Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 1

F. Merkl, J.Berger, Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Berechnen Sie $\pi/6$ mit einer Genauigkeit von $1/100$. Verwenden Sie dazu die Taylorreihe von $\arcsin(x)$ mit Fehlerabschätzung.

Aufgabe 2: Es sei $f :]-1/e, e[\to]-1, 1[$ die Umkehrfunktion von

$$g :]-1, 1[\to \mathbb{R}\,, \quad g(t) = t\exp(t)\ .$$

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von f bis zur 3.Ordnung an der Stelle $t = 0$ mit Restglied $o(t^3)$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß die Matrix $B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ durch $||x|| := (x^t Bx)^{1/2}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Bestimmen Sie Zahlen $k, K \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft

$$k \cdot ||x||_2 \leq ||x|| \leq K \cdot ||x||_2\,,$$

wobei $||\,.\,||_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. (Hinweis: Lineare Algebra)

Aufgabe 4: Es seien (M_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$ metrische Räume mit $d_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $M := M_1 \times M_2 \times \ldots$ und $d(x, y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$ für beliebige $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots) \in M$. Zeigen Sie, daß auch (M, d) ein metrischer Raum ist.

$(*)$ **Aufgabe 5:** Gegeben ist eine Ellipse mit den Halbachsen 1 und a. Man nehme den Ellipsenumfang und bestimme dessen Taylorentwicklung nach $\beta := a^2 - 1$ um $\beta = 0$ bis zu beliebiger Ordnung inklusive Fehlerabschätzung für $\beta \geq 0$.

Abgabe: spätestens Dienstag 19.04.2005 um 11.00