folge approximierender Treppenfunktionen $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finden und den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \tau_n(x) dx$ bestimmen.