# Periode drei impliziert ...?

(Ein „einfaches“ dynamisches System)

G. Dirr, K. Hüper, J. Jordan

Lehrstuhl II (Prof. Helmke)

Institut für Mathematik

Universität Würzburg

http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

# Die logistische Gleichung (Verhulst 1837 / May 1976)

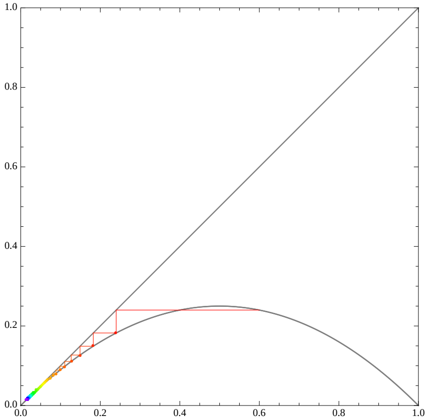
Erzeugende Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to [0,1], \\ x &\mapsto f_r(x) := r(1-x)x, \quad r \in [0,4]. \end{aligned}$$

Zeitdiskretes dynamisches System

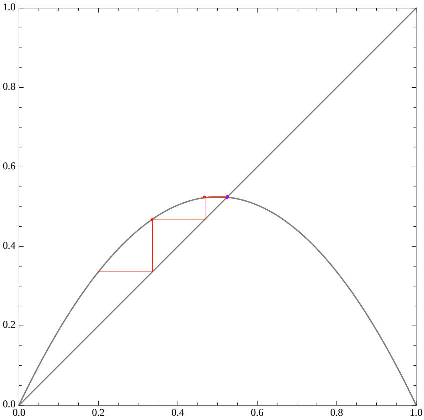
$$x_{n+1} = f_r(x) = r(1-x_n)x_n, \quad x_0 \in [0,1]$$

# Einige Phänomene



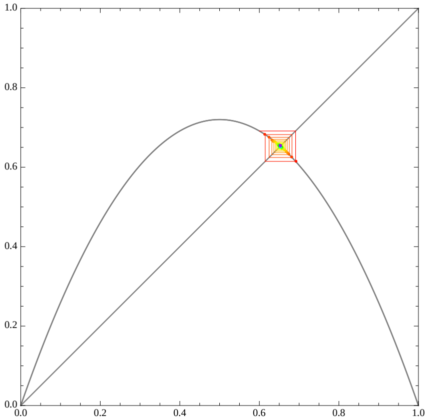

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 1.0$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



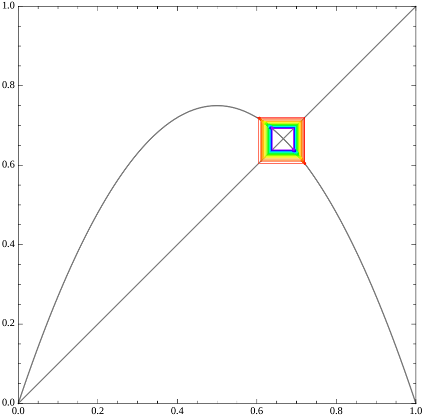

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 2.1$, $x_0 = 0.2$.

# Einige Phänomene



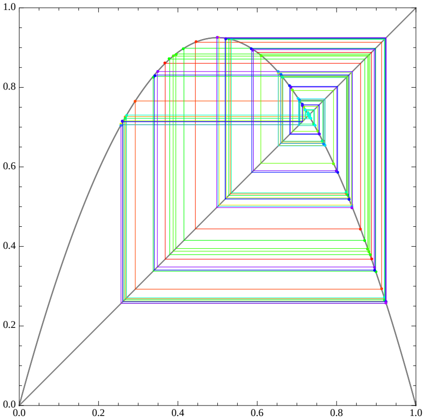

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 2.88$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



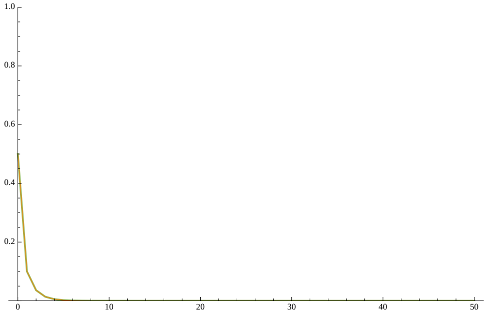

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 3.0$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



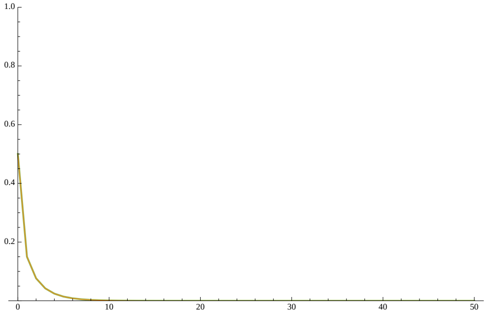

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 3.7$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



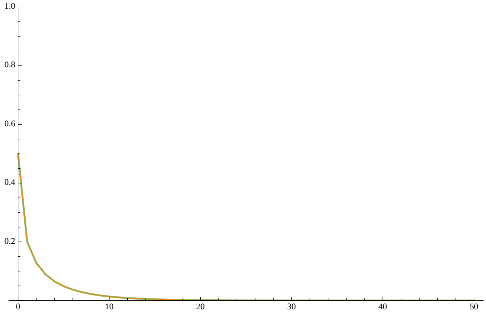

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 0.4$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



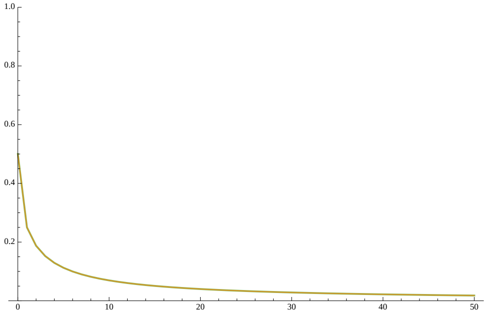

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 0.6$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



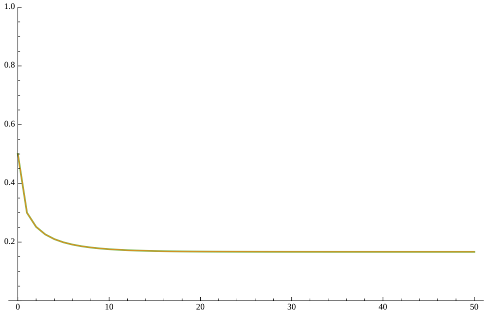

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 0.8$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



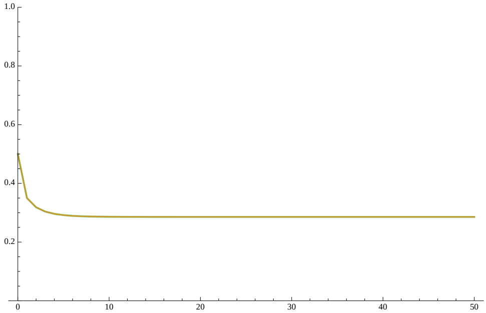

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 1.0$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



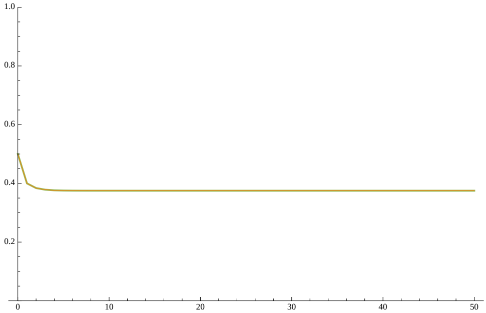

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 1.2$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



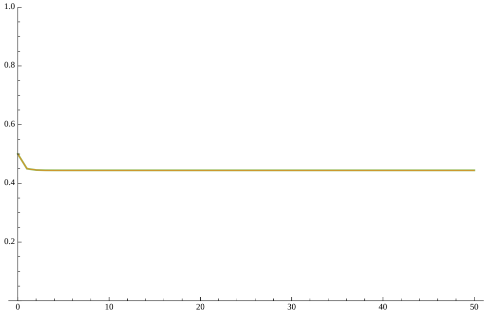

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 1.4$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



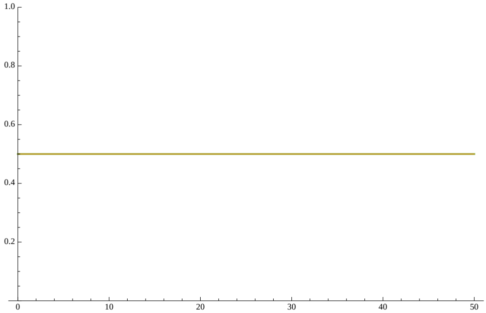

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 1.6$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



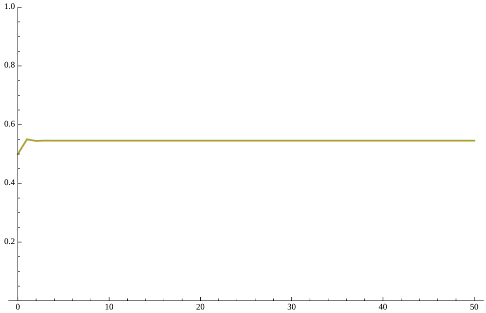

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 1.8$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



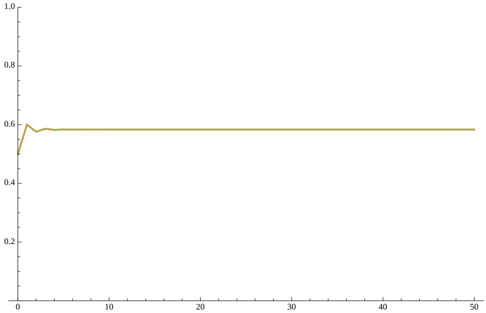

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 2.0$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



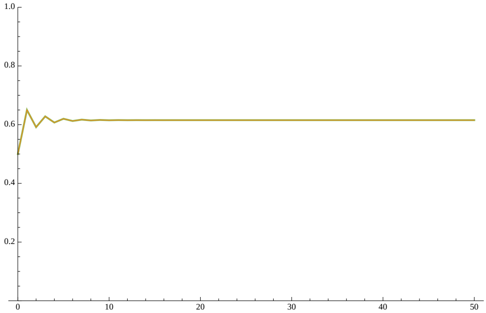

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 2.2$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



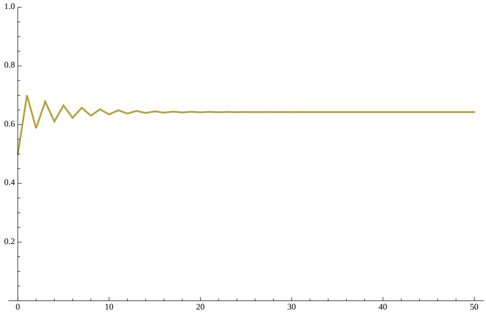

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 2.4$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



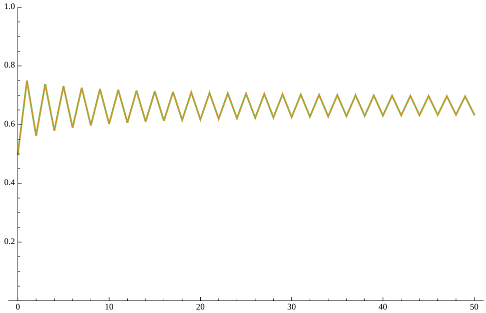

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 2.6$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



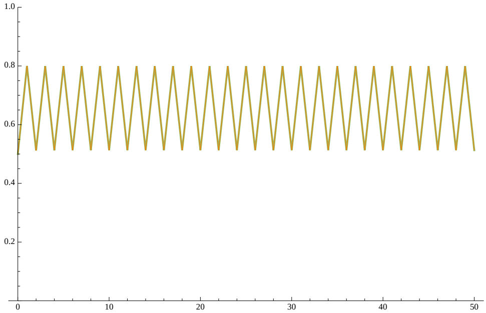

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 2.8$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



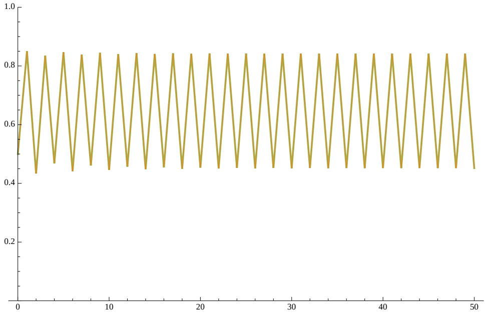

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 3.0$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



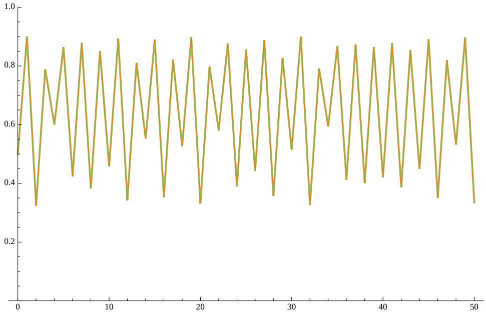

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 3.2$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene



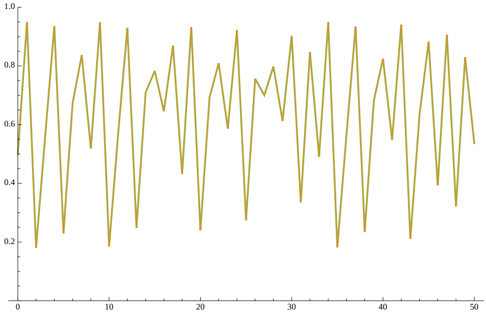

$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 3.4$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene




$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 3.6$, $x_0 = 0.6$.

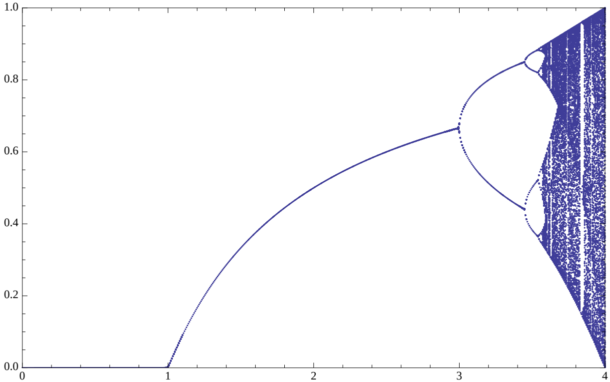
# Einige Phänomene




$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ Trajektorie für $r = 3.8$, $x_0 = 0.6$.

# Einige Phänomene

$$x_{n+1} = r\,(1 - x_n)\,x_n$$




Bifurkationen: Periodenverdopplung und Chaos, $r \in [0, 4]$.

# Satz: Periode drei impliziert Chaos ( Li/Yorke 1975; CI: 1079)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to I$ stetig. Ferner existiere ein $x \in I$ mit

$$f^3(x) \leq x < f(x) < f^2(x).$$

Dann gilt:

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen $k$-periodischen Punkt in $I$ .

(b) Es existiert eine überabzählbare Teilenge $S \subset I$, die keine periodischen Punkte enthält und die Eigenschaften

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$$

für alle $p, q \in S$ mit $p \neq q$ besitzt.

# Grundlagen & Vertiefungsstoff

- Grundlagen
  - Induktion
  - Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit
  - Eigenschaften von $\mathbb{R}$
  - Folgen, Häufungspunkte und Grenzwerte
  - Stetigkeit
  - Kompaktheit
  - Zwischenwertsatz und Fixpunktsätze
- Vertiefungsstoff
  - Lineare Gleichungen und Stabilität
  - Lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung
  - Sharkovsky-Ordnung auf $\mathbb{N}$

# Information

Simulationen:
Mathematica 7.0: **http://demonstrations.wolfram.com/**

Literatur:


- Jost, J. Dynamical systems. Examples of complex behaviour. Universitext. Springer. viii, 189 p., 2005.
- Li, T.-Y., and Yorke, J. A. Period three implies chaos. Am. Math. Mon. 82 (1975).

  http://www.jstor.org/pss/2318254 oder “Google”
- Devaney, R.L. An introduction to chaotic dynamical systems. 2nd ed., Addison-Wesley. xvi, 336 p., 1989.

# Ende

Herzlichen Dank!