Differentialgeometrie 1

Prof. Dr. Anna Wienhard

WS 2012/2013
Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 1.1 (topologische Mannigfaltigkeit). Eine *topologische Mannigfaltigkeit der Dimension* n ist ein topologischer Raum, der

1. Hausdorff'sch ist,
2. eine (zweit-) abzählbare Basis besitzt und
3. lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, d.h.

$$\forall p \in M\ \exists (x, U) \text{ Karte um } p, \text{ d.h.}$$

$U = U(p)$ ist eine offene Umgebung von p, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen und

$$x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist ein Homöomorphismus.

Eine Menge von Karten

$$\mathcal{A} := \{(x_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in A\}$$

mit $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ heißt *Atlas* .
Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt C^∞-Atlas, falls für alle α und β aus A

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

glatt ist.

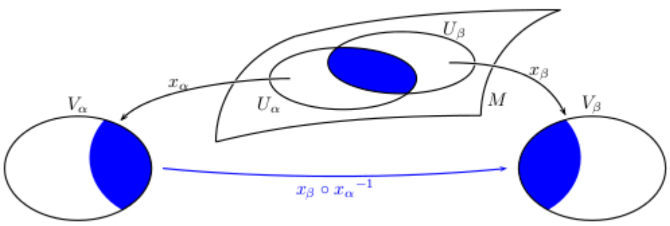

Abbildung 1: Entnommen aus [1]

Eine Karte (x, U) ist verträglich mit einem C^∞-Atlas, falls für alle α aus A

$$x_\alpha \circ x^{-1} : x(U_\alpha \cap U) \to x_\alpha(U_\alpha \cap U)$$

ein Diffeomorphismus ist.
Ein $C^\infty-$Atlas $\mathcal{A}$bestimmt auf eindeutig einen maximalen Atlas $\mathcal{A}_{\text{max}}$, der alle mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten enthält.

Definition 1.2 (glatte Mannigfaltigkeit). Eine *differenzierbare, glatte oder C^∞-Mannigfaltigkeit* ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

Beispiele 1.3.

0. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit der differenzierbaren Struktur, die durch $\mathcal{A} = \{(x, U) = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$ bestimmt ist.

1. Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, mit der differenzierbaren Struktur, die durch den Atlas $\mathcal{A} = \{(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n}|_U, U)\}$ bestimmt ist.

2. Endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wähle als Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Dann ergibt sich die Kartenabbildung zu:

$$x_B : V \to \mathbb{R}^n, \sum_i \alpha_i b_i \mapsto \sum_i \alpha_i e_i$$

3. Sphären: $S_r^n = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_i x_i^2 = r^2\right\}$
Ein Atlas lässt sich wie folgt auf S_r^n definieren: $\mathcal{A} = \{(p_N, U_N), (p_S, U_S)\}$, wobei

$$\begin{aligned} U_N = S_r^n \setminus N \quad N := (r, 0, \ldots, 0) \\ p_N : U_N \to \mathbb{R}^n, \quad p_N(x) = \frac{r}{r - x_0}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_S = S_r^n \setminus S \quad S := (-r, 0, \ldots, 0) \\ p_S : U_S \to \mathbb{R}^n, \quad p_S(x) = \frac{r}{r + x_0}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

4. Projektive Räume: $\mathbb{KP}^n = \{V \subseteq \mathbb{K}^{n+1} | V \text{ ist ein eindim. Unterraum}\}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$
Ein Punkt $l \in \mathbb{KP}^n$ ist gegeben durch $(x_0, \ldots, x_n) \in l \setminus \{0\}$, $l = [x]$. Weiterhin kann folgendermaßen ein Atlas für $\mathbb{KP}^n$ definiert werden: $\mathcal{A} := \{(b_i, U_i) | i = 0, \ldots, n\}$, wobei:

$$\begin{aligned} &U_i := \{l \in \mathbb{KP}^n | x_i \neq 0\} \\ &b_i : U_i \to \mathbb{K}^n = \mathbb{R}^m, \ [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ &m := \begin{cases} n & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ 2n & \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ 4n & \mathbb{K} = \mathbb{H} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Offene Teilmengen $U \subseteq M$:
Falls (x, U') eine Karte von M ist, so ist $(x|_U, U' \cap U)$ eine Karte von U.

6. Produkte: Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, dann ist $M \times N$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit der Produkttopologie und den Karten

$$\big((x, x'), U \times U'\big) : U \times U' \to x(U) \times x'(U')$$

wobei (x, U) eine Karte von M und (x', U') eine Karte von N ist.

Definition 1.4 (Glatte Abbildung). Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *glatt*, falls für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (x, U) von M um p und eine Karte (y, V) von N um $f(p)$ existiert, so dass $y \circ f \circ x^{-1}$ glatt ist.

$C^\infty(M, N)$ bezeichnet die Menge der glatten Abbildungen von M nach N. $\mathcal{F}(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$

Beispiele 1.5.

1. Die Identität $\mathrm{id} : M \to M$ ist glatt.
2. Sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge.
   Dann ist die Inklusion $\iota : U \hookrightarrow M$ glatt
3. Sei $M \times N$ eine Produktmannigfaltigkeit, dann sind die kanonischen Projektionen $\pi_M : M \times N \to M$ und $\pi_N : M \times N \to N$ glatte Abbildungen.
4. Die Abbildung
   $$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$
   ist glatt.
5. Die Abbildung
   $$\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{KP}^n, \quad x \mapsto [x]$$
   ist glatt.

Definition 1.6 (Diffeomorphismus). Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f eine Bijektion und f^{-1} glatt ist.
Die Menge aller

$$\mathrm{Diff}(M) := \{f : M \to M | f \text{ ein Diffeomorphismus}\}$$

aller bildet eine Gruppe. Sie heißt die *Diffeomorphismengruppe* von M.

Definition 1.7 (Untermannigfaltigkeit)**.** Sei N eine n dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit. $M \subseteq N$ heißt *Untermannigfaltigkeit*, falls für alle $p \in M$ eine Karte (x, U) von N um p existiert, so dass

$$x : U \to V := V' \times V'' \subseteq \mathbb{R}^n$$

mit offenen Mengen $V' \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V'' \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und

$$x(M \cap U) = V' \times \{z_0\}$$

für ein $z_0 \in V''$.

Eine *Einbettung* ist eine glatte Abbildung $f : M \to N$, so dass $f(M) \subseteq N$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : M \to f(M)$ ein Diffeomorphismus ist.

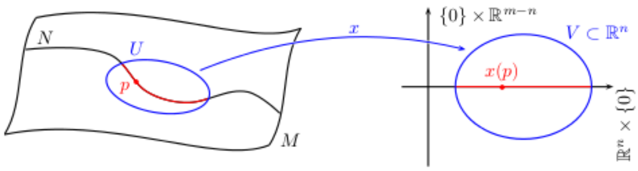

Abbildung 2: Entnommen aus [1]

2 Tangentialraum

Wir wollen nun für jede Mannigfaltigkeit M und jeden Punkt $p \in M$ eine lineare Approximation von M in p definieren: den Tangentialraum von M in p.

Lemma 2.1. *Sei $U \subseteq M$ offen, $p \in U$.*
Dann existieren $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ und eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von p mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U$ *und* $\varphi|_{U'} \equiv 1$.

Beweis. Sei $x_0 : U'' \to V$ eine Karte um p, $U'' \subseteq U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_{2\varepsilon}(x_0(p)) \subseteq V$ und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq B_{2\varepsilon}(x_0(p))$ und $\psi|_{B_\varepsilon(x_0(p))} \equiv 1$.
Setze dann $\varphi = \psi \circ x_0$ □

Definition 2.2. Ein *Tangentialvektor* an M in p ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$v : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$$

mit

$$v(f \cdot g) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \qquad \forall f, g \in \mathcal{F}(M)$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p ist ein Vektorraum. Er heißt *Tangentialraum von M in p* und wird mit T_pM bezeichnet.

Bemerkung 2.3 (Elementare Eigenschaften).
1. $v(\text{konst}) = 0$
2. $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ mit $f = g$ auf einer Umgebung von p gilt:

$$v(f) = v(g)$$

Beweis.
1. Da v eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, genügt es den Fall $v(1)$ zu betrachten.

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1) = 2v(1)$$

$\Rightarrow v(1) = 0$

2. Sei φ wie in Lemma 2.1. Damit folgt:

$$\begin{aligned} f \cdot \varphi &= g \cdot \varphi \\ v(f\varphi) &= v(f)\varphi(p) + f(p)v(\varphi) = v(f) + g(p)v(\varphi) \\ v(g\varphi) &= v(g)\varphi(p) + g(p)v(\varphi) = v(g) + g(p)v(\varphi) \end{aligned}$$

Damit gilt: $v(f) = v(g)$.

□

Tangentialvektoren können also lokalisiert werden: $f \in \mathcal{F}(U)$, $U \subseteq M$ offene Umgebung von p. Definiere $v(f) := v(g)$, wobei $g \in \mathcal{F}(M)$ und $f = g$ auf U (z.B.: $g := f \cdot \varphi$)

Sei (x, U) eine Karte von M um p. Definiere $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$ durch ($i = 1, \ldots, n$, $\quad x = (x^1, \ldots, x^n)$):

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right|_p = \partial_i(\varphi \circ x^{-1})|_{x(p)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{F}(M)$$

Definition 2.4 (partielle Ableitung). $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right|_p$ heißt i*-te partielle Ableitung* von φ bzgl. der Karte (x,U).

Satz 2.5. *Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension m und (x,U) eine Karte um p.*
Dann bilden die Tangentialvektoren $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, $i=1,\dots,m$ eine Basis von T_pM.

Lemma 2.6. *Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann existiert eine Umgebung $U' \subseteq U$ von p und glatte Funktionen $\varphi_i : U' \to \mathbb{R}$, so dass*

$$\varphi = \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i(p))\varphi_i$$

mit $\varphi_i(p) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right|_p$

Beweis. Sei $x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $u_0 := x(p)$, $\psi := \varphi \circ x^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Dann gilt für $u \in V$:

$$\begin{aligned}\psi(u) - \psi(u_0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\psi(tu + (1-t)u_0)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \sum_{i=0}^{m}(u^i - u_0^i)\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u^i}\psi(tu+(1-t)u_0)\,\mathrm{d}\,t \qquad (*)\end{aligned}$$

Setze $\psi_i := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u^i}\psi(tu+(1-t)u_0)\,\mathrm{d}\,t$. Dann ist $\psi : V \to \mathbb{R}$ glatt und $\psi_i(u_0) = \left.\frac{\partial\psi}{\partial u^i}\right|_p$
Setze $\varphi_i := \psi_i \circ x$. Gleichung $(*)$ gibt die gewünschte Form. □

Beweis von Satz 2.5. Sei $v \in T_pM$, $\varphi \in \mathcal{F}(M)$.

$$\begin{aligned}v(\varphi) &= v\left(\varphi(p) + \sum_{i=1}^{m}(x^i - x^i(p))\varphi_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\big(v((x^i - x^i(p)))\varphi_i(p) + 0\cdot v(\varphi_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{m} v(x^i)\varphi_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^{m} v(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(\varphi)\end{aligned}$$

Also spannen die $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, $i=1,\dots,m$ den Tangentialraum T_pM auf.
Die $\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)_{i=1,\dots,m}$ sind linear unabhängig, denn:

$$\left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_p = \delta_{ij}$$

□

Bemerkung 2.7 (Transformationsregel). Seien x und y Karten von M um p. Dann gilt:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = a_i^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$$

Beweis. □

Sei $v \in T_pM$, sei (x, U) eine Karte und $v = \sum_{i=1}^m \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (v)$ dann sagen wir, dass $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ den Vektor v (bezüglich der Karte (x, U)) repräsentiert.

Bemerkung 2.8 (Transformationsregel). Sei $v \in T_pM$. Seien x, y Karten um p. Sei v repräsentiert durch ξ bzgl. x und η bzgl. y. Dann gilt:

$$\mathrm{d}\,\eta = \mathrm{d}(y \circ x^{-1})|_{x(p)}\xi$$

Beweis.

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^m \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\ &= \sum_{j,i=1}^m \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \\ &= \sum_{j=1}^m \eta^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \end{aligned}$$

Und damit

$$\eta^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j)\xi^i = a_i^j \xi^i = \pi^j\, \mathrm{d}(y \circ x^{-1})|_{x(p)}\xi$$

□

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = p$. Dann definiert c einen Tangentialvektor $[c] \in T_pM$:

$$[c](\varphi) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi \circ c)\right|_{t=0} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{F}(M)$$

Satz 2.9. *Für alle $v \in T_pM$ existiert eine Kurve c durch p mit $[c] = v$.*
Zudem gilt: $[c_1] = [c_2]$ genau dann, wenn bzgl. einer Karte um p gilt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(x \circ c_1)\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(x \circ c_2)\right|_{t=0}$$

Beweis. Sei $x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte um p, $x(p) = u_0$. Sei v bzgl. x repräsentiert durch $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m$

Betrachte $c(t) := x^{-1}(u_0+t\xi) \quad t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \varepsilon > 0$ geeignet. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{F}(M)$:

$$v(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right|_p, \qquad [c](\varphi) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi \circ c)\right|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
[c](\varphi) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi \circ c)\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi \circ x^{-1} \circ x \circ c)\right|_{t=0} \\
&\boxed{= \mathrm{d}(\varphi \circ x^{-1}) \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(x \circ c)\right|_{t=0}} \qquad (*) \\
&= \mathrm{d}(\varphi \circ x^{-1})|_{u_0}\xi \\
&= \sum_{i=1}^{m} \partial_i(\varphi \circ x^{-1})|_{u_0}\xi^i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right|_p \xi^i \qquad (**)
\end{aligned}$$

Gleichung $(**)$ zeigt dabei den ersten Teil der Aussage und Gleichung $(*)$ den zweiten. □

Definition 2.10. Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $c :]a,b[\to M$ glatt. Dann setzen wir $c_t(s) := c(t+s)$ für $s+t \in]a,b[$ und definieren:

$$\dot{c}(t) = [c_t] \in T_{c(t)}M$$

Bemerkung 2.11.

1. Für $M = \mathbb{R}^n$ ist $T_pM = T_p\mathbb{R}^n$ kanonisch isomorph zum $\mathbb{R}^n$
2. Für einen m-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum ist T_pV kanonisch isomorph zu V durch $V \to T_pV, \quad v \mapsto [p+tv]$

Definition 2.12 (Differential)**.** Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung.

Das *Differential* (die Ableitung) von f in $p \in M$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,f|_p : T_pM &\to T_{f(p)}N \\
v &\mapsto \mathrm{d}\,f|_p(v),
\end{aligned}$$

die durch

$$\mathrm{d}\,f|_p(v)(\varphi) = v(\varphi \circ f) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{F}(N).$$

definiert ist.
Diese Abbildung ist linear und sie erfüllt die Kettenregel

$$\mathrm{d}(g \circ f)|_p(v) = \mathrm{d}\,g|_{f(p)}(\mathrm{d}\,f|_p(v)), \quad \text{wobei} \quad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

Wenn man Tangentialvektoren durch Kurven repräsentiert, so gilt:

$$\mathrm{d}\, f|_p[c] = [f \circ c]$$

Beweis.

$$\begin{aligned}[f \circ c](\varphi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi \circ f \circ c)\bigg|_{t=0} \\ &= [c](\varphi \circ f) \\ &= \mathrm{d}\, f|_p[c](\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{F}(N)\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.13. Sei $v \in T_pM$ repräsentiert durch ξ bzgl. x. Dann ist $\mathrm{d}\, f|_p(v)$ bzgl. y repräsentiert durch

$$\eta = \mathrm{d}(y \circ f \circ x^{-1})\xi$$

Beweis. Folgt aus

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\, f|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ f)\ \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{f(p)} \\ \mathrm{d}\, f|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (\varphi \circ f)\end{aligned}$$

□

Definition 2.14. Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung.

1. Der *Rang von f* in $p \in M$, $\mathrm{rank}_p(f)$ ist der Rang von $\mathrm{d}\, f|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$
2. $p \in M$ ist ein *regulärer Punkt* , falls $\mathrm{rank}_p(f) = \dim N$.
3. $q \in N$ ist ein *regulärer Wert* , falls alle $p \in f^{-1}(\{q\})$ reguläre Punkte sind.
4. f ist eine *Submersion*, falls f surjektiv ist und alle $p \in M$ reguläre Punkte sind.
5. f ist eine *Immersion*, falls für alle $p \in M$ $\mathrm{d}\, f|_p$ injektiv ist.

Bemerkung 2.15. Eine Einbettung ist eine Immersion

Definition 2.16 (lokaler Diffeomorphismus). Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ ist ein *lokaler Diffeomorphismus*, falls für alle $p \in M$ eine Umgebung $U \subseteq M$ von p und eine Umgebung $V \subseteq N$ von $f(p)$ existiert, so dass

$$f|_U : U \to V$$

ein Diffeomorphismus ist.

Beispiele 2.17. Die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto e^{it}$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Bemerkung 2.18. Sei f ein lokaler Diffeomorphismus, so ist $\mathrm{d}\, f|_p$ ein Isomorphismus und $\mathrm{d}\, f|_p^{-1} = \mathrm{d}\, f^{-1}|_{f(p)}$.

Satz 2.19 (Umkehrsatz). *Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Falls $\mathrm{d}\, f|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Isomorphismus ist, so existiert eine Umgebung U von p in M und U' von $f(p)$ in N, so dass $f|_U : U \to U'$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Betrachte dazu $y \circ f \circ x^{-1} : V \to V'$, wobei (x, U) eine Karte von M um p und (y, U') eine Karte von N um $f(p)$. Dann ist $\mathrm{d}(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}$ ein Isomorphismus.
$\Rightarrow$ Wende Umkehrsatz im $\mathbb{R}^m$ an.
$\Rightarrow \quad y \circ f \circ x^{-1}|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \tilde{V}'$ ist ein Diffeomorphismus.
$\Rightarrow \quad f|_{x^{-1}(\tilde{V})} : x^{-1}(\tilde{V}) \to y^{-1}(\tilde{V}')$ ist ein Diffeomorphismus. □

Satz 2.20 (Satz über implizite Funktionen). *Sei $f : M^m \to N^n$ eine glatte Abbildung.*

1. *Sei* $\operatorname{rank}_p(f) = k$. *Dann existiert für alle Karten (y, U') von N um $f(p)$ eine Karte (x, U) von M um p, so dass*

$$(y \circ f \circ x^{-1})(u^1, \ldots, u^m) = (u^1, \ldots, u^k, \varphi^{k+1}(u), \ldots, \varphi^n(u))$$

2. *Sei* $\operatorname{rank}_q(f) = k$ *für alle q in einer Umgebung U von p. Dann existieren Karten (x, U') von M um p und (y, U'') von N um $f(p)$, so dass*

$$(y \circ f \circ x^{-1})(u^1, \ldots, u^m) = (u^1, \ldots, u^k, 0, \ldots, 0)$$

Beweis. Seien (y, U') eine Karte von N um $f(p)$ und (x, U) eine Karte von M um p. Dann gilt nach Voraussetzung und möglicherweise Umsortieren der Koordinatenfunktionen:
$\det \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (y^j \circ f) \right)_{i,j=1}^{k} \neq 0.$
Setze nun:

$$\begin{aligned} \hat{x}^i &= y^i \circ f && \forall i = 1, \ldots, k \\ \hat{x}^i &= x^i && \forall i = k+1, \ldots, m \end{aligned}$$

Damit ist

$$\left(\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^i} \right)_{i,j=1}^{m} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (y^j \circ f) \right)_{ij} & * \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_{m-k} \end{array} \right)$$

invertierbar. Also ist der Umkehrsatz anwendbar: Es existiert $\hat{U}$ um p und $\hat{V} \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass:

$$\hat{x}|_{\hat{U}} : \hat{U} \to \hat{V}$$

ein Diffeomorphismus ist.

Wähle nun $(\hat{x}, \hat{U})$ als die gesuchte Karte. Damit ergibt sich:

$$(y \circ f \circ \hat{x}^{-1})(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^k, \varphi^{k+1}(u), \dots, \varphi^n(u))$$

$\Rightarrow$ 1.) ✓

Nun nehmen wir an: $\operatorname{rank}(f) = k$ in einer Umgebung von p.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ f)\right)_{i,j=1}^n = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_k & 0 \\ \hline * & \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}\right)_{ij} \end{array}\right)$$

Da f in einer Umgebung von p Rang k hat $\Rightarrow \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}\right)_{ij} = 0$ auf einer Umgebung von p.

Auf einer möglicherweise kleineren Umgebung $\hat{U}' \subseteq \hat{U}$ gilt dann: $\forall u \in \hat{x}(\hat{V}') \subseteq \mathbb{R}^m$:

$$\varphi^j(u) = \bar{\varphi}^j(u^1, \dots, u^k) \qquad j = k+1, \dots, n$$

Setze nun:

$$\begin{aligned} \hat{y}^j &= y^j & j &= 1, \dots, k \\ \hat{y}^j &= y^j - \bar{\varphi}^j(y^1, \dots, y^k) & j &= k+1, \dots, n \end{aligned}$$

Damit ist

$$\left(\frac{\partial \hat{y}^j}{\partial y^i}\right)_{i,j=1}^n = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_k & 0 \\ \hline * & \mathrm{Id}_{n-k} \end{array}\right)$$

wieder invertierbar und mithilfe des Umkehrsatzes ergibt sich: $\exists \hat{U}''$ von $f(p)$ in N und $\hat{V}'' \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $\hat{y}|_{\hat{U}''} : \hat{U}'' \to \hat{V}''$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist $\Rightarrow (\hat{y}, \hat{U}'')$ eine Karte und es gilt:

$$\begin{aligned} (\hat{y} \circ f \circ \hat{x}^{-1})(u^1, \dots, u^m) &= (\hat{y} \circ y^{-1} \circ y \circ f \circ \hat{x}^{-1})(u^1, \dots, u^m) \\ &= (\hat{y} \circ y^{-1})(u^1, \dots, u^k, \varphi^{k+1}(u), \dots, \varphi^n(k)) \\ &= (u^1, \dots, u^k, \varphi^{k+1}(u) - \bar{\varphi}^{k+1}(u^1, \dots, u^k), \dots, \varphi^n(u) - \bar{\varphi}^n(u^1, \dots, u^k)) \\ &= (u^1, \dots, u^k, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 2.) ✓ □

Korollar 2.21. *Sei $f : M \to N$ glatt*

1. *Falls $q \in N$ ein regulärer Wert ist, so ist $P := f^{-1}(\{q\}) = \{p \in M | f(p) = q\}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $(m - n)$.*

2. *Falls f vom Rang k in einer Umgebung von $P := f^{-1}(\{q\})$, dann ist P eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $(n - k)$.*

Sei $M \subseteq N$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist T_pM kanonisch isomorph zu einem Unterraum von T_pN.

Falls $M = f^{-1}(\{q\})$, so ist $T_pM \cong \ker \mathrm{d} f|_p \subseteq T_pN$.

3 Tangentialbündel und Vektorfelder

Die disjunkte Vereinigung $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ heißt *Tangentialbündel.*

Wir wollen nun das Tangentialbündel TM mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit versehen.

Sei (x, U) eine Karte von M um p.

Wir definieren eine Karte $(\tilde{x}, \tilde{U})$ von TM durch

$$\tilde{U} := \bigcup_{p\in U} T_pM \xrightarrow{\tilde{x}} V \times \mathbb{R}^m, \quad \tilde{x}(p, v) = (x(p), \xi)$$

wobei ξ der Repräsentant von v bzgl. der Karte x ist. $\tilde{x}$ ist eine Bijektion. Dies folgt daraus, dass die $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_i$ eine Basis von T_pM bilden.

Die Kartenwechsel

$$(\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1})(u, \xi) = ((y \circ x^{-1})(u), \mathrm{d}(y \circ x^{-1})|_{x(p)}\xi)U') \times \mathbb{R}^n$$

sind Diffeomorphismen $x(U \cap U') \times \mathbb{R}^n \to y(U\cap. \; (\; u \in x(U \cap U'), \xi \in \mathbb{R}^m)$

Wir definieren eine Topologie auf TM wie folgt: $\Omega \subseteq TM$ ist offen $:\Leftrightarrow \tilde{x}(\Omega \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ offen ist für alle Karten $(\tilde{x}, \tilde{U})$. Das ist genau die Topologie, so dass alle $\tilde{x}$ Homöomorphismen sind.

Übung: Nachprüfen, dass dies eine Topologie definiert, die zweitabzählbar und Hausdorffsch ist.

Satz 3.1. *Seien M, A Mengen, so dass $\forall \alpha \in A \quad \exists U_\alpha \subseteq M$ mit einer Bijektion*

$$x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen}$$

und

1. $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$
2. $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^m$ *offen*
3. $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *homöomorph*

sind.

Dann existiert genau eine Topologie auf M, so dass alle x_α Homöomorphismen sind.

Sei $\mathcal{A}_{\max} = \{(x, U)\}$ ein maximaler Atlas von M, so ist $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{x}, \tilde{U})\}$ ein C^∞-Atlas und definiert somit einen eindeutigen maximalen Atlas auf TM, also eine differenzierbare Struktur.

Die Dimension des Tangentialbündels einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist $2n$.

Die Projektion

$$\pi : TM \to M, \quad \tilde{v} \in T_pM \mapsto p$$

ist eine Submersion, also insbesondere glatt.

Bemerkung 3.2. $TM \to M$ ist ein Vektorbündel über M

Definition 3.3 (Vektorfeld). Ein *Vektorfeld* auf M ist eine glatte Abbildung $X : M \to TM$, so dass $\pi \circ X = \mathrm{Id}$.

Sei (x, U) eine Karte von M, so sind $\frac{\partial}{\partial x^i} : U \to TM|_U := \bigcup_{p \in U} T_pM$ Vektorfelder auf U.
Sei X ein beliebiges Vektorfeld auf U, so gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

wobei $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m) : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung ist. ξ heißt *Hauptteil* von X bzgl. der Karte (x, U).

Diese Darstellung zeigt:

- X, Y Vektorfelder $\Rightarrow X + Y$ Vektorfeld
- X Vektorfeld, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha X$ Vektorfeld

$\Rightarrow \; V(M) =$ Raum aller Vektorfelder auf M ist ein Vektorraum.

Für $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ ist $\varphi \cdot X \in V(M)$ mit $(\varphi \cdot X)(p) = \varphi(p) \cdot X(p)$, d.h. $V(M)$ ist auch ein $\mathcal{F}(M)$-Modul.

Beispiele 3.4.

1. Nullschnitt: $0 : M \to TM, \quad p \mapsto 0_p \in T_pM$
2. Koordinaten
   Wier wählen ein $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ und definieren

   $$\begin{aligned} U &:= \mathbb{R}^2 \setminus \{(r\cos(\varphi_0) \quad r\sin(\varphi_0))^T | r \geq 0\} \\ V &:=]0, \infty[\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[\end{aligned}$$

   Nun können wir die Kartenabbildung $y : U \to V$ betrachten, deren Umkehrfunktion durch

   $$y^{-1}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

   gegeben ist. Bezüglich dieser Karte sind die Vektorfelder $r\frac{\partial}{\partial r}$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ definiert.
   Wollen wir ihre Darstellung bezüglich der Karte $x = \mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ausdrücken, so

erhalten wir:

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial}{\partial r} &= r\left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\
&= r\left(\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x^1} + \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\
&= x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= -r\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial x^1} + r\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

3. $S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} | \|x\|^2 = 1\}$
   $T_x S^m \cong \{v \in \mathbb{R}^{m+1} | \langle v, x\rangle = 0\}$
   $\Rightarrow x \in V(S^m)$ ist gegeben durch:

   $$X : S^m \to \mathbb{R}^{m+1}, x \mapsto X(x) \perp x$$

   z.B.: $m = 2n - 1 : \quad (x_1 y_1, \dots, x_n y_n) \mapsto (-y_1 x_1, \dots, -y_n x_n)$ ist ein nie verschwindendes Vektorfeld. Für $m = 2n$ existiert kein nirgends verschwindendes Vektorfeld
   Für S^3 existieren *drei* Vektorfelder, die in jeden Punkt linear unabhängig sind.
   Dafür: $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}_i \oplus \mathbb{R}_j \oplus \mathbb{R}_k$ mit $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$. $I(x) = ix$, $J(x) = jx$ und $K(x) = kx$.

Satz 3.5 (Adams). *Auf S^m existieren m linear unabhängige Vektorfelder $\Leftrightarrow m = 1, 3, 7$*

Die Vektorfelder operieren auf Funktionen. Sei $X \in V(M)$, $\varphi \in \mathcal{F}(M)$

$$X\varphi = X(\varphi) : M \to \mathbb{R}, \quad X(\varphi)(p) = X_p(\varphi)$$

Definition 3.6 (Lieklammer von Vektorfeldern). Seien $X, Y \in V(M)$. Definiere $[X, Y] \in V(M)$ durch

$$[X, Y]_p(\varphi) = X_p(Y\varphi) - Y_p(X\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{F}(M), p \in M$$

Wir müssen zeigen, dass $[X, Y]_p \in T_p M$.
Produktregel:

$$\begin{aligned}
[X, Y]_p(f \cdot g) &= X_p(Y(f \cdot g)) - Y_p(X(f \cdot g)) \\
&= X_p(fY(g) + gY(f)) - Y_p(fX(g) + gX(f)) \\
&= f(p)X_p(Y(g)) + X_p(f)Y_p(g) + g(p)X_p(Y(f)) + X_p(g)Y_p(f) \\
&\quad - f(p)Y_p(X(g)) - Y_p(f)X_p(g) - g(p)Y_p(X(f)) - Y_p(g)X_p(f) \\
&= f(p)[X, Y]_p(g) + g(p)[X, Y]_p(f)
\end{aligned}$$

Lokalisierungsprinzip $\rightsquigarrow$ für Karte (x, U) ist $[X, Y]_p(x^i)$ wohldefiniert. $\rightsquigarrow$ $[X, Y]$ ist glatt $\Rightarrow [X, Y] \in V(M)$.

Definition 3.7 (f-verwandt). Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $X \in V(M)$, $Y \in V(N)$ und $f : M \to N$ glatt.
Dann heißen X, Y *f-verwandt*, falls

$$\mathrm{d} f|_p X_p = Y_{f(p)} \quad \forall p \in M.$$

Lemma 3.8. *Seien $X, \tilde{X} \in V(M)$, $Y, \tilde{Y} \in V(N)$ und X, Y und $\tilde{X}, \tilde{Y}$ f-verwandt bzgl. $f : M \to N$. Dann sind $[X, \tilde{X}] \in V(M)$ und $[Y, \tilde{Y}] \in V(N)$ f-verwandt.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{F}(M)$
$Y_{f(p)}(\varphi) = \mathrm{d} f|_p(X_p)(\varphi) = X_p(\varphi \circ f)$
Also:

$$\begin{aligned}
[Y, \tilde{Y}]_{f(p)}(\varphi) &= Y_{f(p)}(\tilde{Y}(\varphi)) - \tilde{Y}_{f(p)}(Y(\varphi)) \\
&= X_p(\tilde{(\varphi)} \circ f) - \tilde{X}_p(Y(\varphi) \circ f) \\
&= X_p(\tilde{X}(\varphi \circ f)) - \tilde{X}_p(X(\varphi \circ f)) \\
&= [X, \tilde{X}]_p(\varphi \circ f) \\
&= \mathrm{d} f|_p [X, \tilde{X}]_p(\varphi)
\end{aligned}$$

□

Beispiele 3.9.

1. Da alle $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ per Definition glatt sind, erfüllen sie das Lemma von Schwarz, d.h. auf jeder Karte (x, U) gilt:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right) \qquad \forall p \in U$$

   Also gilt auf jeder Karte: $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$

2. Im Beispiel **??** auf Seite **??** wurden die Vektorfelder $I, J, K \in V(S^3)$ definiert. Für diese gilt mit beliebigem $x \in S^3$:

$$[I, J](x) = I(J(x)) - J(I(x)) = i \cdot j \cdot x - j \cdot i \cdot x = k \cdot x + k \cdot x = 2K(x)$$

4 Flüsse

Vektorfelder $X \in V(M)$ können als gewöhnliche Differentialgleichungen aufgefasst werden:

$$X(c(t)) = \dot{c}(t) = [c]_{c(t)} \tag{4.1}$$

Lösungen heißen *Integralkurven* von X.

Sei (x, U) eine Karte von M, $\quad x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ der Hauptteil von X bzgl. (x, U).

Eine glatte Kurve $c : I \to M$ ist eine Lösung von 4.1 $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}(x \circ c) = \xi(c(t)) = (\xi \circ x^{-1})(x \circ c(t))$$

Das bedeutet:
c ist eine Lösung von 4.1 $\Leftrightarrow$ $\sigma := x \circ c$ eine Lösung von

$$\dot{\sigma} = \hat{\xi}(\sigma) \qquad \hat{\xi} = \xi \circ x^{-1} : V \to \mathbb{R}^m \tag{4.2}$$

ist.
Damit erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung in $\mathbb{R}^m$. Die bekannten Eindeutigkeits- und Existenzsätze liefern dann:

Satz 4.1 (Eindeutigkeitssatz). *Seien $c_i :]\alpha_i, \beta_i[\Rightarrow M, \quad i \in \{1, 2\}$ Integralkurven, d.h. Lösungen von 4.1.*
Sei $\alpha_0 \in]\alpha_1, \beta_1[\cap]\alpha_2, \beta_2[$ und $c_1(\alpha_0) = c_2(\alpha_0)$.
Dann gilt:

$$c_1(t) = c_2(t) \qquad \forall t \in]\alpha_1, \beta_1[\cap]\alpha_2, \beta_2[$$

Satz 4.2 (Existenzsatz). *Für alle $p_0 \in M$ existiert eine Umgebung V von p_0 in M, $\quad \varepsilon > 0$ und eine glatte Abbildung $f :]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \to M, \quad (t, p) \mapsto f(t, p)$, so dass $c(t) = f(t, p_0)$ eine Integralkurve von X und $f(0, p) = p$ ist.*

Wir schreiben $f^t(p) := f(t, p)$. f^t heißt *lokaler Fluss* von X.

4.1 Maximale Integralkurven

Sei $p \in M$, $\;c_i :]\alpha_i, \beta_i[\Rightarrow M, \quad i \in \{1, 2\}$ mit $\alpha_0 \in]\alpha_1, \beta_1[\cap]\alpha_2, \beta_2[$ und $c(\alpha_0) = p$.
Dann ist

$$c :]\alpha_1, \beta_1[\cup]\alpha_2, \beta_2[\to M, \quad c(t) = \begin{cases} c_1(t) & t \in]\alpha_1, \beta_1[\\ c_2(t) & t \in]\alpha_2, \beta_2[\end{cases}$$

eine wohldefinierte Integralkurve.

Für alle $p \in M$ existiert eine maximale Integralkurve $c_p : I_p :=]\alpha_p, \beta_p[\to M$ mit $c_p(0) = p$.

Setze $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M | t \in I_p\}$
Bemerkung 4.3. $f^t(p) = c_p(t)$ heißt *Fluss* von X.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f^{s+t}(p) &= f^s(f^t(p)) \qquad \forall s+t, t \in I_p, s \in I_{f^t(p)} = I_p - t \\ f^0(p) &= p \end{aligned} \tag{eq:4.3}$$

" Fluss definiert lokale 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen."

Satz 4.4. *Für alle $p_0 \in M$ existiert eine Umgebung U um p_0 in M und $\delta > 0$, so dass f^t auf U definiert und für alle $|t| < \delta$ $f^t : U \to f^t(U) \subseteq M$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Seien $V, \varepsilon > 0$ wie im Existenzsatz 4.2. Dann ist $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \subseteq \mathcal{D}$ und $f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von $(0, p_0)$.
Dann existiert eine Umgebung U von p_0, $\quad \delta > 0$, so dass $]-\delta, \delta[\times U \subseteq f^{-1}(V)$.
Für $|t| < \delta$: $f^{-t}(f^t(p_0)) = p_0 \quad \Rightarrow \quad f^t : U \to V$ ist glatt und injektiv.
$\Rightarrow f^t : U \to f^t(U)$ ist eine Bijektion.

$\text{rank}(f^0) = m \qquad (f^0(p) = p) \quad \Rightarrow \quad \text{rank}(f^t) = m$ für $|t| < \delta'$ ($0 < \delta' \leq \delta$)
Mit dem Umkehrsatz folgt: $f^t : U' \to f^t(U')$ ist ein Diffeomorphismus für $U' \subseteq U$ eine Umgebung von p_0. ☐

Satz 4.5. *$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ ist offen und $f : \mathcal{D} \to M$ ist glatt.*

Beweis. Sei $p \in M$, $A :=$ Menge aller $t \geq 0$, so dass $[0,t] \times \{p\}$ eine offene Umgebung in $\mathbb{R} \times M$ hat, die in $\mathcal{D}$ enthalten ist und auf der f glatt ist.
z.z.: $A = I_p$.

1. $A \subseteq I_p$ ist offen nach Definition

2. $A \subseteq I_p$ ist abgeschlossen:
   Sei $t \in \bar{A} \cap [0, \infty[\cup I_p$
   Zu $p_0 = f^t(p)$ existiert nach Satz 4.2 eine Umgebung V von p_0, $\quad \varepsilon > 0$, so dass $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \subseteq \mathcal{D}$ und $f|_{]-\varepsilon,\varepsilon[\times V}$ glatt ist.

   Sei $s \in A$ mit $|s - t| < \varepsilon$ und $f^s(p) \in V$.
   $s \overset{\Rightarrow}{\in} A \quad \exists W$ um p in M, so dass $U =]-\delta, \delta[\times W \subseteq \mathcal{D}$ und $f|_U$ glatt ist.
   Setze $W' := \{q \in Q | f^s(q) \in V\}$. Für alle $q \in W'$ gilt: $]-\delta, s+\varepsilon[\in I_q$, da

   $$f^r(q) = \begin{cases} f^r(q) & -\delta < r < s + \delta \\ f^{r-s}(f^s(q)) & -\varepsilon < r - s < \varepsilon \end{cases}$$

   eine Integralkurve durch q definiert.
   $\Rightarrow U' =]-\delta, s+\varepsilon[\times W' \subseteq \mathcal{D}$ und $f|_{U'}$ glatte Abb, aber $s + \varepsilon > t \quad \Rightarrow \quad t \in A$.

$\Rightarrow \quad A = [0, \infty[\cap I_p$
Analoges Argument für $]-\infty, 0]$.
$\Rightarrow \quad \mathcal{D}$ ist offen und f ist glatt.

$\square$

Sei umgekehrt $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ offen und $f : \mathcal{D} \to M$ ein glatter Fluss (d.h. $f(s, f(t,p)) = f(s+t,p)$ und $f(0,p) = p$), dann ist

$$X(p) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=0} (t \mapsto f^t(p)) \tag{4.4}$$

ein Vektorfeld auf M und f ist der Fluss von X.

$$\begin{aligned}\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} (s \mapsto f(s+t,p))\right] &= \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} (s \mapsto f(s, f(t,p)))\right] \\ &= X(f(t,p))\end{aligned}$$

X heißt *Erzeuger* von f.
Sei $h :\to N$ ein Diffeomorphismus $X \in V(M), Y \in V(N)$. Dann ist:

$$\begin{aligned} h_*X(q) &:= \mathrm{d}\,h|_{h^{-1}(q)} X(h^{-1}(q)) && \text{push-forward} \\ h^*Y(p) &:= \mathrm{d}\,h^{-1}|_{h(p)} Y(h(p)) && \text{pull-back}\end{aligned}$$

Satz 4.6. *Sei $f : \mathcal{D}_X \to M$ der Fluss von X. Dann ist $\mathcal{D}_{h_*X} := \{(t,q) \in \mathbb{R} \times N | (t, h^{-1}(q)) \in \mathcal{D}_X\}$ und $(t,q) \mapsto h(f^t(h^{-1}(q)))$ ist der Fluss von h_*X.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=0} (t \mapsto h(f^t(h^{-1}(q)))) &= \mathrm{d}\,h|_{f^0(h^{-1}(q))} \left.\frac{\partial}{\partial[t]}\right|_{t=0} f^t(h^{-1}(q)) \\ &= \mathrm{d}\,h|_{h^{-1}(q)} X(h^{-1}(q))\end{aligned}$$

$\square$

4.2 Lie-Ableitung

Seien $X, Y \in V(M), \quad f^t, g^t$ die zugehörigen Flüsse.

Definition 4.7 (Lie-Ableitung). Die *Lie-Ableitung* von Y in Richtung X ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &:= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\mathrm{d}\,f^{-t}(Y(f^t(p)) - Y(p))) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=0} (\mathrm{d}\,f^{-t}(Y(f^t(p))))\end{aligned}$$

Satz 4.8.

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Satz 4.9. $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall p \in M \quad \exists \varepsilon > 0 : g^s(f^t(p)) = f^t(g^s(p)) \quad \forall s, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Definition 4.10. Ein Vektorfeld $X \in V(M)$ heißt *vollständig.* $:\Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_X = \mathbb{R} \times M$, d.h. $\forall p \in M$ ist die maximale Integralkurve auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Bemerkung 4.11. Ist X vollständig, so ist $f^t : M \to M$ für alle t definiert. Also erhalten wir eine Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M), \quad t \mapsto f^t$$

diese erfüllt: $f^{s+t} = f^s \circ f^t$ für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ und $f^0 = \mathrm{id}_M$. Damit ist die obige Abbildung ein Gruppenhomomorphismus und wir erhalten, dass $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen darstellt (dynamisches System).

Lemma 4.12. *Sei $c_p : [0, b[\to M$ eine Integralkurve durch $p = c(0)$.*
Nehme an $\exists t_n \in [0, b[$ mit $t_n \xrightarrow{n \to \infty} b$ und $c_p(t_n) \xrightarrow{n \to \infty} q \in M$.
Dann gilt: $b \in I_p$ und $c_p(b) = q$

Beweis. $q =: p_0$
$\exists \varepsilon > 0, \quad V \subseteq M$ offene Umgebung von p_0, so dass $f :]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \to M$ definiert ist.
Sei t_n so groß, dass $c(t_n) \in V$ und $b - t_n < \varepsilon$.
Dann ist

$$\sigma(t) := \begin{cases} f^t(p) & 0 \leq t < b \\ f^{t-t_n}(f^{t_n}(p)) & -\varepsilon < t - t_n < \varepsilon \end{cases}$$

eine Integralkurve von X mit $\sigma(t) = f^t(p) = c_p(t) \quad \forall t \in [0, b[$.
Nun ist $0 < b - t_n < \varepsilon$, also $b \in I_p$, also $\sigma(b) = q = f^b(p)$. $\square$

Korollar 4.13. *Sei $X \in V(M)$ mit $\mathrm{supp}(X) \subseteq M$ kompakt. Dann ist X vollständig.*
Insbesondere sind Vektorfelder auf kompakten Mannigfaltigkeiten vollständig.

5 Semi-Riemannsche Metriken

5.1 Bilinearformen

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform $B : V \times V \to \mathbb{R}$ ist *nicht entartet*, wenn

$$B(v,w) = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0$$

Der *Index* von B ist die Dimension des maximalen Unterraums, auf dem B negativ definit ist. Es gibt eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$, so dass

$$B(b_i, b_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -1, & i = j \leq k \\ 1, & i = j > k \end{cases}$$

Seien V, W reelle Vektorräume. B_V eine nicht-entartete Bilinearform auf V, $\Phi : W \to V$ eine lineare Abbildung.

$$\Phi^* B_V(w_1, w_2) := B_V(\Phi(w_1), \Phi(w_2))$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf W.

Bemerkung 5.1.

- B_V positiv definit $\Rightarrow \Phi^* B_V$ positiv semidefinit
- b_V positiv definit + Φ injektiv $\Rightarrow \Phi^* B_V$ positiv definit.

Seien B_V auf V und B_W auf W nicht-entartete symmetrische Bilinearformen, dann heißt eine Abbildung $\Phi : W \to V$ *Isometrie*, falls $\Phi^* B_V = B_W$.

5.2 Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition 5.2. Eine *Semi-Riemannsche Metrik* auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Familie $g = (g_p)_{p \in M}$ von nicht-entarteten, symmetrischen Bilinearformen

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

die glatt von p abhängt, d.h. für alle $X, Y \in V(M)$ ist

$$g_\cdot(X(\cdot), Y(\cdot)) : M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$$

glatt in p, für jedes $p \in M$.
Eine Semi-Riemannsche Metrik ist *Riemannsch*, wenn g für jedes $p \in M$ positiv definit ist.
Eine Semi-Riemannsche Metrik heißt *Lorentz-Metrik*, wenn Index(g_p)=1 für jedes $p \in M$.

In lokalen Koordinaten:
Sei (x, U) eine Karte von M. Dann ist $(X_1, \dots, X_n)$, $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ eine lokale Basis von $T_pM|_U$.

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto g_p(X_i(p), X_j(p))$$

Die Matrix $(g_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt *Fundamentalmatrix der Semi-Riemannschen Metrik* g bzgl. (x, U).

Transformationsregel:

$$g_{ij}(y) = \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial(x^k \circ y^{-1})}{\partial y^i}\bigg|_{y(p)} \frac{\partial(x^l \circ y^{-1})}{\partial y^j}\bigg|_{y(p)} g_{ij}(x)$$

Beispiele 5.3.

1. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit der euklidischen Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{eukl}}$ bildet eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.
   Allgemeiner bildet der $\mathbb{R}^n$ mit jeder nicht-entarteten, symmetrischen Bilinearform $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit.

2. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge oder $x : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Man definiert den kanonischen Isomorphismus

   $$\Phi_p := \mathrm{d}\, x|_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$$

   und

   $$g_p := \Phi_p^* B,$$

   wobei B eine beliebige nicht-entartete, symmetrische Bilinearform des $\mathbb{R}^n$ darstellt. Wählt man als Karte $(\hat{x}, U) = (\mathrm{id}, M)$.

   $$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right) \\ &= \Phi^*(B)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right) \\ &= B\left(\mathrm{d}\, x|_p \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \mathrm{d}\, x|_p \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right) \\ &= B(e_i, e_j) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow g_{ij}$ ist konstant $\Rightarrow g$ ist glatt.

3. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{eukl}}$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+k}$.
   $\Phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine lineare, injektive Abbildung.
   Setze $g_p := \Phi_p^*\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{eukl}}$. Dann ist g_p positiv definit.
   $g = (g_p)$ ist eine Riemannsche Metrik auf M, sie heißt *1. Fundamentalform.*

Die Fundamentalmatrix (g_{ij}) ist lokal invertierbar,$(g^{ij})_{i,j}$ bezeichnet die inverse Matrix und die $g^{ij} : U \to \mathbb{R}$ sind glatt.

Definition 5.4. Der Dualraum $(T_pM)^* =: T_p^*M$ heißt *Cotangentialraum.*
Durch Wahl einer lokalen Karte kann analog zum Tangentialraum eine Basis des Cotangentialraums gefunden werden.

Sei (x, U) eine Karte von M.

$$\begin{aligned} x : U &\to \mathbb{R}^n \\ \mathrm{d}\, x|_p : T_pM &\to \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R} \\ \mathrm{d}\, x_i|_p : T_pM &\to \mathbb{R} \quad \in T_p^*M \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\mathrm{d}\, x_1|_p, \ldots, \mathrm{d}\, x_n|_p)$ ist die duale Basis zu $(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p)$.
Bezüglich dieser Basis gilt nun:

$$g_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, \mathrm{d}\, x^i \otimes \mathrm{d}\, x^j$$

Seien $X, Y \in V(M)$ mit Hauptteilen $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ bzw. $(\eta^{\cdot} \ldots, \eta^n)$ bzgl. (x, U), d.h. $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$.

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= g\left(\sum_{i=1}^n \xi^i X_i, \sum_{j=1}^n \eta^j X_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi^i \eta^j \end{aligned}$$

Bezüglich der Basis $(\mathrm{d}\, x^1, \ldots, \mathrm{d}\, x^n)$ des Cotangentialraums und Vektorfeldern X, Y wie oben:

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, \mathrm{d}\, x^i \otimes \mathrm{d}\, x^j \left(\sum_{k=1}^n \xi^k X_k, \sum_{l=1}^n \eta^l X_l\right) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n g_{ij} \xi^k \eta^l \delta_k^i \delta_j^l \\ &= \sum_{i,j}^n g_{ij} \xi^i \eta^j \end{aligned}$$

So wie wir $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ die Struktur einer $2n$-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit gegeben haben, können wir dies auch für $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ tun.
Bezüglich dieser differenzierbaren Struktur ist dieProjektion $\pi : T^*M \to M, \quad (p, v) \mapsto p$ glatt.

Definition 5.5. Eine glatte Abbildung $\Phi : M \to T^*M$ mit $\pi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$ heißt *1-Form* auf M. $\Omega^1(M) =$ glatte 1-Formen auf M.

Lemma 5.6. *Auf einer Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es eine 1-1 Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und 1-Formen* $V(M) \xleftrightarrow{1-1} \Omega^1(M), \quad X \mapsto g(X, \cdot)$

Beweis. $T_pM \to T_p^*M, \quad v \mapsto g_p(v, \cdot)$ gibt einen Isomorphismus zwischen $T_pM \cong T_p^*M$, d.h. das einzige, was wir zeigen müssen, ist, dass X genau dann glatt ist, wenn $g(X, \cdot)$ glatt ist.
In lokalen Koordinaten: $X = \sum_{i=1}^n \xi^i X_i$. Sei weiterhin $Z \in V(M)$ beliebig, $Z = \sum_{j=1}^n \eta^j X_j$.
Sei $\varphi \in \Omega^1(M) \Rightarrow$ in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi_k \,\mathrm{d}\, x^k$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} g(X, Z) &= g\left(\sum_{i=1}^n \xi^i X_i, \sum_{j=1}^n \eta^j X_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi^i \eta^j \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \varphi(Z) &= \sum_{k=1}^n \varphi_k \,\mathrm{d}\, x^k \left(\sum_{j=1}^n \eta^j X_j\right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \varphi_k \eta^j \,\mathrm{d}\, x^k(X_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \varphi_j \eta^j \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} \xi^i$$

Damit ist φ glatt. □

5.3 Isometrien

Definition 5.7. Seien (M, g_M), (N, g_N) Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten.
Ein lokaler Diffeomorphismus $f : M \to N$ heißt *lokale Isometrie*, falls für alle $p \in M$

$$\mathrm{d}\, f_p^* g_N|_{f(p)} = g_M|_p,$$

d.h. für alle $v_1, v_2 \in T_pM$:

$$\begin{aligned} g_M|_p(v_1, v_2) &= \mathrm{d}\, f_p^* g_N|_{f(p)}(v_1, v_2) \\ &= g_N|_{f(p)}(\mathrm{d}\, f_p v_1, \mathrm{d}\, f_p v_2) \end{aligned}$$

Definition 5.8. Ist f ein Diffeomorphismus und eine lokale Isometrie, so nennt man f eine *Isometrie*

Bemerkung 5.9. Seien M eine Mannigfaltigkeit, (N, g_N) eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Dann ist f^*g_N eine Semi-Riemannsche Metrik auf M.

$$(f^*g_N)(p) = \mathrm{d}\, f_p^* g_N|_{f(p)}$$

Dies ist die eindeutige Semi-Riemannsche Metrik auf M bezüglich derer $f : M \to N$ eine lokale Isometrie ist.

Definition 5.10. $\mathrm{Isom}(M, g) := \{f : M \to M | f$ ist eine Isometrie $\}$ heißt *Isometriegruppe*

Beispiele 5.11.

1. $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$
   Im euklidischen Raum können wir für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ $T_p\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizeren und es gilt

   $$(g \cdot\cdot_{\text{eukl}})_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eukl}}$$

   Für Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ muss dann also gelten

   $$\langle \mathrm{d}\, f_p(v), \mathrm{d}\, f_p(w) \rangle_{\text{eukl}} = \langle v, w \rangle_{\text{eukl}} \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

   Das bedeutet aber, dass $\mathrm{d}\, f_p \in O(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \forall v, w \in \mathbb{R}^n : \quad \langle Av, Aw \rangle_{\text{eukl}} = \langle v, w \rangle_{\text{eukl}}\}$ liegen muss.
   Eine Klasse von Abbildungen, die dies erfüllt, ist die Menge der *Euklidischen Bewegungen*. Sie besteht aus allen Abbildungen der Form:

   $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax + b, \qquad A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$$

   Also sind alle Euklidischen Bewegungen in der Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ enthalten

2. $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{mink}})$
   Hier lässt sich in analoger Weise obige Rechnung durchführen und wir erhalten, dass die Differentiale aller Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bzgl. der Minkowski-Metrik in $O(1, n) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \forall v, w \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad \langle Av, Aw \rangle_{\text{mink}} = \langle v, w \rangle_{\text{mink}}\}$ liegen müssen.
   Auch hier gibt es wieder eine spezielle Klasse von Abbildungen. Sie werden als *Poincare-Bewegungen* bezeichnet. Zu ihnen gehören alle Abbildungen der Form

   $$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto Ax + b \qquad A \in O(1, n), b \in \mathbb{R}^{n+1}$$

   Klarerweise sind auch hier die Poincare-Bewegungen in der Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{mink}})$ enthalten.

3. (S^n, g_{std})
   Die Sphäre ist über $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x\rangle_{\text{eukl}} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiert. Weiterhin wissen wir bereits, dass $T_xS^n \cong x^\perp$ gilt.
   Die Standardmetrik g_{std} wird durch die 1. Fundamentalform definiert und ist in diesem Fall einfach die Einschränkung des Euklidischen Skalarprodukts des $\mathbb{R}^{n+1}$ auf $x^\perp$.
   Auch hier können wir die Abbildungen

   $$f : S^n \to S^n, \quad x \mapsto Ax \qquad A \in O(n+1)$$

   betrachten. Die Wohldefiniertheit folgt aus der Tatsache, dass

   $$\langle f(x), f(x)\rangle_{\text{eukl}} = \langle Ax, Ax\rangle_{\text{eukl}} = \langle x, x\rangle_{\text{eukl}} = 1$$

   gilt. Weiterhin ist für $u, v \in x^\perp$

   $$\begin{aligned} g_{\text{std}}(\mathrm{d}\, f_{f(x}u, \mathrm{d}\, f_{f(x)}v)|_{f(x)} &= \langle Au, Av\rangle_{\text{eukl}} \\ &= \langle u, v\rangle_{\text{eukl}} \\ &= g_{\text{std}}(u, v)|_x \quad \text{und} \\ \langle Ax, Av\rangle_{\text{eukl}} &= \langle x, v\rangle_{\text{eukl}} = 0 \end{aligned}$$

   Also gilt auf des Sphäre: $O(n+1) \subseteq \text{Isom}(S^n, g_{\text{std}})$.

5.4 Zusammenhänge

Definition 5.12 (Zusammenhang). Sei M eine Mannigfaltigkeit.
Ein *Zusammenhang* oder *kovariante Ableitung* auf M ist eine Abbildung

$$\nabla : V(M) \times V(M) \to V(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla(X, Y) =: \nabla_X Y$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$ (Linearität im zweiten Argument)
2. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$ (Linearität im ersten Argument)
3. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ ($\mathcal{F}(M)$-Linearität, tensoriell)
4. $\nabla_X(f \cdot Y) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ (derivativ)

$\nabla_X Y$ heißt dann kovariante Ableitung von Y in Richtung X. ∇ heißt Zusammenhang.

Bemerkung 5.13. Die *Torsion* des Zusammenhangs ∇ ist definiert als

$$T : V(M) \times V(M) \to V(M), \quad T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Die *Krümmung* des Zusammenhangs ∇ ist definiert als

$$R : V(M) \times V(M) \times V(M) \to V(M), \quad R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Definition 5.14. Eine Mannigfaltigkeit M der Dimension n heißt *parallelisierbar*, falls $X_1, \dots, X_n \in V(M)$ existieren, die in jedem Punkt $p \in M$ linear unabhängig sind.

Beispiele 5.15.

1. $\mathbb{R}^n$, $x = \text{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
   $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$

2. S^1, S^3, S^7

Sei M eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit, dann definiert $X, Y \in V(M), Y = \sum_{i=1}^n \eta^i X_i$,

$$\nabla_X Y := \sum_{i=1}^n X(\eta^i) X_i$$

einen Zusammenhang auf M.

Eigenschaften:

- $\nabla_X X_i = 0$
- $T(X_i, X_j) = -[X_i, X_j]$
- $R(X, Y)Z = 0$, denn

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= R(X,Y)\left(\sum_{i=1}^n (\varphi^i X_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_X Y(\varphi^i) X_i - \nabla_Y X(\varphi^i) X_i - [X,Y](\varphi^i) X_i \\
&= \sum_{i=1}^n X(Y(\varphi^i)) X_i - Y(X(\varphi^i)) X_i - [X,Y](\varphi^i) X_i \\
&= \sum_{i=1}^n [X,Y](\varphi^i) X_i - [X,Y](\varphi^i) X_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

Für $\mathbb{R}^n$ mit $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ heißt dieser Zusammenhang der *kanonische Zusammenhang* auf $\mathbb{R}^n$.

Satz 5.16. *Sei (M, g) eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf M genau einen Zusammenhang*

$$D : V(M) \times V(M) \to V(M)$$

mit

1. $T(X, Y) = 0$ *(torsionsfrei bzw. symmetrisch)*

2. $Xg(Y,Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$ *(metrisch)*

für alle $X, Y, Z \in V(M)$.
Dieser Zusammenhang erfüllt die Koszul-Formel*:*

$$2g(D_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]) \tag{K}$$

und ist eindeutig durch diese bestimmt.

Beweis. Wir beweisen zunächst:
Gegeben D mit 1. & 2. $\Rightarrow$ (K) gilt und (K) bestimmt D eindeutig.

Aus 2. folgt:

$$\begin{aligned}
Xg(Y,Z) &= g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \\
Yg(X,Z) &= g(D_Y X, Z) + g(X, D_Y Z) \\
Zg(X,Y) &= g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y)
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,y) &= g(D_X Y + D_Y X, Z) + g(D_X Z - D_Z X, Y) \\
&\quad + g(D_Y Z - D_Z Y, X) \\
&\overset{1.}{=} 2g(D_X Y, Z) - g([X,Y],Z) + g([X,Z],Y) \\
&\quad + g([Y,Z],X)
\end{aligned}$$

Also:

$$2g(D_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y])$$

$\Rightarrow$ ((K)) gilt.
Wegen Lemma 5.6 (1-1 Korrespondenz $V(M) \leftrightarrow$ 1-Formen ($\Omega^1(M)$)) ist D eindeutig bstimmt.

Nun sei $D_X Y$ das Vektorfeld, das durch die Koszul-Formel und Lemma 5.6 definiert ist. Dann ist $D_X Y$ ein glattes Vektorfeld.
Es bleibt zu zeigen, dass $(X,Y) \mapsto D_X Y$ ein Zusammenhang ist.

1. $\mathbb{R}$-Linearität ist klar, da die rechte Seite von ((K)) in X und Y $\mathbb{R}$-linear ist.

2. tensoriell:

$$\begin{aligned}
2g(D_{\varphi X} Y, Z) &= (\varphi X)g(Y,Z) + Yg(\varphi X, Z) - Zg(\varphi X, Y) \\
&\quad - g(\varphi X, [Y,Z]) - g(Y, [\varphi X, Z]) + g(Z, [\varphi X, Y]) \\
&= \varphi Xg(Y,Z) + Y(\varphi)g(X,Z) + \varphi Yg(X,Z) \\
&\quad - Z(\varphi)g(X,Y) - \varphi Zg(X,Y) - \varphi g(X,[Y,Z]) - \varphi g(Y,[X,Z]) \\
&\quad + Z(\varphi)g(Y,X) + \varphi g(Z,[X,Y]) - Y(\varphi)g(Z,X) \\
&= \varphi \cdot 2g(D_X Y, Z) \\
&= 2g(\varphi D_X Y, Z)
\end{aligned}$$

$\overset{\forall Z}{\Rightarrow} D_{\varphi X}Y = \varphi D_X Y$

3. derivativ:

$$\begin{aligned}
2g(\varphi D_X Y, Z) &= Xg(\varphi Y, z) + (\varphi Y)g(X,Z) - Zg(X,\varphi Y) \\
&\quad - g(X,[\varphi Y, Z]) - g(\varphi Y,[X,Z]) + g(Z,[X,\varphi Y]) \\
&= X(\varphi)g(Y,Z) + \varphi Xg(Y,Z) + \varphi Yg(X,Z) - Z(\varphi)g(X,Y) \\
&\quad - \varphi Zg(X,Y) - \varphi g(X,[Y,Z]) + Z(\varphi)g(X,Y) \\
&\quad - \varphi g(Y,[X,Z]) + \varphi g(Z,[X,Y]) + X(\varphi)g(Z,Y) \\
&= 2g(X(\varphi)Y + \varphi D_X Y, Z)
\end{aligned}$$

$\overset{\forall Z}{\Rightarrow} D_X \varphi Y = X(\varphi)Y + \varphi D_X Y$

4. torsionsfrei:

$$\begin{aligned}
2g(D_X Y - D_Y X, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\
&\quad - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]) \\
&\quad - Yg(X,Z) - Xg(Y,Z) + Zg(X,Y) \\
&\quad + g(Y,[X,Z]) + g(X,[Y,Z]) - g(Z,[Y,X]) \\
&= 2g([X,Y],Z)
\end{aligned}$$

$\overset{\forall Z}{\Rightarrow} D_X Y - D_Y X = [X,Y]$, d.h. $T(X,Y) = 0$.

5. metrisch:

$$\begin{aligned}
2(g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\
&\quad - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]) \\
&\quad + Xg(Z,Y) + Zg(X,Y) - Yg(X,Z) \\
&\quad - g(X,[Z,Y]) - g(Z,[X,Y]) + g(Y,[X,Z]) \\
&= 2Xg(Y,Z)
\end{aligned}$$

Also $Xg(Y,Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$.

$\square$

Definition 5.17. Der durch Satz 5.16 bestimmte Zusammenhang auf (M,g) heißt *Levi-Civita-Zusammenhang*

Wir wollen einen Zusammenhang in lokalen Koordinaten ausdrücken, insbesondere wollen wir gegeben (x,U) eine Karte und die entsprechende lokale Basis von TM gegeben $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\nabla_{X_i} X_j$ berechnen.
Problem: $X_i \notin V(M)$, sondern $X_I \in V(U)$, d.h. $\nabla_{X_i} X_j$ ist (noch) nicht definiert.

5.5 Lokalisierung von Zusammenhängen

Lemma 5.18. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf M. Sei $p \in M$, $Y_1, Y_2 \in V(M)$ mit $Y_1 = Y_2$ in einer Umgebung U von p.*
Dann gilt: $\nabla_X Y_1(p) = \nabla_X Y_2(p) \quad \forall X \in V(M)$.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U$ und $\varphi = 1$ auf einer Umgebung $V \subseteq U$ von p. Dann gilt: $\varphi \cdot Y_1 = \varphi \cdot Y_2$.

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y_1(p) &= X_p(\varphi) + \varphi(p)\nabla_X Y_1(p) \\
&= \nabla_X(\varphi Y_1)(p) \\
&= \nabla_X(\varphi Y_2)(p) \\
&= X_p(\varphi)Y_2(p) + \varphi(p)\nabla_X Y_2(p) \\
&= \nabla_X Y_2(p)
\end{aligned}$$

d.h. $\nabla : V(M) \times V(U) \to V(U)$ ist wohldefiniert ($U \subseteq M$ offen). □

Lemma 5.19. *Sei $p \in M$, $X_1, X_2 \in V(M)$ mit $X_1(p) = X_2(p)$, dann ist*

$$\nabla_{X_1} Y(p) = \nabla_{X_2} Y(p) \qquad \forall Y \in V(M)$$

5.5.1 Tensorfelder

Die Vektorfelder $V(M)$ auf M bilden einen Modul über $\mathcal{F}(M)$. Definiere nun:

$$\begin{aligned}
V_k(M) &:= \underbrace{V(M) \times \cdots \times V(M)}_{k\text{-mal}} \qquad k \in \mathbb{N} \\
V_0(M) &:= \mathcal{F}(M)
\end{aligned}$$

Damit bilden die $V_k(M)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ auch Moduln über $\mathcal{F}(M)$.

Definition 5.20 (Tensorfeld). Ein *Tensorfeld* vom Typ (r, s) ist eine Abbildung

$$B : V_r(M) \to V_s(M),$$

die in jedem Argument $\mathcal{F}(M)$-linear ist.

Beispiele 5.21.

1. Die Torsion $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ ist ein $(2, 1)$-Tensor.

   Beweis. $T(X, Y) \in V(M)$. Es ist also nur noch die $\mathcal{F}(M)$-Bilinearität zu zeigen.

   $$\begin{aligned}
   T(\varphi X, Y) &= \nabla_{\varphi X} Y - \nabla_Y \varphi X - [\varphi X, Y] \\
   &= \varphi \nabla_X Y - \varphi \nabla_Y X - Y(\varphi)X - \varphi[X, Y] + Y(\varphi)X \\
   &= \varphi T(X, Y)
   \end{aligned}$$

   Für das zweite Argument folgt die Aussage aus $T(X, Y) = -T(Y, X)$. □

2. Die Krümmung $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ ist ein $(3,1)$-Tensor.

Beweis. $R(X,Y)Z \in V(M)$. Es ist also auch hier nur noch die $\mathcal{F}(M)$-Multilinearität zu zeigen.

$$\begin{aligned}
R(\varphi X,Y)Z &= \nabla_{\varphi X}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{\varphi X} Z - \nabla_{[}\varphi X, Y]Z \\
&= \varphi\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(\varphi\nabla_X Z) - \varphi\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{-Y(\varphi)X}Z \\
&= \varphi\nabla_X\nabla_Y Z - \varphi\nabla_Y\nabla_X Z - \varphi\nabla_{[X,Y]}Z - Y(\varphi)\nabla_X Z + Y(\varphi)\nabla_X Z \\
&= \varphi R(X,Y)Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\varphi Z &= \nabla_X\nabla_Y(\varphi Z) - \nabla_Y\nabla_X(\varphi Z) - \nabla_{[X,Y]}(\varphi Z) \\
&= \nabla_X(\varphi\nabla_Y Z) + \nabla_X(Y(\varphi)Z) - \nabla_Y(\varphi\nabla_X Z + X(\varphi)Z) \\
&\quad - \varphi\nabla_{[X,Y]}Z - [X,Y](\varphi)Z \\
&= \varphi\nabla_X\nabla_Y Z + Y(\varphi)\nabla_X Z + X(Y(\varphi))Z - \varphi\nabla_Y\nabla_X Z \\
&\quad + X(\varphi)\nabla_Y Z - \varphi\nabla_{[X,Y]}Z - [X,Y](\varphi)Z - Y(\varphi)\nabla_X Z - Y(X(\varphi))Z \\
&= \varphi R(X,Y)Z
\end{aligned}$$

Für das zweite Argument gilt erneut: $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$. □

Lemma 5.22. *Sei $L : V_r(M) \to V_s(M)$ ein Tensorfeld. Dann gilt:*

$$L(X_1,\dots,X_r)(p) = L(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_r)(p),$$

falls $X_i(p) = \tilde{X}_i(p)$.

Beweis. o.E.: $r = 1$ (allgemein durch Induktion), d.h. $L : V(M) \to V_s(M)$.
Sei $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U$, U eine Umgebung von p. Sei weiterhin $\varphi = 1$ auf $V \subseteq U$ eine Umgebung von p.
Sei (x,U) eine Karte um p. Seien $X_i(q) := \varphi(q)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_q$ $q \in U$, $i = 1,\dots n$.
Wähle nun noch $X, \tilde{X} \in V(M)$ mit $X(p) = \tilde{X}(p)$. Schreibe:

$$\begin{aligned}
\varphi X &= \sum_{i=1}^n \xi^i X_i \\
\varphi\tilde{X} &= \sum_{i=1}^n \eta^i X_i
\end{aligned}$$

und damit gilt auch: $\xi^i(p) = \eta^i(p)$.

Berechnen nun:

$$\begin{aligned}
L(X)(p) &= \varphi(p)(X)(p) \\
&= (\varphi L(X))(p) \\
&= L(\varphi X)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi^i(p) L(X_i)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \eta^i(p) L(X_i)(p) \\
&= L(\varphi \tilde{X})(p) \\
&= (\varphi L(\tilde{X}))(p) \\
&= \varphi(p) L(\tilde{X})(p) \\
&= L(\tilde{X})(p)
\end{aligned}$$

□

Interpretation:
Ein Tensorfeld B liefert für jedes $p \in M$ eine r-lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
B_p : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{r} &\to \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{s}, \\
(v_1, \ldots, v_r) &\mapsto B_p(v_1, \ldots, v_r) := B(X_1, \ldots, X_r)(p),
\end{aligned}$$

wobei $X_1, \ldots, X_r \in V(U)$ mit $X_i(p) = v_i \quad \forall i = 1, \ldots, r$.
Umgekehrt liefert eine Familie von r-linearen Abbildungen $(B_p)_{p \in M}$

$$B_p : (T_pM)^r \to (T_pM)^s$$

ein Tensorfeld, sofern B_p glatt von p abhängt, d.h. falls $B.(X_1(\cdot), \ldots, X_r(\cdot)) : M \to (TM)^s$ glatt ist.
Zurück zu Zusammenhängen:
Lemma 5.22 impliziert Lemma 5.19, da für festes Y $\nabla.Y$ ein $(1,1)$-Tensor ist.
Insbesondere können wir die kovariante Ableitung nun als folgende Abbildung definieren:

$$\nabla : V(U) \times V(U) \to V(U)$$

wobei $U \subseteq M$ eine Umgebung ist.
Damit können wir nun ∇ in lokalen Koordinaten ausdrücken.

Sei (x, U) eine Karte von M und $X_1, \ldots, X_n$ die entsprechende lokale Basis von TM. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M.

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$$

Die Funktionen

$$\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$$

heißen *Christoffel-Symbole*.

Seien $X, Y \in V(M)$ mit $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi^i X_i$ und $Y|_U = \sum_{j=1}^n \eta^j X_j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^n \xi^i X_i} \sum_{j=1}^n \eta^j X_j \\
&= \sum_{i,j=1}^n \xi^i \nabla_{X_i} \eta^j X_j \\
&= \sum_{i,j=1}^n \xi^i \left(\eta^j \nabla_{X_i} X_j + X_i(\eta^j) X_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n X(\eta^j) X_j + \sum_{i,j,k=1}^n \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k X_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(X(\eta^k) + \sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k
\end{aligned}$$

Falls ∇ torsionsfrei ist, gilt: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, denn:

$$0 = T(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - \underbrace{[X_i, X_j]}_{=0}$$

Für den Levi-Civita-Zusammenhang auf (M, g) gilt nun Mithilfe der Koszul-Formel:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl} &= g\left(\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k, X_l\right) \\
&= g(\nabla_{X_i} X_j, X_l) \\
&\overset{(\mathrm{(K)})}{=} \frac{1}{2}(X_i g(X_j, X_l) + X_j g(X_i, X_l) - X_l g(X_i, X_j)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})
\end{aligned}$$

Und mit (g^{kl}) die zu (g_{kl}) inverse Matrix folgt:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

5.6 Vektorfelder längs Abbildungen

Definition 5.23. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $f : N \to M$ eine glatte Abbildung. Ein *Vektorfeld längs* f ist eine glatte Abbildung

$$X : N \to TM,$$

so dass $\pi \circ X = f$.
$V_f(M) =$ Vektorfelder längs f.

Beispiele 5.24.

1. $N = M$ und $f = \mathrm{id} \quad \Rightarrow \quad V_f(M) = V(M)$
2. Vektorfelder längs Kurven: $c : I \to M$. Dann ist $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M$, wobei
$$\dot{c} : I \to TM, \quad t \mapsto \dot{c}(t) = \dot{c}_t(0),$$
wobei $c_t(s) := c(s+t)$.
3. Sei $X \in V(M)$. Dann ist $X \circ f \in V_f(M)$
4. Sei $X \in V(N)$, $f : N \to M$
$f_*X(p) := \mathrm{d}\, f_p X(p) \in T_{f(p)}M$
$f_*X \in V_f(M)$ heißt auch *tangentiales Vektorfeld.*

Gegeben ∇ ein Zusammenhang auf M, wollen wir eine Abbildung

$$\nabla : V(N) \times V_f(M) \to V_f(M)$$

mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

1. $\mathbb{R}$-linear in $V(N)$ und $V_f(M)$
2. derivativ in $V_f(M)$
3. tensoriell in $V(N)$
4. Für $f = \mathrm{id}$ und $M = N$ soll ∇ der usrprüngliche Zusammenhang sein
5. $T(f_*A, f_*B) = \nabla_A f_*B - \nabla_B f_*A - f_*[A,B] \; \forall A, B \in V(N)$
6. $R(f_*A, f_*B)Y = \nabla_A \nabla_B Y - \nabla_B \nabla_A Y - \nabla_{[A,B]} Y \; \forall A, B \in V(N), \quad Y \in V_f(M)$

Diese heißt dann wieder kovariante Ableitung von Y längs X.

Wir definieren $\nabla : V(N) \times V_f(M) \to V_f(M)$ in lokalen Koordinaten:
Seien (x, U) eine Karte von M um $f(p)$, $X_1, \ldots, X_n$ die lokale Basis von TM und $Y \in V_f(M)$.
Dann ist $Y = \sum_{i=1}^n \eta^j X_j$, wobei $\eta^j : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}$.

$$\nabla_X Y := \sum_{k=1}^n X(\eta^k) X_k + \sum_{i,j,k=1}^n \mathrm{d}\, f(X)^i \eta^j \Gamma_{ij}^k X_k$$

Wohldefiniertheit und die Eigenschaften 1. - 4. folgen daraus, dass dies die lokale Form des Zusammenhangs ist.

Nun nutzen wir $\nabla : V(N) \times V_f(M) \to V_f(M)$ um die Parallelverschiebung einzuführen.

6 Parallelverschiebung

Definition 6.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf M.
Sei $c : I \to M$ eine Kurve, dann heißt $X \in V_c(M)$ längs c *parallel*, wenn

$$\nabla_t X := \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X \equiv 0$$

Sei (x, U) eine Karte auf M um $p = c(t_0)$ und $X_1, \ldots, X_n$ die zugehörige lokale Basis von TM.
$X = \sum_{i=1}^n \xi^i X_i, \quad \xi^i : c^{-1}(U) \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}\, c_{t_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \dot{c}(t_0) = \sum_{i=1}^n \dot{c}^i X_i$

$$\boxed{\nabla_t X = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t}(\xi^k) X_k + \sum_{i,j,k=1}^n \dot{c}^i \xi^j \Gamma_{ij}^k X_k}$$

d.h.: $\forall k = 1, \ldots, n$

$$-\dot{\xi}^k = \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i \xi^i \Gamma_{ij}^k \tag{6.1}$$

Das ist ein System linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Satz 6.2. *Sei $t_0 \in I$ und $X_0 \in T_{c(t_0)}M$.*
Dann gibt es genau ein paralleles Vektorfeld $X \in V_c(M)$ mit $X(t_0) = X_0$.

Beweis.

Fall 1: $c(I) \subseteq U$, wobei U eine Kartenumgebung von M ist.
Dann folgt die Behauptung aus Existenz und Eindeutigkeit für die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung (6.1) mit Anfangsbedingung $\xi^i(t_0) = \xi_0^i$, wobei $X_0 = \sum_{i=1}^n \xi_0^i X_i$.

Fall 2: $c(I) \nsubseteq$ Kartenumgebung.
Sei $\cdots < a_2 < a_1 < t_0 < b_1 < b_2 < \ldots$ mit $a_i \to a$ und $b_i \to b$ für $i \to \infty$, wobei $I =]a, b[$.
Nun ist c insbesondere eine stetige Abbildunge, d.h. $c([a_i, b_i])$ ist kompakt und wir können ein endliche offene Überdeckung $U_1^i, \ldots, U_N^i$ durch Kartenumgebungen finden , so dass $U_j^i \cap c([a_i, b_i])$ zusammenhängend ist. Wir können nach entsprechender Umnummerierung ohne Einschränkung annehmen, dass $c(t_0) \in U_1^1$ liegt. Nun ist aber Fall 1 auf das Kurvenstück, das in U_1^1 liegt anwendbar und wir erhalten ein $X^1 \in V_c(U_1^1)$ mit $\nabla_t X^1 \cong 0$ und $X^1(t_0) = X_0$.
Nun wählen wir ein $t_1 \in [a_1, b_1]$, so das s$c(t_1) \in U_1 \cap U_2$ und setzen als neue Anfangsbedingung $X_1 := X^1(t_1) \in T_{c(t_1)}M$. Fall 1 gibt uns erneut ein Vektorfeld $\tilde{X}^1 \in V_c(U_2)$ mit $\nabla_t \tilde{X}^1 \cong 0$ und $\tilde{X}^1(t_1) = X_1 = X(t_1)$. Das bedeutet aber, dass wir X^1 einfach durch

$\tilde{X}^1$ auf U_2 fortsetzen können.
Diesen Prozess liefert uns nach endlich vielen Schritten das gewünschte Vektorfeld X^1 auf ganz $[a_1, b_1]$.
Andererseits können wir die obige Iteration natürlich auch auf jedem beliebigen $[a_i, b_i]$ aus führen und erhalten somit auf all diesen kompakten Intervallen unser gewünschtes Vektorfeld X^i.
Da $]a, b[= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i]$ gilt, könnten wir nun $X \in V_c(X)$ einfach darüber definieren, dass für ein $t \in]a, b[$ ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $t \in [a_i, b_i]$ und dann $X(t) := X^i(t)$.
Dass diese Definition tatsächlich wohldefiniert ist, wollen wir im letzten Schritt zeigen:
Seien $X, \tilde{X}$ zwei Lösungen von $\nabla_t X \equiv 0$ auf I mit $X(t_0) = \tilde{X}(t_0) = X_0$.

$$\begin{aligned} I_{\text{gut}} &= \{t \in I | X(t) = \tilde{X}(t)\} \neq \varnothing \quad \text{ist abgeschlossen} \\ I_{\text{schlecht}} &= \{t \in I | X(t) \neq \tilde{X}(t)\} \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: I_{gut} ist offen.
Wähle dazu eine Karte (x, U) um $c(t)$, dann gilt nach Fall 1: $X(s) = \tilde{X}(s)$ für alle $s \in c^{-1}(U)$, wobei $c^{-1}(U)$ eine offene Umgebung um t darstellt.
Nun gilt $I = I_{\text{gut}} \dot{\cup} I_{\text{schlecht}}$ und damit $I = I_{\text{gut}}$, da I zusammenhängend ist.

□

Definition 6.3 (Parallelverschiebung).
Sei $c : [a, b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve mit $p = c(a)$ und $q = c(b)$. Sei $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ eine Unterteilung von $[a, b]$, so dass $c|[t_i, t_{i+1}]$ glatt ist.
Dann ist die *Parallelverschiebung* $P_c : T_pM \to T_qM$ entlang c definiert durch:
Sei $v \in T_pM$, dann sei $X \in V_c(M)$ das eindeutige Vektorfeld längs c mit $X(a) = v$ und $0 \equiv \nabla_t X$ auf $[t_i, t_{i+1}]$ für alle $0 \leq i \leq n-1$.
Setze dann $P_c(v) := X(b)$.

Bemerkung 6.4.

1. P_{c,t_0,t_1} ist linear und invertierbar, weiterhin gilt: $P_{c,t_0,t_2} = P_{c,t_1,t_2} \circ P_{c,t_0,t_1}$
2. Die Parallelverschiebung hängt vom Weg c ab (z.B. auf S^2).

Satz 6.5. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, ∇ ein Zusammenhang, $c : I \to M$ glatt und $X \in V_c(M)$. Dann gilt:*

$$\nabla_t X(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{c,t,t_0}(X(t)) - X(t_0)}{t - t_0}$$

Beweis. Sei $e_1(t_0), \ldots, e_n(t_0) \in T_{c(t_0)}M$ eine Basis. Seien $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ die zugehörigen parallelen Vektorfelder entlang c.
Dann sind $(e_j(t))_{j=1,\ldots,n}$ Basen von $T_{c(t)}M$ und $X(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j(t) e_j(t)$.

Für die rechte Seite gilt nun:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\frac{P_{c,t,t_0}(X(t))-X(t_0)}{t-t_0} &= \lim_{t\to t_0}\frac{\sum_{j=1}^n \xi^j(t)P_{c,t,t_0}(e_j(t))-\sum_{j=1}^n \xi^j(t_0)e_j(t_0)}{t-t_0}\\ &= \lim_{t\to t_0}\sum_{j=1}^n \frac{\xi^j(t)-\xi^j(t_0)}{t-t_0}e_j(t_0)\\ &= \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\xi^i e_j(t_0)\\ &= \sum_{j=1}^n \dot{\xi}^j(t_0)e_j(t_0)\end{aligned}$$

Für die linke Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned}\nabla_t X(t_0) &= \nabla_t\left(\sum_{j=1}^n \xi^j(t_0)e_j(t_0)\right)\\ &= \sum_{j=1}^n\left[\left(\mathrm{d}\,c\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\xi^j)e_j\right)(t_0)+\xi^j(t_0)\underbrace{\nabla_t e_j}_{=0}(t_0)\right]\\ &= \sum_{j=1}^n \dot{\xi}^j(t_0)e_j(t_0)\end{aligned}$$

□

Satz 6.6. *Sei (M,g) eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Sei $c: I\to M$ eine stückweise glatte Kurve. Dann ist*

$$P_{c,t_0,t_1}:(T_{c(t_0)}M,g_{c(t_0)})\to(T_{c(t_1)}M,g_{c(t_1)})$$

eine lineare Isometrie.

Beweis. Für den Levi-Civita-Zusammenhang gilt:

$$Zg(X,Y)=g(\nabla_Z X,Y)+g(X,\nabla_Z Y)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,c\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(X,Y) &= g(\underbrace{\nabla_t X}_{=0},Y)+g(X,\underbrace{\nabla_t Y}_{=0})\\ &= 0\end{aligned}$$

wobei $X_0, Y_0\in T_{c(t_0)}M$ und X,Y die parallelen Vektorfelder.
Dies bedeutet nun aber, dass $g_{c(t)}(X(t),Y(t))=\text{const.}$
$\Rightarrow\quad g_{c(t_1)}(X(t_1),Y(t_1))=g_{c(t_0)}(X(t_0),Y(t_0))$ □

6.1 Parallelverschiebung und Krümmung

Sei M eine Mannigfaltigkeit, ∇ ein Zusammenhang und $c : I \to M$ mit $c(0) = c(1)$. Dann ist

$$P_{c,0,1} : T_pM \to T_pM$$

Definiere nun

$$Hol_p(\nabla) := \{P_c \in GL(T_pM) | c \text{ Schleife in } p\}$$

die Holonomiegruppe.

¨Der Krümmungstensor ist ein Maß für die infinitesimale Abhängigkeit der Parallelverschiebung vom Weg. ¨

$$R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM, \quad (u, v, w) \mapsto R_p(u, v)w$$

Seien $u, v \in T_pM$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung mit $0 \in U$ und $f : U \to M$ glatt mit $\mathrm{d} f_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = u$ und $\mathrm{d} f_0 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = v$.

Sei $c_t : [0, 4t] \to M$ die Kurve definiert durch

$$c_t(s) := \begin{cases} f(s, 0) & 0 \leq s \leq t \\ f(t, s - t) & t \leq s \leq 2t \\ f(3t - s, t) & 2t \leq s \leq 3t \\ f(0, 4t - s) & 3t \leq s \leq 4t \end{cases}$$

Sei $w \in T_pM$ und W_t das parallele Vektorfeld längs c_t,das durch w bestimmt ist.
Dann gilt:

$$-R_p(u, v)w = \lim_{t \to 0} \frac{W_t(4t) - w}{t^2}$$

Sei W das Vektorfeld längs f, das folgendes erfüllt:

- $W(0, 0) = w$
- $W(\cdot, 0) =$ Vektorfeld parallel längs $f(\cdot, 0)$
- $W(t, \cdot) =$ Vektorfeld parallel längs $(t, \cdot)$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} R(u, v)w &= \nabla_X \underbrace{\nabla_Y}_{=0} W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{\underbrace{[X, Y]}_{=0}} W \\ &= -\nabla_Y \nabla_X W \end{aligned}$$

wobei $X := \frac{\partial}{\partial x}$ und $Y := \frac{\partial}{\partial y}$. Sei $e_1, \ldots, e_n \in T_pM$ eine Basis. Seien $e_j(x, y)$ Vektorfelder längs f mit

- $e_j(0,0) = e_j$
- $e_j(0,\cdot) =$ paralleles Vektorfeld längs $f(0,\cdot)$
- $e_j(\cdot,\tau) =$ paralleles Vektorfeld längs $f(\cdot,\tau)$.

Dann ist $(e_j(x,y))_{j=1,\dots,n}$ eine Basis von $T_{f(x,y)}M$.
Schreibe nun $W(x,y) = \sum_{j=1}^n \xi^j(x,y)e_j(x,y)$. Damit gilt nun: $\frac{\partial}{\partial x}\xi^j(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\xi^j(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi^j(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\xi^j(0,0) = 0$

$$\begin{aligned}
-\nabla_Y\nabla_X W|_{(0,0)} &= -\nabla_Y\nabla_X \left(\sum_{j=1}^n \xi^j(x,y)e_j(x,y)\right)\Bigg|_{(0,0)} \\
&= -\sum_{j=1}^n \nabla_Y \left(\frac{\partial}{\partial x}\xi^j e_j + \xi \underbrace{\nabla_X e_j}_{=0}\right) \\
&= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\xi^j\right)\Bigg|_{(0,0)} e_j + \underbrace{\nabla[]\xi^j(0,0)}_{=0}\nabla_Y e_j \\
&= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\xi^j(x,y)\right)\Bigg|_{(x,y)=(0,0)} e_j(0,0)
\end{aligned}$$

Und damit:

$$\lim_{t\to 0}\frac{W_t(4t)-w}{t^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\xi^j(0,0)e_j(0,0)$$

7 Geodätische

Definition 7.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf M.
Eine glatte Kurve $c : I \to M$ heißt *Geodätische*, wenn

$$\nabla_t \dot{c} \equiv 0$$

Wähle (x, U) eine Karte von M und $X_1, \dots, X_n$ eine lokale Basis von TM. Schreibe $c^k := x^k \circ c : I \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{c}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} \dot{c}^k(t) X_k(c(t)) + \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(c(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) X_k(c(t)) \end{aligned}$$

Wir erhalten so ein System gewöhnlicher, nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\boxed{0 = \ddot{c}^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \dot{c}^i \dot{c}^j} \tag{7.1}$$

Beispiele 7.2. Wir wollen für einige Mannigfaltigkeiten Geodätische berechnen.

1. $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$
   Die euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ ist konstant, was zur Folge hat, dass die Ableitung der Fundamentalmatrix (g_{ij}) verschwindet, d.h. $\partial_k g_{ij} = 0$ für jedes $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.
   Das bedeutet aber für die Christoffel-Symbole

   $$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = 0$$

   Das heißt unsere Gleichung (7.1) vereinfacht sich zu $\ddot{c}^k = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Also $\dot{c}^k = \text{const.}$ und insgesamt ergibt sich:

   $$c(t) = v \cdot t + p$$

   Also sind die Geodätischen im euklidischen Raum gerade die Geraden.

2. $(\mathbb{R}^n, g_{\text{mink}})$
   Auch im Minkowski-Raum ist die Metrik konstant und die obige Rechnung liefert, dass auch hier die Geraden gerade die Geodätischen sind.

Lemma 7.3. *Sei $c : I \to M$ eine Geodätische, dann ist $\hat{c}(t) = c(\alpha t + \beta)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Geodätische.*

Erinnerung:
Sei (x, U) eine Karte von M. Dann ist $(\bar{x}, \bar{U})$ eine Karte von TM, wobei $\bar{U} := \cup_{p\in U} T_pM = \pi^{-1}(U)$ und $\bar{x}(p,v) := (x(p), \xi)$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n$ der Repräsentant von v in (x, U), d.h. $\xi = \mathrm{d}\, x|_p(v)$.
Sei nun $X_1, \ldots, x_n$ die zu (x, U) gehörige lokale Basis von $TM|_U$. Sei $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_{2n}$ die zu $(\bar{x}, \bar{U})$ gehörige lokalge Basis von $T(TM)|_{\bar{U}}$.
Sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve in M. Dann ist $(c, \xi) : I \to TM, \quad t \mapsto (c(t), \dot{c}(t))$ glatt.

Allgemeiner: eine glatte Kurve in TM lässt sich schreiben als

$$\left(c, \sum_{i=1}^{n} \xi^i (x_i \circ c)\right)$$

wobei $c : I \to M$ eine glatte Kurve ist.

Sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve. Setze $\xi^k = \dot{c}^k$. Dann gilt:

$$(7.1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \xi^k = \dot{c}^k \\ \dot{\xi}^k = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \end{cases}$$

Dies ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Definiere nun folgendes Vektorfeld $S : TM \to T(TM)$ durch

$$S(v) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \bar{X}_k(v) - \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \bar{X}_{n+k}(v)$$

Für $v = (c, \xi)(t)$ und $\xi = \dot{c}$ ergibt sich:

$$S(c, \xi)(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \bar{X}_k((c, \xi)(t)) - \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \bar{X}_{n+k}((c, \xi)(t))$$

Betrachte nun $\hat{c} : I \to TM$ die Integralkurve zu S, d.h. $S(\hat{c}(t)) = \dot{\hat{c}}(t)$

$$S((c, \xi)(t)) = (c, \dot{\xi})(t), \; (c, \dot{\xi})(t) \in TTM \text{ und } (c, \xi)(t) \in TM$$

$$(c, \dot{\xi})(t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{c}^k \bar{X}_k + \sum_{k=1}^{n} \dot{\xi}^k \bar{X}_{n+k}$$

Damit ergibt sich für $\hat{c}$:

$$\xi^k = \dot{c}^k \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

$$\dot{\xi}^k = \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

Das ist genau das System von Differentialgleichungen erster Ordnung, das die Geodätengleichung $\nabla_t \dot{c} = 0$ in lokalen Koordinaten beschreibt.

Bemerkung 7.4.

1. S (definiert a priori nur auf $\bar{U}$ in Abhängigkeit von (x, U)) ist wohldefiniert als globales Vektorfeld: $TM \to TTM$
S hängt vom gewählten Zusammenhang ∇ ab. ($S = S_\nabla \in V(TM)$)

2. Die Integralkurven von S_∇ stehen 1 zu 1 in Korrespondenz mit $(c, \dot{c}) : I \to TM$, wobei $c : I \to M$ eine Geodätische ist.

3. S_∇ heißt *geodätisches Vektorfeld.* Der zugehörige Fluss $f_t : TM \to TM$ heißt *geodätischer Fluss.*

Aus dem Resultat über Vektorfelder und Flüsse folgt:

Satz 7.5. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf M.*
Zu $p \in M$ und $v \in T_pM$ exsistert ein offenes Intervall $I_v \ni 0$ und $c_v : I_v \to m$ eine Geodätische mit $c_v(0) = p$ und $\dot{c}_v(0) = v$.
Sind $c_1 : I_1 \to M$ und $c_2 : I_2 \to M$ Geodätische mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ und $\dot{c}_1(t_0) = \dot{c}_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Dann gilt $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t \in I_1 \cap I_2$.
Insbesondere gibt es für jedes $v \in TM$ ein eindeutiges maximales Intervall I_v und eine maximale Geodätische $c_v : I_v \to M$ mit $\dot{c}_v(0) = v$.
Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_v : I_v \to M$ und $c_{\alpha v} : I_{\alpha v} \to M$. Dann gilt:

$$c_{\alpha v}(t) = c_v(\alpha t), \qquad I_{\alpha v} = \frac{1}{\alpha} I_v$$

Sei $O = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times TM | t \in I_v\}$. Dann ist O offen und $\dot{\gamma}_v(t)$ hängt glatt von t und v ab.
∇ heißt *vollständig*, falls $O = \mathbb{R} \times TM$.
Dies impliziert, dass für alle $p \in M$ und $v \in T_pM$ die Geodätische $c_v : \mathbb{R} \to M$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. (M, ∇) heißt dann *geodätisch vollständig.*

7.1 Die Exponentialabbildung

Sei $\mathcal{D} := \{v \in TM | (1, v) \in O\}$. Dann defineren wir:

$$\exp : \mathcal{D} \subseteq TM \to M, \qquad v \mapsto c_v(1) =: \exp(v)$$

Wenn wir exp einschränken auf T_pM, erhalten wir:

$$\exp_p : \mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_pM \to M, \quad v \mapsto c_v(1)$$

Es gilt $0_p \in \mathcal{D}_p \subseteq T_pM$ und $\exp_p(0_p) = p$. $\mathcal{D}_p$ ist offen, da O offen ist.
Das Differential ist nun eine Abbildung:

$$\mathrm{d}|_{0_p} \exp_p : T_pT_pM \cong T_pM \to T_pM$$

Lemma 7.6. *Das Differential $\mathrm{d}|_{0_p} \exp_p : T_pM \to T_pM$ erfüllt*

$$\mathrm{d}|_{0_p} \exp_p = \mathrm{id}_{T_pM}$$

Beweis. Sei $v \in T_pM$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}|_{0_p} \exp_p &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=0} \exp_p(0_p + t \cdot v) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=0} c_{tv}(1) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=0} c_v(t) \\ &= v \end{aligned}$$

□

Korollar 7.7. *Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung U um $0_p \in T_pM$ und eine Umgebung V um $p \in M$, so dass $\exp_p : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.*

Sei nun (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M.

Lemma 7.8. *Sei $c : I \to (M, g)$ eine Geodätische, dann ist*

$$g(\dot{c}, \dot{c}) : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$$

konstant.

Beweis.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} g(\dot{c}, \dot{c}) = 2g(\underbrace{\nabla_t \dot{c}}_{=0}, \dot{c}) = 0$$

□

Definition 7.9. Sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve. Dann heißt c

1. *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) = 1$,
2. *proportional zur Bogenlänge paramertrisiert*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) = r$, wobei $r > 0$,
3. *nach Eigenzeit paramterisiert*, falls $g(\dot{c}, \dot{;}c) = -1$,
4. *proportional zur Eigenzeit parametrisiert*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) = -r$, wobei $r > 0$ und
5. eine *Nullkurve*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) = 0$.

Bemerkung 7.10. Sei $f : M \to N$ eine lokale Isometrie und sei $c : I \to M$ eine Geodätische, dann ist $f \circ c : I \to N$ eine Geodätische.

7.2 Geodätische auf (S^n, g_{std})

Sei $\varphi : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Definiere

$$\text{Fix}(\varphi) := \{p \in M | \varphi(p) = p\}$$

die Fixpunktmenge von φ.

Satz 7.11. *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und $\varphi : (M, g) \to (M, g)$ eine Isometrie. Sei $p \in \text{Fix}(\varphi)$ und $v \in T_pM$ mit $\mathrm{d}\,\varphi|_p(v) = v$.*
Dann ist die Geodätische $c_v : I_v \to M$ ganz in $\text{Fix}(\varphi)$ enthalten, d.h. $\varphi(c(t)) = c(t)$ für alle $t \in I_v$.

Beweis. Sei $\tilde{c}(t) := \varphi(c(t))$. Da φ eine Isometrie ist, ist $\tilde{c} : I \to M$ eine Geodätische mit

$$\tilde{c}(0) = \varphi(c(0)) = \varphi(p) = p$$
$$\dot{\tilde{c}}(0) = \mathrm{d}\,\varphi|_{c(0)}(\dot{c}(0)) = \mathrm{d}\,\varphi|_p v = v$$

Nach der Eindeutigkeit der Geodätischen folgt: $\tilde{c}(t) = c(t)$, also $\varphi(c(t)) = c(t)$ für alle $t \in I$. □

Wir verwenden nun Satz 7.11 um Geodätische auf S^n zu bestimmen.

Fasse S^n dazu als Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{eukl}})$ auf:
$S^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle p, p\rangle_{\text{eukl}} = 1\}$ und $T_pS^n \cong p^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
Erinnerung: Falls $M := \{p \in N | f(p) = q\}$, wobei $f : N \to \mathbb{R}$ glatt, dann ist

$$T_pM \cong \ker(\mathrm{d}\, f|_p : T_pM \to \mathbb{R})$$

Hier ist nun $f(p) = \langle p, p\rangle$ und $q = 1$ und damit $\mathrm{d}\, f_p(v) = 2\langle p, v\rangle$, was genau zeigt, dass

$$T_pS^n \cong \ker(\mathrm{d}\, f_p) = p^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Die Metrik auf S^n im Punkt p ist nun gerade:

$$g_{\text{std},p}(v, w) = \langle \Phi_p(v), \Phi_p(w)\rangle (= \langle v, w\rangle)$$

wobei $\Phi_p : T_pS^n \to p^\perp$.
Wie wir bereits in Beispiel 5.11 auf Seite 26 gesehen haben ist $O(n + 1) \subseteq \text{Isom}(M, g)$.
Betrachte nun $E := \text{span}\langle p, v\rangle \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ einen 2 dimensionaler Untervektorraum. Sei weiterhin $A_E : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Spiegelung an E. Dann ist $A_E \in O(n + 1)$ und $\text{Fix}(A_E) = E$.
Definiere mit $\varphi_E := A_E|_{S^n} : S^n \to S^n$ eine Isometrie auf S^n. Dann gilt: $\text{Fix}(\varphi_E) = E \cap S^n$.

Daraus folgt, dass die durch p und v bestimmte Geodätische $c_V : I \to M$ in $E \cap S^n$ liegt und c_v ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

Weiterhin sind $p, \Phi_p(v) \in E$, $\langle p, p\rangle = 1$ und $\langle p, \Phi_p(v)\rangle = 0$, d.h. $\left(p, \frac{\Phi_p(v)}{\|v\|}\right)$ ist eine Orthonormalbasis von E.
Setze nun

$$c_v(t) = \cos(\alpha t)p + \sin(\alpha t)\frac{\Phi_p(v)}{\|v\|}$$

Damit gilt $c_v(0) = p$ und es soll gelten $\dot{c}_v(0) = \Phi_p(v)$. Damit ergibt sich

$$\alpha = \|v\| = \|\Phi_p(v)\|$$

d.h.:

$$c_v(t) = \cos(\|v\|t)p + \sin(\|v\|t)\frac{\Phi_p(v)}{\|v\|}$$

Hier gilt nun auch $I_v = \mathbb{R}$ und damit $\exp_p : T_pM \to M$.

Sei $v \in T_pM$ mit $\|v\| = \pi$. Dann gilt:

$$\exp_p(v) = c_v(1) = \cos(\pi)p + \sin(\mathbb{P})\frac{\Phi_p(v)}{\|v\|} = -p$$

und damit ist die Exponentialabbildung nicht injektiv.

$$\ker(\mathrm{d}\exp_p|_v) = \{\eta \in T_vT_pS^n | \Phi_v(\eta) \perp v\}$$

7.3 Geodätische im hyperbolischen Raum

Fasse analog zum Vorgehen bei der S^n H^n als Untermannigfaltigkeit des $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{mink}})$, also: $H^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle p, p\rangle_{\text{mink}} = -1\}$
Auch hier gilt erneut: $T_pH^n \cong p^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $g_{\text{hyp}}(v, w) = \langle\Phi_p(v), \Phi_p(w)\rangle_{\text{mink}}$. Dies ist eine riemannsche Metrik.
Anhand von Beispiel 5.11 auf Seite 26 gilt: $O(1, n) \subseteq \text{Isom}(H^n, g_{\text{hyp}})$.
Sei $p \in H^n$ und $v \in T_pH^n$. Betrachte $E := \text{span}\langle p, \Phi_p(v)\rangle \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$und $A_E \in O(1, n)$ die Spiegelung an E mit $\text{Fix}(A_E) = E$.
Definiere $\varphi_E := A_E|_{H^n}$ mit $\text{Fix}(\varphi_E) = E \cap H^n$.
Damit ergibt sich auch hier, dass die durch p und v bestimmte Geodätische ganz in $E \cap H^n$ liegt.

7.4 Riemannsche Normalkoordinaten

Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und $E_1, \ldots, E_n \in (T_pM, g_p)$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis, d.h.

$$g_p(E_i, E_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}, \qquad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$$

Sei $A : \mathbb{R}^n \to T_pM, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$ der zugehörige lineare Isomorphismus.
Sie $\bar{U}_p \subseteq T_pM$ eine Umgebung von 0_p und $U_p \subseteq M$ eine Umgebung von p, so dass $\exp_p|_{\bar{U}_p}$:

$\bar{U}_p \to U_p$ ein Diffeomorphismus ist.
Dann ist $A^{-1} \circ \exp_p^{-1}|_{U_p} : U_p \to V := A^{-1}(\bar{U}_p)$ ein Diffeomorphismus und damit ist $(x := A^{-1} \circ \exp_p^{-1}, U_p)$ eine Karte auf M.

Definition 7.12 (Riemannsche Normalkoordinaten). Die so erhaltenen Koordinaten um p heißen *riemannsche Normalkoordinaten.*

Satz 7.13. *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Seien $g_{ij} : U_p \to \mathbb{R}$ und $\Gamma_{ij}^k : U_p \to \mathbb{R}$ die zu den riemannschen Normalkoordinaten (x, U_p) gehörende Fundamentalmatrix der Metrik und die Christoffel-Symbole. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} x(p) &= 0, \\ g_{ij}(p) = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad &\textit{und} \\ \Gamma_{ij}^k(p) &= 0 \end{aligned}$$

Beweis.

1. $x(p) = A^{-1}(\exp_p^{-1}(p)) = A^{-1}(0_p) = 0$

2. $$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= g_p(X_i, X_j) \\ &= g_p(\mathrm{d}\, x^{-1}|_{x(p)}(e_i), \mathrm{d}\, x^{-1}|_{x(p)}(e_j)) \\ &= g_p(\mathrm{d}(\exp_p \circ A)|_0(e_i), \mathrm{d}(\exp_p \circ A)|_0(e_j)) \\ &= g_p(\mathrm{d} \exp_p |_{0_p}(E_i), \mathrm{d} \exp_p |_{0_p}(E_j)) \\ &= g_p(E_i, E_j) \\ &= \varepsilon_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

3. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $c(t) = x^{-1}(tv) = \exp_p(A(tv)) = \exp_p(tA(v))$ ist eine Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = Av$.
   Geodätengleichung ($c^k(t) := x^k(c(t))$):

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{c} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \ddot{c}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$c^k(t) = \pi_k \circ x \circ (x^{-1}(tv)) = tv^k \quad \Rightarrow \quad \dot{c}^k(t) = v^k \quad \Rightarrow \quad \ddot{c}^k(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) v^i v^j \qquad *$$

Behauptung: $\beta(v,w) := \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p)v^iw^j$ ist eine symmetrische Bilinearform.

$$\begin{aligned}\beta(v,w) &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p)v^iw^j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ji}^k(p)v^jw^i \\ &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k w^iv^j \qquad \nabla \text{ torsionsfrei} \\ &= \beta(w,v)\end{aligned}$$

Nun gilt aber mit $(*)$: $0 = \beta(v,v)$ für jedes $v \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $\beta \equiv 0$ und so $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ für alle $i,j,k = 1,\dots,n$.

$\square$

Definition 7.14. Sei $c : [a,b] \to (M,g)$ eine glatte Kurve.
Die *Energie* von c ist definiert als

$$E[c] := \frac{1}{2}\int_a^b g_{c(t)}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))\,\mathrm{d}\,t$$

Definition 7.15. Die *Länge* von c ist definiert als

$$L[c] := \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))}\,\mathrm{d}\,t$$

Bemerkung 7.16. Für semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten ist die Länge nur für Kurven mit $g(\dot{c}(t),\dot{c}(t)) \geq 0$ wohldefiniert.

Definition 7.17. Sei $c : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve. Eine *Variation* von c ist eine glatte Abbildung

$$H :]-\varepsilon,\varepsilon[\times [a,b] \to M, \quad (s,t) \mapsto H(s,t)$$

mit $H(0,t) = c(t)$. Falls $H(s,a) = c(a)$ und $H(s,b) = c(b)$ für alle $s \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, so heißt H eine *Variation mit festem Endpunkt* oder *eigentliche Variation.*
Das Vektorfeld längs c gegeben durch

$$X(t) := \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} H(s,t)$$

heißt *Variationsfeld.*
Ist H eine Variation mit festen Endpunkten, dann gilt $X(a) = X(b) = 0$.

Lemma 7.18. *Sei $c : [a,b] \to M$ eine (stückweise) glatte Kurve und X ein (stückweise) glattes Vektorfeld längs c.*
Dann gibt es eine Variation $H :]-\varepsilon,\varepsilon[\times[a,b] \to M$, deren Variationsfeld gleich X ist.
Zu dem gilt $H(s,t) = c(t)$ für alle s,t mit $X(t) = 0$, insbesondere ist H eigentlich, wenn $X(a) = X(b) = 0$.

Beweis. $H(s,t) := \exp_{c(t)}(sX(t))$ □

Sei $H :]-\varepsilon,\varepsilon[\times[a,b] \to M$ eine Variation von $c : [a,b] \to M$. Setze $c_s(t) := H(s,t)$.

Satz 7.19 (Erste Variation der Energie).

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} E[c_s] = -\int_a^b g(X(t), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\dot{c}(t))\,\mathrm{d}\,t + g_{c(b)}(X(b),\dot{c}(b)) - g_{c(a)}(X(a),\dot{c}(a))$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} E[c_s] &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} \frac{1}{2}\int_a^b g(\dot{c}_s(t),\dot{c}_s(t))\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} g(\dot{c}_s(t),\dot{c}_s(t))\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \int_a^b g(\nabla_t\dot{c}_s(t),\dot{c}_0(t))\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_a^b g(\nabla_t\frac{\partial}{\partial t}H(s,t),\dot{c}(t))\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_a^b g(\nabla_t\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}H(s,t),}_{=X(t)}\dot{c}(t))\,\mathrm{d}\,t \\
&\overset{*}{=} \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} g(X(t),\dot{c}(t))\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b g(X(t),\nabla_t\dot{c}(t))\,\mathrm{d}\,t \\
&= g(X(b),\dot{c}(b)) - g(X(a),\dot{c}(a)) - \int_a^b g(X(t),\nabla_t\dot{c}(t))\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

wobei für $*$ verwendet wurde, dass ∇ metrisch ist, d.h.:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} g(X,Y) = g(\nabla_t X, Y) + g(X,\nabla_t Y)$$

□

Bemerkung 7.20. Bei festen Endpunkten ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} E[c_s] = -\int_a^b g(X(t),\nabla_t\dot{c}(t))\,\mathrm{d}\,t$$

$\Omega_{pq}(M) = \{$ glatte Kurven $c : [a,b] \to M | c(a) = p, c(b) = q\}$
Die eigentlche Variation einer Kurve $c : [a,b] \to M \in \Omega_{pq}(M)$ ist eine Kurve in $\Omega_{pq}(M)$.

Korollar 7.21. *Sei $c \in \Omega_{pq}(M)$ ein ¨kritischer Punkt des Energiefunktionals ¨, d.h. für alle eigentlichen Variationen H von c gilt:*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} E[c_s] = 0,$$

wobei $c_s(t) := H(s,t)$.
Dann ist c eine Geodätische.

Beweis. Durch Widerspruch:
Nehme an es existiert ein $t_0 \in]a,b[$ (Rand nicht möglich aufgrund von Stetigkeit) mit $\nabla_t \dot{c}(t_0) \neq 0$.
Dann existiert ein $X_0 \in T_{c(t_0)}M$ mit $g(X_0, \nabla_t \dot{c}(t_0)) > 0$.
Sei $\tilde{X}(t)$ das parallele Vektorfeld längs c mit $\tilde{X}(t_0) = X_0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $I_\varepsilon :=]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\subseteq]a,b[$ und $g(\tilde{X}(t), \nabla_t \dot{c}(t)) > 0$.
Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi > 0$ auf I_ε und $\varphi = 0$ außerhalb.
Setze $X(t) = \varphi(t)\tilde{X}(t)$. Dann ist $g(X(t), \nabla_t \dot{c}(t)) = \varphi(t) g(\tilde{X}(t), \nabla_t \dot{c}(t))$ und $X(a) = X(b) = 0$.
Sei $H :]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b] \to M$ eine eigentliche Variation von c mit Variationsfeld $X(t)$ (Lemma 7.18).
Dann gilt: (mit $c_s(t) = H(s,t)$):

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} E[c_s] = -\int_a^b g(X(t), \nabla_t \dot{c}(s))\,\mathrm{d}\,t < 0$$

Dies ist ein Widerspruch zu unserer Vorraussetzung. □

8 Krümmung einer Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit

Sei (M, g) eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Sei

$$R : V(M) \times V(M) \times V(M) \to V(M), \quad R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Satz 8.1. *Seien $X, Y, Z, U, V \in V(M)$. Dann gilt:*

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ *(1. Bianchi-Identität)*
3. $g(R(X, Y)U, V) = -g(R(X, Y)V, U)$
4. $g(R(X, Y)U, V) = g(R(U, V)X, Y)$

Bemerkung 8.2.

1. Die Abbildung $R_p : (T_pM)^3 \to T_pM$ erfüllt die gleichen Relationen.
2. Die erste Bianchi-Identität gilt für alle torsionsfreien Zusammenhänge.
3. 3. gilt für alle metrischen Zusammenhänge.
4. 4. folgt aus 2. und 3.

Beweis. von Satz 8.1

1. ✓
2. einfaches Nachrechnen
3. einfaches Nachrechnen
4. Wir wollen zeigen, dass 4. aus 1. - 3. folgt.

   a)

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)U, V) &\overset{1.}{=} -g(R(Y, X)U, V) \\ &\overset{2.}{=} g(R(X, U)Y, V) + g(R(U, Y)X, V) \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)U, V) &\overset{3.}{=} -g(R(X, Y)V, U) \\ &\overset{2.}{=} g(R(Y, V)X, U) + g(R(V, X)Y, U) \end{aligned}$$

Aus a) und b) folgt nun:

$$2g(R(X,Y)U,V) = g(R(X,U)Y,V) + g(R(U,Y)X,V) + g(R(Y,V)X,U) + g(R(V,X)Y,U) \quad *$$

Durch vertauschen der Rollen von X, Y und U, V erhalten wir analog:

$$2g(R(U,V)X,Y) = g(R(U,X)V,Y) + g(R(X,V)U,Y) + g(R(V,Y)U,X) + g(R(Y,U)V,X) \quad **$$

Nun gilt, dass die rechte Seite von ($*$) mit der rechten Seite von ($**$) übereinstimmt und damit

$$g(R(X,Y)U,V) = g(R(U,V)X,Y)$$

$\square$

In lokalen Koordinaten:
Sei (x, U) eine Karte von M und $X_1, \ldots, X_n$ die zugehörige lokale Basis von $TM|_U$.

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{m=1}^{n} R_{kij}^m X_m$$

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{[X_i,X_j]}X_k \\
&= \nabla_{X_i}\left(\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{jk}^l X_l\right) - \nabla_{X_j}\left(\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l X_l\right) - 0 \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(X_i(\Gamma_{jk}^l)X_l + \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^m X_m - X_j(\Gamma_{ik}^l)X_l - \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^m X_m\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^{n}\left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l\right)\right) X_l
\end{aligned}$$

Und damit:

$$R_{kij}^l = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^{n}\left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l\right)$$

In Riemannschen Normalkoordinaten in p:

$$R_{kij}^l(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^l\right)(p) - \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^l\right)(p)$$

Definiere

$$R(X,Y,Z,W) := g(R(X,Y)Z,W)$$

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &:= R(X_i, X_j, X_k, X_l) \\
&= g\left(\sum_{m=1}^{n} R_{kij}^{m} X_m, X_l\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} R_{kij}^{m} g_{ml}
\end{aligned}$$

Satz 8.3. *In Riemannschen Normalkoordinaten gilt:*

$$g_{ij}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^{n} R_{ikjl} x^k x^l + O(\|x\|^3)$$

Beweis. $g_{ij}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij} + O(\|x\|^2)$, denn

$$\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(0) = \sum_{m=1}^{n} (\Gamma_{ki}^{m}(0) g_{mj}(0) + \Gamma_{kj}^{m}(0) g_{mi}(0)) = 0$$

Es ist noch zu zeigen:

$$\frac{1}{2} \sum_{l,k=1} \neg n \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} x^k x^l \stackrel{!}{=} \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^{n} R_{ikjl} x^k x^l$$

1. $\frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(0) = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\Gamma_{ki}^{m} g_{mj} \right) + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\Gamma_{kj}^{m} g_{mi} \right) \right)$

2. $\left(\frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{ij}^{k} + \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{li}^{k} + \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jl}^{k} \right)(0) = 0$
   Warum gilt 2.? Die Geodätischen im $\mathbb{R}^n$ sind gegeben durch $t \mapsto tx$. Eingesetzt in die Geodätengleichung ergibt sich:
   $\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(tx) x^i x^j$ und durch Differentiation nach t bei 0 erhalten wir:
   $\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i,j,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{ij}^{k}(0) x^i x^j x^l$
   Also haben wir ein Polynom dritten Grades vorliegen, das verschwinden soll. Das heißt aber, dass alle Koeffizienten von Monomen der Form $x^i x^j x^l$ verschwinden müssen. Betrachten wir diese Koeffizienten genauer, so stellen wir fest, dass sie mit der linken Seite von 2. über einstimmen.

$$\begin{aligned}
R_{ikjl}(0) &= \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^{m}(0) - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{il}^{m}(0) \right) g_{ml}(0) \\
&\stackrel{2.}{=} -\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^{m}(0) + 2 \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ki}^{m}(0) \right) g_{ml}(0)
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
2\sum_{k,l=1}^{n} R_{ikjl}x^k x^l &= \sum_{k,l=1}^{n} x^k x^l[-R_{kijl}(0) - R_{ljik}(0)] \\
&= \sum_{k,l,m=1}^{n} x^k x^l \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{jl}^m(0) + 2\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma_{kj}^m(0)\right) g_{mi}(0)\right. \\
&+ \left.\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma_{ik}^m(0) + 2\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{li}^m(0)\right) g_{mj}(0)\right] \\
&= \sum_{k,l,m=1}^{n} x^k x^l \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{jl}^m(0)g_{mi}(0) + \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{il}^m(0)g_{mj}(0)\right)\right. \\
&+ 2\left.\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma_{kj}^m(0)g_{mi}(0) + \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma_{ki}^m(0)g_{mj}(0)\right)\right] \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} x^k x^l \left[\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k} g_{ij}(0) + 2\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} g_{ij}(0)\right] \\
&= 3\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} g_{ij}(0) x^k x^l
\end{aligned}$$

□

Setze $k(X,Y) := g(R(X,Y)Y,X)$ für jedes $X,Y \in V(M)$.

Lemma 8.4. *R ist eindeutig durch k bestimmt.*

Beweis. Für beliebige $X,Y,Z,W \in T_pM$ erhalten wir:

1.

$$\begin{aligned}
3R(X,Y)Z &= 2R(X,Y)Z + \underbrace{(-R(Z,X)Y - R(Y,Z)X)}_{=R(X,Y)Z} \qquad = R(X,Y)Z + R(X,Z)Y - R(Y \\
&= R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(X,Y)Y - R(X,Z)Z \\
&- R(Y,X+Z)(X+Z) + R(Y,X)X + R(Y,Z)Z
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
2g(R(X,Y),Z) &= g(R(X,Y)Y,Z) + g(R(Z,Y)Y,X) \\
&= g(R(X+Z)Y, X+Z) - g(R(X,Y)Y,X) - g(R(Z,Y)Y,Z) \\
&= k(X+Z,Y) - k(X,Y) - k(Z,Y)
\end{aligned}$$

3. Somit erhalten wir

$$6g(R(X,Y)Z,W) = \text{ 18 Terme in } k \text{mit Linearkombinationen von } X,Y,Z,W$$

□

Wir wollen nun das Verhalten von k bei einem Basiswechsel untersuchen. Seien dazu $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y} \in T_pM$ mit $\tilde{X} = aX + bY$ und $\tilde{Y} = cX + dY$. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
k(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= g(R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Y}, \tilde{X}) \\
&= (ad - bc)g(R(X, Y)\tilde{Y}, \tilde{X}) \\
&= (ad - bc)^2 g(R(X, Y)Y, X) \\
&= (ad - bc)^2 k(X, Y)
\end{aligned}$$

Nun wollen wir aber, dass k nicht von den gewählten Basisvektoren, sondern nur vom 2-dimensionalen Untervektorraum abhängt, d.h. wir müssen k normalisieren.

Für $\alpha \in \mathbb{R}, X, Y, Z \in T_pM$ definieren wir

$$R_\alpha(X, Y)Z := \alpha(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

R_α hat die gleichen Symmetrien 1. - 4 aus Theorem 8.1 auf Seite 52.

$$k_\alpha := g(R_\alpha(X, Y)Y, X)$$

Damit gilt:

$$k_\alpha(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (ad - bc)^2 k_\alpha(X, Y)$$

Um eine Invariante (von R) zu erhalten setzen wir ($\alpha = 1$):

$$K(\sigma) := \frac{k(X, Y)}{k_1(X, Y)} = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(Y, Y)g(X, X) - g^2(X, Y)}$$

für $\sigma \subseteq T_pM$ ein zweidimensionaler nicht-entarteter linearer Unterraum und X, Y eine Basis von σ.

Lemma 8.5. *Sei $\sigma \subseteq T_pM$ ein zweidimensionaler linearer Unterraum, dann ist σ genau dann nicht entartet, wenn $k_1(X, Y) \neq 0$ für jede Basis X, Y von σ.*

Beweis.

$\Leftarrow$ Sei σ entartet, d.h. es existiert ein $X \in \sigma : g(X, Y) = 0$ für alle $Y \in \sigma$.
$\Rightarrow g(X, X) = 0$ und es existiert ein von X linear unabhängiges Y, so dass $g(X, Y) = 0$
$\Rightarrow k_1(X, Y) = 0$.

$\Rightarrow$ ✓

□

Bemerkung 8.6.

1. Falls g eine Riemannsche Metrik ist, so sind alle zweidimensionalen Unterräume nicht entartet.
2. $\sqrt{k(X,Y)}$ = Fläche des von X, Y aufgespannten Parallelogramms.

Definition 8.7 (Schnittkrümmung). Sei $\sigma \subseteq T_pM$ eine nicht-entartete tangentiale 2-Ebene, d.h. ein zweidimensionaler linearer Unterraum von T_pM.
Dann heißt $K(\sigma)$ die *Schnittkrümmung* von σ.

$$K_p : G^g(2, T_pM) \to \mathbb{R}$$

wobei $G^g(2, T_pM) =$ die Menge der nicht-entarteten zweidimensionalen linearen Unterräume von T_pM.
$K(\sigma)$ ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Satz 8.8. *Die Schnittkrümmung K_p nicht-entarteter, tangentialer 2 Ebenen $\subseteq T_pM$ bestimmt den Krümmungstensor R_p.*
Insbesondere gilt: $K_p(\sigma) = \alpha \quad \forall \sigma \subseteq T_pM \quad \Rightarrow \quad R_p = R_\alpha$.

Beweis. Wir wissen k bestimmt R_p. $k : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ist ein Polynom, d.h es ist bestimmt durch die Werte auf der offenen Menge $\{(X,Y) \in (T_pM)^2 | k(X,Y) \neq 0\}$ □

8.1 Ricci-Krümmung & Skalarkrümmung

Der Riccitensor einer Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ist gegeben durch:

$$\mathrm{ric}_p(Y,Z) = \mathrm{tr}(R(\cdot,Y)Z : T_pM \to T_pM, \quad X \mapsto R(X,Y)Z)$$

Dann gilt: $\mathrm{ric}_p(Y,Z) = \mathrm{ric}_p(Z,Y)$
Für $E_1, \dots, E_n$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von (T_pM, g_p) gilt:

$$\mathrm{ric}_p(Y,Z) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g_p(R(E_i,Y)Z_i, E_i)$$

Für ein Vektor $v \in T_pM$ mit $g_p(v,v) \neq 0$ ist die *Ricci-Krümmung* in Richtung v definiert durch:

$$\frac{\mathrm{ric}_p(v,v)}{g_p(v,v)}$$

Da g_p nicht-entartet ist, existiert ein eindeutiger Endomorphismus $\mathrm{Ric}_p : T_pM \to T_pM$ definiert durch:

$$\mathrm{ric}_p(Y,Z) = g(\mathrm{Ric}_p(Y), Z)$$

Die *Skalarkrümmung* ist definiert als

$$S(p) := \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}_p : T_pM \to T_pM)$$

Bezüglich einer Orthonormalbasis:

$$S(p) = \sum_{i,j}^{n} g_p(R(E_i,E_j)E_j, E_i)\varepsilon_i\varepsilon_j$$

Bemerkung 8.9.

1. In $\dim M = 2$ gilt $S(p) = K(p)$
2. In $\dim M = 3$ bestimmt die Ricci-Krümmung den Krümmungstensor.
3. Im Allgemeinen ($\dim M \geq 4$) gilt:
   Krümmungstensor $\Leftrightarrow$ Schnittkrümmung $\Rightarrow$ Ricci-Krümmung $\Rightarrow$ Skalarkrümmung

8.2 Räume konstanter Schnittkrümmung

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine nicht-entartete, symmetrische Bilinearform. Sei $\alpha \neq 0$.
Betrachte $V_\alpha = \{p \in V | \langle p,p\rangle \neq -\frac{1}{\alpha}\}$ und die Metrik:

$$g_p(v,w) := \frac{4}{(1+\alpha\langle p,p\rangle)^2}\langle v,w\rangle$$

Die Metrik unterscheidet sich von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ durch den *konformen Faktor* $f_\alpha(p) = \frac{4}{(1+\alpha\langle p,p\rangle)^2}$.

Sei nun ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= X(f_\alpha\langle Y,X\rangle) + Y(f_\alpha\langle X,Z\rangle) - Z(f_\alpha\langle X,Y\rangle) \\
&\quad - f_\alpha g X[Y,Z] - f_\alpha\langle Y,[X,Z]\rangle + f_\alpha\langle Z,[X,Y]\rangle \\
&= X(f_\alpha)\langle Y,Z\rangle + Y(f_\alpha)\langle X,Z\rangle - Z(f_\alpha)\langle X,Y\rangle \\
&\quad + \underbrace{f_\alpha(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle)}_{f_\alpha(2\langle \mathrm{d}_X Y, Z\rangle)}
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun noch $X_p(f_\alpha)$:

$$\begin{aligned}
X_p(f_\alpha) &= \frac{-16\langle p,X\rangle\alpha}{(1+\alpha\langle p,p\rangle)^3} \\
&= -\frac{4\langle p,X\rangle\alpha}{(1+\alpha\langle p,p\rangle)} f_\alpha
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Levi-Civita-Zusammenhang:

$$\nabla_X Y = \mathrm{d}_X Y - \frac{2\alpha}{1+\alpha\langle p,p\rangle}(\langle p,X\rangle Y + \langle p,Y\rangle X - \langle X,Y\rangle p)$$

Mit dieser Vorbereitung kann nun der Krümmungstensor berechnet werden.
Sei $X_p, Y_p, Zp \in T_p V_\alpha$ und X, Y, Z die zugehörigen konstanten Vektorfelder. Dann gilt $\mathrm{d}\, X = \mathrm{d}\, Y = \mathrm{d}\, Z = [X,Y] = 0$.
Nach Rechnung erhält man:

$$R_p(X_p,Y_p)Z_p = \alpha(\langle Y_p,Z_p\rangle X_p - \langle X_p,Z_p\rangle Y_p) = R_\alpha(X_p,Y_p)Z_p$$

Wir betrachte nun V einen (n+1)-dimensionalen Vektoraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine nicht-entartete, symmetrische Bilinearform und $\beta \neq 0$.

$$Q_\beta := \{p \in V | \langle p, p\rangle = \beta\}$$

Dann ist $T_pQ_\beta \cong p^\perp$
Sei $p_0 \in Q_\beta$ und $W = p_0^\perp$.
Dann gilt $\quad V = \mathbb{R}P_0 \oplus W$, d.h. $p = x(p)p_0 + q(p)$. Sei $U = \{p \in V | x(p) \neq 1\}$ und setze

$$h : U \to W, \quad p \mapsto \frac{q(p)}{1 - x(p)}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{d}\, h_p : V \to W, \quad \xi p_0 + w \mapsto \frac{\xi}{(1 - x(p))^2} q(p) + \frac{1}{1 - x(p)} w$$

Wir wollen $\langle \mathrm{d}\, h_p(v_1), \mathrm{d}\, h_p(v_2)\rangle$ berechnen. Sei $p \in Q_\beta$:

$$\begin{aligned} \beta &= \langle p, p\rangle \\ &= \langle xp_0 + w, xp_0 + w\rangle \\ &= x^2\beta + \langle q, q\rangle \qquad \text{, d.h.} \\ \langle q, q\rangle &= (1 - x^2)\beta \end{aligned}$$

Sei $v_1 = \xi_1 p_0 + w_1, v_2 = \xi_2 p_0 + w_2 \in T_pQ_\beta$ und $p = xp_0 + q$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, v_i\rangle \\ &= \langle xp_0 + q, \xi_i p_0 + w_i\rangle \\ &= x\xi_i\beta + \langle q, w_i\rangle \qquad \text{, d.h.} \\ \langle q, w_i\rangle &= -\beta x \xi_i \end{aligned}$$

Zu dem gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}\, h_p(v_1), \mathrm{d}\, h_p(v_2)\rangle &= \frac{1}{(1-x)^2}\left(\frac{\xi_1\xi_2\langle q, q\rangle}{(1-x)^2} + \frac{\xi_1\langle q, w_1\rangle + \xi_2\langle q, w_2\rangle}{1-x} + \langle w_1, w_2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\left(\frac{\xi_1\xi_2(1+x)\beta}{1-x} - \frac{2\xi_1\xi_2\beta x}{1-x} + \langle w_1, w_2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}(\xi_1\xi_2\beta + \langle w_1, w_2\rangle) \\ &= \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Für $\alpha = \frac{1}{\beta}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{f_\alpha(p)} &= \frac{2}{1+\alpha\langle p,p\rangle} \\
&= \frac{2\beta}{\beta + \frac{\langle q,q\rangle}{(1-x)^2}} \\
&= \frac{2\beta(1-x)^2}{\beta(1-x)^2 + \langle q,q\rangle} \\
&= \frac{2\beta(1-x)^2}{\beta(1-x)^2 + \beta(1-x^2)} \\
&= 1-x
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Einschränkung:

$$h : U \cap Q_\beta \to W_\alpha = \{w \in W | \langle v,w\rangle \neq -\alpha^{-1}\} \subseteq W$$

und

$$\mathrm{d}\, h_p : T_p W_\beta \to T_{h(p)} W_\alpha$$

Dann gilt für alle $v_1, v_2 \in T_p Q_\beta$:

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2\rangle &= f_\alpha \langle \mathrm{d}\, h_p(v_1), \mathrm{d}\, h_p(v_2)\rangle \\
&= (1-x)^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\langle v_1, v_2\rangle
\end{aligned}$$

d.h. h ist auf $U \cap Q_\beta$ eine lokale Isometrie von $U \cap Q_\beta$ auf $W_{\alpha=\frac{1}{\beta}}$.

9 Semi-Riemannsche Immersionen

Seien (M, g) und $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $f : M \to \tilde{M}$ heißt *Semi-Riemannsche Immersion*, falls für alle $p \in M$:

$$\tilde{g}_{f(p)}(\mathrm{d}\, f_p(v), \mathrm{d}\, f_p(w)) = g_p(v, w) \qquad \forall v, w \in T_pM$$

Ist f eine Semi-Riemannsche Immersion, dann ist $\mathrm{d}\, f_p$ für alle $p \in M$ injektiv.
Sei $v \in T_pM$ mit $\mathrm{d}\, f_p(v) = 0$, dann gilt $g(v, w) = 0$ für alle $w \in T_pM$ und damit $v = 0$, da g nicht-entartet ist.

Sei $(\tilde{M}, \tilde{g})$ eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, M eine Mannigfaltigkeit und $f : M \to \tilde{M}$ eine Immersion. Wir nehmen an, dass $\mathrm{d}\, f_p(T_pM) =: T_pf \subseteq T_{f(p)}\tilde{M}$ ein nicht-entarteter Unterraum ist, d.h. $\tilde{g}_{f(p)}|_{T_pf}$ ist eine nicht-entartete, symmetrische Bilinearform.
Dann erhalten wir auf M eine Semi-Riemannsche Metrik

$$g_p(v, w) := \tilde{g}_{f(p)}(\mathrm{d}\, f_p(v), \mathrm{d}\, f_p(w))$$

Wir müssen noch nachprüfen, dass g_p glatt in p ist.
Wähle (x, U) um p und (y, V) um $f(p)$:

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= g_p(X_i, X_j) \\ &= \tilde{g}_{f(p)}(\mathrm{d}\, f_p(X_i), \mathrm{d}\, f_p(X_j)) \\ &= \tilde{g}_{f(p)}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} f^k(p) Y_k(f(p)), \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} f^l(p) Y_l(f(p))\Big) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f^k(p)}{\partial x^i}}_{\text{glatt}} \underbrace{\frac{\partial f^l(p)}{\partial x^j}}_{\text{glatt}} \underbrace{\tilde{g}_{kl}}_{\text{glatt}} \end{aligned}$$

Man nennt $g_p = f^*\tilde{g}$ auch die *erste Fundamentalform* von f

Bemerkung 9.1. $\tilde{g}_p$ Riemannsch $\Rightarrow \quad f^*\tilde{g}$ Riemannsch.

Nach Vorraussetzung ist $T_pf \subseteq T_{f(p)}\tilde{M}$ nicht-entartet.
$\Rightarrow N_pf := T_pf^{\perp} = T_pf^{\tilde{g}_{f(p)}}$ ist nicht-entartet
$\Rightarrow T_{f(p)}\tilde{M} = T_pf \oplus N_pf$

Lemma 9.2. *Sei $X : M \to T\tilde{M}$ ein Vektorfeld längs f, wobei f eine Immersion und T_pf ein nicht-entarteter Unterraum ist. Betrachte für alle $p \in M$*

$$X(p) = X^T(p) + X^N(p)$$

die orthogonale Zerlegung bezüglich $T_{f(p)}\tilde{M} = T_pf \oplus N_pf$.
Dann sind X^T und X^N glatte Vektorfelder längs f und es existiert ein $Y \in V(M)$ mit $X^T = f_*Y$, d.h. $X^T(p) = \mathrm{d}\, f_p(Y(p))$ für alle $p \in M$.

Beweis. Sei (x, U) eine Karte von M und $X_1, \dots, X_n$ die lokale Basis von TM.
Dann bilden $\mathrm{d}\, f_p(X_1), \dots, \mathrm{d}\, f_p(X_n)$ eine Basis von $T_p f$.

$$X^T(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i(p)\, \mathrm{d}\, f_p(X_i)$$

Setze

$$Y(p) := \sum_{i=1}^{n} a^i(p) X_i(p)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g_p(Y, X_i) &= \tilde{g}_{f(p)}(\mathrm{d}\, f_p(Y), \mathrm{d}\, f_p(X_i)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a^j(p) g_j i(p) \\
&= \tilde{g}_{f(p)}(X^T(p), \mathrm{d}\, f_p(X_i))
\end{aligned}$$

d.h. $Y(p)$ ist der eindeutige Vektor in T_pM, so dass $\mathrm{d}\, f_p(Y(p)) = X^T(p)$.
Zu dem ist: $a^i(p) = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}(p) g(X(p), d[f_p](X_j))$ und damit sind die $a^i(p)$ glatt. □

Satz 9.3. *Sei $f : M \to \tilde{M}$ eine Semi-Riemannsche Immersion. Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M und $\tilde{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang auf $\tilde{M}$. Dann gilt für alle $X, Y \in V(M)$:*

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + S(X, Y)$$

mit

$$f_*(\nabla_X Y) = (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^T \quad \textit{und} \quad S(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^N$$

$S(X, Y)$ ist tensoriell in X und Y und symmetrisch.
$S(X, Y)$ heißt zweite Fundamentalform.

Beweis. Zeige zunächst $S(X, Y)$ ist tensoriell in X, Y.
Tensoriell in X: ✓
Sei $\varphi \in \mathcal{F}(M)$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X f_*(\varphi Y) &= \tilde{\nabla}_X \varphi f_* Y \\
&= X(\varphi) f_* Y + \varphi \tilde{\nabla}_X f_* Y \\
&= \underbrace{X(\varphi) f_* Y}_{\in T_p f} + \varphi(\tilde{\nabla}_X f_*(Y))^T + \varphi S(X, Y)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad S(X, \varphi Y) = \varphi S(X, Y)$
Betrachte $(\tilde{\nabla}_X f_* Y)^T$. Dann existiert ein $Z \in V(M)$ mit $f_* Z = (\tilde{\nabla}_X f_* Y) T$.
Sei $\bar{\nabla}_X Y := Z$ dieses Vektorfeld.

Dann ist $\bar{\nabla} : V(M) \times V(M) \to V(M)$ tensoriell in X und dervativ in Y.
zu zeigen: $\bar{\nabla}$ ist torsionsfrei.

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\nabla}_X f_* Y - \tilde{\nabla}_Y f_* X - f_*[X,Y] \\ &= \underbrace{(\tilde{\nabla}_X f_* Y)^T - (\tilde{\nabla}_Y f_* X)^T - f_*[X,Y]}_{\in T_p f} + \underbrace{S(X,Y) - S(Y,X)}_{\in N_p f} \end{aligned}$$

Aus der Orthogonalität folgt:

$$S(X,Y) = S(Y,X)$$

und

$$(\tilde{\nabla}_X f_* Y)^T - (\tilde{\nabla}_Y f_* X)^T - f_*[X,Y] = 0$$

d.h. $\bar{\nabla}_X Y$ ist torsionsfrei und S ist symmetrisch.

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= X\tilde{g}(f_* Y, f_* Z) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla} f_* Y, f_* Z) + \tilde{g}(f_* Y, \tilde{\nabla}_X f_* Z) \\ &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X f_* Y)^T, f_* Z) + \tilde{g}(f_* Y, (\tilde{\nabla}_X f_* Z)T) \quad = \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt dabei, da der Levi-Civita-Zusammenhang auf M eindeutig ist und damit ist auch $\bar{\nabla} = \nabla$. $\square$

Satz 9.4 (Gaußgleichung). *Sei $f : M \to \tilde{M}$ eine Semi-Riemannsche Immersion, dann gilt:*

$$g(R(X,Y)U,V) = \tilde{g}(\tilde{R}(f_* X, f_* Y) f_* U, f_* V) + \tilde{g}(S(Y,U), S(X,V)) - \tilde{g}(S(X,U), S(Y,V))$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y f_* U, f_* V) &= X\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y f_* U, f_* V) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y f_* U, \tilde{\nabla}_X f_* V) \\ &= X\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y f_* U, f_* V) - \tilde{g}((\tilde{\nabla}_Y f_* U)^T + S(U,Y), (\tilde{\nabla}_X f_* V)^T + S(X,V)) \\ &= X(\tilde{g}((\tilde{\nabla}_Y f_* U)^T, f_* V) - g(\nabla_Y U, \nabla_X V) - g(S(U,Y), S(X,V)) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y U, V) - g(S(U,Y), S(X,V)) \end{aligned}$$

Und zu letzt:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[X,Y]} f_* U, f_* V) &= \tilde{g}(f_* \nabla_{[X,Y]} U, f_* V) \\ &= g(\nabla_{[X,Y]} U, V) \end{aligned}$$

$\square$

Beispiele 9.5. Sei V ein $m+1$-dimensionaler, reeller Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nicht-entartete, symmetrische Bilinearform.
Sei $\beta \neq 0$ und $Q_\beta := \{p \in V | \langle p, p \rangle = \beta\}$

$T_pQ_\beta \cong p^\perp$ und $N_pQ_\beta \cong \mathbb{R}p$

$$N : Q_\beta \to V, \quad p \mapsto p$$

$N(p)$ spannt N_pQ_β auf.
Nun gilt für alle $X, Y \in V(Q_\beta)$, dass X als Abbildung von Q_β nach V aufgefasst werden kann. Insbesondere gilt: $X(p) \in T_pQ_\beta \cong p^\perp$. Das bedeutet:

$$\langle Y, N\rangle = \langle X, N\rangle = 0$$

Dies kann nun zur Berechnung der zweiten Fundamentalform verwendet werden:

$$\begin{aligned}0 &= X\langle Y, N\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, N\rangle + \langle Y, \nabla_X N\rangle \\ &= \langle S(X,Y), N\rangle + \langle Y, X\rangle\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$S(X,Y) = \langle S(X,Y), N\rangle N \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\beta}\langle X, Y\rangle N$$

In die Gaußgleichung eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}g(R(X,Y)U,V) &= 0 + \langle S(Y,U), S(X,V)\rangle - \langle S(X,U), S(Y,V)\rangle \\ &= \frac{1}{\beta^2}(\langle Y,U\rangle\langle X,V\rangle\beta - \langle X,U\rangle\langle Y,V\rangle\beta) \\ &= \frac{1}{\beta}\langle\langle Y,U\rangle X - \langle X,U\rangle Y, V\rangle\end{aligned}$$

Mit $g(R(X,Y)U,V) = \langle R(X,Y)U,V\rangle|_{Q_\beta}$ ergibt sich also:

$$R(X,Y)U = \frac{1}{\beta}(\langle Y,U\rangle X - \langle X,U\rangle Y) = R_{1/\beta}(X,Y)U$$

und für die Schnittkrümmung:

$$K(\sigma) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(R_1(X,Y)Y,X)} = \frac{1}{\beta} \qquad \sigma = \operatorname{span}(X,Y)$$

Das bedeutet Q_β ist eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $\frac{1}{\beta}$.

Lemma 9.6. *Seien $f, \varphi : (M,g) \to (M,g)$ lokale Isometrien. Sei $p \in M$ mit $f(p) = \varphi(p)$ und $\mathrm{d}\, f_p = \mathrm{d}\,\varphi_p$. Dann gilt $f = \varphi$ auf der Zusammenhangskomponente, die p enthält.*

Beweis. Sei $X := \{q \in M | f(q) = \varphi(q) \wedge \mathrm{d}\, f_q = \mathrm{d}\,\varphi_q\} \neq \varnothing$. Außerdem ist X abgeschlossen, da es sich als Urbild der 0 der Funktionen $f - \varphi$ und $\mathrm{d}\, f - \mathrm{d}\,\varphi$ darstellen lässt und diese stetig

sind.
Also bleibt nur noch die Offenheit zu zeigen: Sei $q \in X$

$$\begin{aligned} f(\exp_q(v)) &= \exp_{f(q)} \mathrm{d} f_q(v) \\ &= \exp_{\varphi(q)} \mathrm{d}\, \varphi_q(v) \\ &= \varphi(\exp_q(v)) \end{aligned}$$

Damit gilte $f = \varphi$ auf einer Umgebung V von q. Weiterhin ist V offen und damit $\mathrm{d} f = \mathrm{d}\varphi$ auf V.
Da $V \subseteq X$ ist, ist X offen. □

9.1 Isometrien von Q_β

Seien $p, q \in Q_\beta$ und sei $T : T_pQ_\beta \to T_qQ_\beta$ eine lineare Isometrie, dann existiert eine Funktion $f : Q_\beta \to Q_\beta$ mit $f(p) = q$ und $\mathrm{d} f_p = T$.
Betrachte nämlich

$$A : V^{m+1} \to V^{m+1} \quad \text{linear mit } A(p) = q \quad \text{und} \quad A|_{p^\perp} = T$$

Dann erhält A die nicht-entartete symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, da $T_pQ_\beta = p^\perp$ erhält A $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{p^\perp}$ nach Voraussetzung. Also folgt für alle $v, w \in V = p^\perp \oplus \mathbb{R}p$:

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

Setze nun $f = A|_{Q_\beta}$, dann besitzt f die geforderten Eigenschaften.
Falls Q_β zusammenhängend ist, ist dieses f eindeutig bestimmt, d.h. jede Isometrie ist (eindueig) die Einschränkung einer linearen Abbildung $A \in GL(V)$ mit $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$.

9.2 Totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten

Definition 9.7. Eine Semi-Riemannsche Immersion $f : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ heißt *totalgeodätisch in* p, falls $S_p = 0$.

Satz 9.8. *Sei $f : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine Semi-Riemannsche Immersion. Sei $U \subseteq M$ offen.*

1. *Falls für jede Geodätische $c : I \to U$ gilt, dass $f \circ c : I \to \tilde{M}$ eine Geodätische ist, dann ist $S_p = 0$ für alle $p \in U$.*
2. *Falls $S_p = 0$ für alle $p \in U$. Dann ist $f \circ c$ eine Geodätische in $\tilde{M}$, wann immer c eine Geodätische in $U \subseteq M$ ist.*

Beweis.

$$\overline{\nabla}_t f_* \dot{c} = f_* \nabla_t \dot{c} + S(\dot{c}, \dot{c})$$

□

Definition 9.9 (Erweiterung). Sei $M \subset \tilde{M}$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann heißt M *totalgeodätisch*, falls für alle Geodätischen in $\tilde{M}$, die in einem Punkt $p \in M$ tangential an M sind, die Geodätische in M enthalten ist.

Beispiele 9.10. Sei $W \subseteq V^{m+1}$ ein nicht-entarteter Unterraum, dann ist $W \cap Q_\beta \subseteq Q_\beta$ totalgeodätisch.

10 Geodätische Variationen und Jacobi-Felder

Sei M eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang. Sei weiterhin $c : I \to M$ eine Geodätische und $X \in V_c(M)$.
Setze $X' := \nabla_t X$

Definition 10.1. Ein Vektorfeld $V \in V_c(M)$ heißt *Jacobi-Feld*, falls

$$V'' + R(V, \dot{c})\dot{c} = 0 \tag{$*$}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, denn sei $E_1, \dots E_n \in V_c(M)$ eine parallele Orthonormalbasis längs c. Für $X \in V_c(M)$ folgt zunächst

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X^i(t) E_i(t) \qquad\qquad X^i(t) = g_{c(t)}(X(t), E_i(t))\varepsilon_i$$
$$X'(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{X}^i(t) E_i(t)$$

Damit lässt sich ($*$) umschreiben zu:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \ddot{V}^i E_i(t) + \sum_{i=1}^{n} V^i(t) R(E_i(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t)$$

mit $R(E_i, \dot{c})\dot{c} = \sum_{j=1}^{n} g(R(E_i, \dot{c})\dot{c}, E_j) E_j \varepsilon_j =: \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j R_{ij} E_j$ folg:

$$0 = \ddot{V}_i + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i \mathbb{R}_{ji} V_j \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Satz 10.2. *Der Raum der Jacobi-Felder entlang einer Geodätischen ist ein Reeler Vektorraum der Dimension $2n$, wobei $n = \dim M$. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{J}_c(M)$.*

Beispiele 10.3. Sei c eine Geodätische, dann is t$V(t) := (at + b)\dot{c}(t)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ein Jacobi-Feld längs c.

Definition 10.4. Eine glatte Abbildung $H :]-\varepsilon, \varepsilon[\times I \to M$ heißt *geodätische Variation* von $c : I \to M$, falls $H(0, t) = c(t)$ und für alle $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ $c_s(t) := H(s, t)$ eine Geodätische ist.

Satz 10.5.
1. *Das Variationsfeld $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} H(s, t)$ einer geodätischen Variation ist ein Jacobi-Feld.*
2. *Sei $0 \in I$. Wir nehmen an es gibt Umgebungen $U \subseteq TM$ von $\dot{c}(0)$, so dass für alle $v \in U$ die Geodätische c_v auf I definiert ist. Dann ist jedes Jacobi-Feld längs c Variationsfeld einer geodätischen Variation von c.*

Beweis. 1. Sei $H :]-\varepsilon, \varepsilon[\times I \to M$ eine geodätische Variation, d.h. $c_s(t) := H(s,t)$ sind Geodätische. Sei $V(t) := \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} H(s,t)$.

$$\begin{aligned}
\nabla_t \nabla_t V(t) &= \nabla_t \nabla_t \left(\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} H(s,t) \right) \\
&= \nabla_t \nabla_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{s=0} H(s,t) \right) \\
&= R(\frac{\partial}{\partial t} H, \frac{\partial}{\partial s} H) \frac{\partial}{\partial t} H + \underbrace{\nabla_s \nabla_t \left(\frac{\partial}{\partial t} H \right)}_{= \nabla_t \dot{c}_s = 0} \\
&= R(\frac{\partial}{\partial t} H, \frac{\partial}{\partial s} H) \frac{\partial}{\partial t} H
\end{aligned}$$

Und damit

$$\nabla_t \nabla_t V(t) + R(V, \dot{c})\dot{c} = 0$$

2. Wähle $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ mit $\dot{\alpha}(0) = V(0)$. Sei X_1 das parallele Vektorfeld längs α mit $X_1(0) = \dot{c}(0)$. Sei X_2 das parallel Vektorfeld längs α mit $X_2(0) = \nabla_t V(0) = V'(0)$. Setze $X(s) = X_1(s) + sX_2(s)$.
   Dann gilt $X(0) = \dot{c}(0)$ und $\nabla_t V(0) = V'(0)$. Sei c_s die (eindeutige) Geodätische mit $\dot{c}_s(0) = X(s)$.
   Für s klein genug (siehe Voraussetzung) ist c_s auf I definiert.
   Setze $H(s,t) = c_s(t)$.
   $H(s,0) = \alpha(s)$, $\frac{\partial}{\partial s} H(0,0) = \dot{\alpha}(0) = V(0)$, $\frac{\partial}{\partial t} H(s,0) = X(s)$und damit $\nabla_t \frac{\partial}{\partial s} H(0,0) = \nabla_s \frac{\partial}{\partial t} H(0,0) = \nabla_t V(0)$.
   Damit ist $\frac{\partial}{\partial s} H(0,t)$ ein Jacobi-Feld mit den gleichen Anfangsbedingungen wie V, also is $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} H(0,t)$ für alle $t \in I$.

□

Beispiele 10.6. 1. $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: $V'' + \underbrace{R(V, \dot{c})\dot{c}}_{=0} = 0$. Also $V(t) = X(t) + tY(t)$ und damit $V(0) = X(0)$ und $V'(0) = Y(0)$, wobei $X, Y \in V_c(\mathbb{R}^n)$.

2. Sei M eine flache Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. $R \equiv 0$. Dann ist $V(t) = X(t) + tY(t)$ ein Jacobi-Feld längs c für alle $X, Y \in V_c(M)$.

3. Sei M eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Vektorfelder der Form $V(t) = (a + bt)\dot{c}(t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ *uninteressante Jacobi-Felder.*

Nun wollen wir Jacobi-Felder V betrachten mit $V(0) \perp_{g_{c(0)}} \dot{c}(0)$ und $\nabla_t V(0) = V'(0) \perp_{g_{c(0)}} \dot{c}(0)$.

Satz 10.7. *Seien $V, W \in \mathfrak{J}_c(M)$. Dann ist $g(V, W') - g(W, V')$ konstant.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(g(V,W') - g(W,V')) &= g(V',W') + g(V,W'') - g(W',V') - g(V'',W) \\ &= -g(V,R(W,\dot{c})\dot{c}) + g(W,R(V,\dot{c})dotc) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Korollar 10.8. *Gilt für $v \in \mathfrak{J}_c(M)$, dass $V(0) \perp \dot{c}(0)$ und $V'(0) \perp \dot{c}(0)$, so folgt $V(t) \perp \dot{c}(t)$ und $V'(t) \perp \dot{c}(t)$ für alle t.*

Beispiele 10.9. Sei M eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung α, d.h.

$$R(X,Y)U = \alpha(g(Y,U)X - g(X,U)Y)$$

Sei $E \in V_c(M)$, $c : I \to M$ eine Geodätische mit $g(\dot{c},\dot{c}) = \gamma \neq 0$ und $g(E,\dot{c}) = 0$, dann ist

$$R(E,\dot{c})\dot{c} = \alpha\gamma E$$

Außerdem gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$V = (ac_{\alpha\gamma} + tbs_{\alpha\gamma})E$$

ist ein Jacobi-Feld längs E mit $c_{\alpha\gamma}$ und $s_{\alpha\gamma}$ Lösungen von

$$\ddot{X} + \alpha\gamma X = 0, \tag{1}$$

$c_{\alpha\gamma}(0) = 1, \dot{c}_{\alpha\gamma}(0) = 0, s_{\alpha\gamma}(0) = 0$ und $\dot{s}_{\alpha\gamma}(0) = 1$.

Bemerkung 10.10.

- Für $\alpha\gamma = 1$ wird (1) zu $\ddot{X} = -X$. Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung die bekannterweise durch Linearkombinationen von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ gelöst werden kann und aus den obigen Anfangswerden folgt, dass $c_{\alpha\gamma}(t) = \cos(t)$ und $s_{\alpha\gamma}(t) = \sin(t)$ gilt.
- Für $\alpha\gamma = -1$ überführen wir (1) in $\ddot{X} = X$. Diese Differentialgleichung wird nun durch Linearkombinationen von $\sinh(t)$ und $\cosh(t)$ gelöst und wieder aus den Anfangswerten erhalten wir, dass $c_{\alpha\gamma}(t) = \cosh(t)$ und $s_{\alpha\gamma}(t) = \sinh(t)$ gilt.

Satz 10.11 (Exponentialabbildung und Jacobi-Felder). *Sei M eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M, x \in T_pM$. Sei $c_x(t) = \exp_p(tx)$ auf $[0,1]$ definiert. Zu $Y \in T_pM \cong T_{tx}T_pM$ betrachte das Jacobi-Feld V mit $V(0) = 0$, $V'(0) = Y$.*
Dann gilt $\mathrm{d}\exp_p|_{tx}(y) = \frac{1}{t}V(t)$.

Beweis. Betrachte die geodätische Variation $H(s,t) = \exp_p(t(x+st))$ und setze $J = \frac{\partial}{\partial s} H$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
J(0) &= \frac{\partial}{\partial s} H(0,0) \\
&= 0 \\
&= V(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J'(0) &= \nabla_t \frac{\partial}{\partial s} H(0,0) \\
&= \nabla_s \frac{\partial}{\partial t} H(0,0) \\
&= \nabla_s (x+sy)|_{s=0} \\
&= Y \\
&= V'(0)
\end{aligned}$$

Also ist $J(t) = V(t)$ für alle t.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\exp_p|_{tx}(y) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} \exp_p(tx+sy) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} \exp_p(t(x+s\frac{y}{t})) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \exp_p(t(x+s\frac{y}{t})) \\
&= \frac{1}{t} J(t) \\
&= \frac{1}{t} V(t)
\end{aligned}$$

□

Korollar 10.12.

$$\ker(\mathrm{d}\exp_p|_x) = \{V \in \mathfrak{J}_{\exp_p(tx)}(M) | V(0) = 0 \wedge V(1) = 0\}$$

Definition 10.13. Sei $c : I \to M$ eine Geodätische. $t_1 \neq t_2 \in I$ heißen *konjugiert*, falls ein $V \in \mathfrak{J}_c(M) \setminus \{0\}$ existiert mit $V(t_1) = V(t_2) = 0$.

11 Abstandsfunktion auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. für alle $p \in M$ ist g_p positiv definit.
Sei $c : [a, b] \to M$ eine (stückweise) glatte Kurve. Dann ist

$$L(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}\, t$$

die *Länge* von c.
Wir schreiben häufig $\langle \cdot, \cdot \rangle$ statt g_p und $\| \cdot \|$ für die zugehörige Norm.

Bemerkung 11.1. Sei $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ eine Umparametrisierung, dann gilt $L(c) = L(c \circ \varphi)$.

Mittels Länge dfinieren wir eine *Abstandsfunktion*

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

Definition 11.2 (Abstandsfunktion). Seien $p, q \in M$ der *Abstand* $d(p, q)$ ist definiert als

$$d(p, q) := \inf\{L(c)|c : [a, b] \to M \quad \text{stkw. glatt mit } c(a) = p \wedge c(b) = q\}$$

Wir wollen nun folgendes zeigen:

1. d ist stetig
2. (M, d) ist ein metrischer Raum, d.h.
   a) $d(p, q) = d(q, p)$ für alle $p, q \in M$
   b) $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
   c) $d(p, q) \leq d(p, q') + d(q', q)$ für alle $p, q, q' \in M$.
3. d induziert die ursprüngliche Topologie auf M.

Lemma 11.3 (offensichtliche Eigenschaften). *1. Symmetrie* ✓

2. $d(p, p) = 0$ ✓

3. Dreiecksungleichung ✓

Zu zeigen: Für $p \neq q$ ist $d(p, q) > 0$.
Um dies und Stetigkeit zu zeigen ist die Exponentialabbildung unser wichtigstes Werkzeug.

Sei $p \in M$ und $\exp_p : \mathcal{D}_p \subseteq T_pM \to M$ die Exponentialabbildung. Sei $v \in \mathcal{D}$ und $c_v : [0, 1] \to M$, $c_v(t) := \exp_p(tv)$ die eindeutig bestimmte Geodätische.
Sei $q = \exp_p(v) = c_v(1)$ dann ist

$$d(p, q) \leq \int_0^1 \|\dot{c}_v(t)\| \,\mathrm{d}\, t = \|v\|$$

Sei nun $0_p \in V \subseteq T_pM$ und $p \in U \subseteq M$, so dass $\exp_p : V \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $(p_n)_n \subseteq U \subseteq M$ eine Folge mit $p_n \xrightarrow{n\to\infty} p$. Dann gibt es $(v_n)_n \subseteq V$ mit $v_n \to 0_p$, wobei

$\exp_p(v_n) = p_n$.
Also $d(p, p_n) \leq \|v_n\| \to 0$, d.h. $d(p, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ ist stetig in p.
Mit der Dreiecksungleichung folgt nun, dass $d : M \times M \to \mathbb{R}$ stetig ist:
Sei $(p_n)_n \subseteq M$ eine Folge mit $p_n \to p$ und $(q_n)_n \subseteq M$ mit $q_n \to q$.

$$|d(p,q) - d(p_n, q_n)| \leq d(p, p_n) + d(q, q_n) \to 0$$

denn falls $d(p,q) \geq d(p_n, q_n)$:

$$d(p,q) \leq d(p, p_n) + d(p_n, q_n) + d(q_n, q)$$

sonst:

$$d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p) + d(p,q) + d(q, q_n)$$

Noch zu zeigen: $p \neq q \in M : d(p,q) > 0$.

Lemma 11.4. *Sei $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(0_p) := \{v \in T_pM \| \|v\| < \varepsilon\} \subseteq U$ und $B_\varepsilon(p) := \exp_p(B_\varepsilon(0_p))$*

1. *Sei $v \in B_\varepsilon(0_p)$. Dann ist $c_v : [0,1] \to M, c_v(t) = \exp_p(vt)$ bis auf Umparametrisierung die eindeutige kürzeste Verbindung von p nach $q = \exp_p(v) = c_v(1)$.*
   Insbesondere gilt $d(p,q) = \|v\|$.

2. *Sei $q \notin B_\varepsilon(p)$. Dann ist $d(p,q) \geq \varepsilon$.*

Zum Beweis von Lemma 11.4 benutzen wir das

Lemma 11.5 (Gauß-Lemma). *Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ mit $c_v(t) = \exp_p(vt)$ auf $[0,b]$ definiert. Dann ist $\exp_p$ in einer offenen Umgebung von $\{tv | 0 \leq t \leq b\} \subseteq T_pM$ diffeomorph und es gilt:*

1. *$d[\exp_p|_{tv}](v) = \dot{c}_v(t)$*

2. *Für $\eta \in T_{tv}T_pM \cong T_pM$ gilt:*

$$\langle \mathrm{d}\exp_p|_{tv}\eta, \dot{c}_v(t)\rangle = \langle \eta, v\rangle$$

Insbesondere gilt, falls $\eta \in v^\perp$, so ist $\mathrm{d}\exp_p|_{tv}\eta \perp \dot{c}_v(t)$ für alle t.

Beweis. 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\exp_p|_{tv}(v) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} \exp_p(tv + sv) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} c_v(t+s) \\
&= \dot{c}_v(t)
\end{aligned}$$

2. Wir haben in Satz 10.11:

$$\mathrm{d}\exp_p|_{tv}\eta = \frac{J(t)}{t}$$

wobei $J \in \mathfrak{J}_c(M)$ mit $J(0) = 0$ und $J'(0) = \nabla_t J(0) = \eta$.
Wir können wegen 1. annehmen, dass $\eta \perp v$ ist, d.h. $J(0) \perp v$ und $J'(0) = \eta \perp v$ und damit nach 10.11 $J(t) \perp \dot{c}_v(t)$ für alle t.

□

Beweis von Lemma 11.4. Sei $c : [a, b] \to M$ eine Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q = \exp_p(v)$, die volllkommen in $u \subseteq M$ enthalten ist. Sei $\tilde{c}(t) = \exp_p^{-1}(c(t))$. Schreibe

$$\tilde{c}(t) = \|\tilde{c}(t)\| \cdot \frac{\tilde{c}(t)}{\|\tilde{c}(t)\|} =: s(t) \cdot y(t)$$

Dann ist $y : [a, b] \to S^{n-1} \subseteq T_pM$. Betrachte nun das Vektorfeld $\tilde{V}$ auf $T_pM \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$\tilde{V}(x) = \frac{x}{\|x\|} \in T_xT_pM \equiv T_pM$$

und V das entsprechende Vektorfeld auf M, d.h.

$$V(q) = \mathrm{d}\exp_p|_{\exp_p^{-1}(q)}(\tilde{V}(\exp_p^{-1}(q)))$$

Dann gilt

1. $\|V(q)\| = 1$ (Gauß-Lemma)

2.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{c}(t) &= \dot{s}(t)y(t) + s(t)\dot{y}(t) \\ &= \dot{s}(t)\tilde{V}(\tilde{c}(t)) + s(t)\underbrace{\dot{y}(t)}_{\in \tilde{V}(\tilde{c}(t))^\perp}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\langle V(c(t)), \dot{c}(t)\rangle &= \langle \mathrm{d}\exp_p|_{\tilde{c}(t)}(\tilde{V}(\tilde{c}(t))), \mathrm{d}\exp_p|_{\tilde{c}(t)}(\tilde{c}(t))\rangle \\ &= \langle \tilde{V}(\tilde{c}(t)), \dot{\tilde{c}}(t)\rangle \\ &= \dot{s}(t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L(c) &= \int_a^b \|\dot c(t)\| \,\mathrm{d}\, t \\
&= \int_a^b \|\dot c(t)\| \|V(c(t))\| \,\mathrm{d}\, t \\
&\geq \int_a^b \langle \dot c(t), V(c(t))\rangle \,\mathrm{d}\, t && (*) \\
&= \int_a^b \dot s(t) \,\mathrm{d}\, t \\
&= s(b) - s(a) \\
&= \|v\| - 0
\end{aligned}
$$

Sei $a_0 := \max\{t \in [a,b] | c(t) = p\}$ und $b_0 := \min\{t \in [a,b] | c(t) \in \exp_p(\partial B_\varepsilon(0_p))\}$.
Sei $c : [a,b] \to M$ eine beliebige Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$. Dann gilt:

$$L(c) \geq L(c|_[a_0, b_0]) \geq \|v\|$$

$\Rightarrow 1.) d(p,q) = \|v\|$.
Gleichheit in ($*$) gilt genau dann, wenn $\dot c(t)$ parallel zu $V(c(t))$ ist.

1. Kürzeste Verbindung zwischen p und $q = \exp_p(v)$, $v \in B_\varepsilon(0_p)$ ist $c_v(t)$ (bis auf Umparametrisierung).
2. Sei $q \notin B_\varepsilon(p)$. Sei $c : [a,b] \to M$ mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$, a_0, b_0 wie oben. Dann gilt:

   $$L(c) \geq L(c|_{[a_0,b_0]}) \geq \|v\| = \varepsilon$$

   mit $v \in \partial B_\varepsilon(0_p)$.

□

Korollar 11.6. *(M,d) ist ein metrischer Raum.*

Beweis. $p \neq q \in M$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $q \notin B_\varepsilon(p)$ und damit $d(p,q) \geq \varepsilon > 0$. □

Satz 11.7. *Die von d induzierte Topologie auf M ist die ursprüngliche Topologie.*

Beweis.

1. Sei U offen bezüglich der von d induzierten Topologie, d.h. für $p \in U$ existierte ein $\varepsilon > 0$ mit $\exp_p : B_\varepsilon(0_p) \to B_\varepsilon(p) \subseteq U$ ist ein Diffeomorphismus.
   Dann ist $B_\varepsilon(p)$ offen bezügliche der ursprünglichen Topologie und somit auch U.
2. Sei $U \subseteq M$ offen bezüglich der ursprünglichen Topologie. Sei $p \in M$. Dann existieren $V \subseteq T_pM, W \subseteq M$ mit $W \subseteq U$, so dass $\exp_p : V \to W$ ein Diffeomorphismus ist.
   Dann existiert aber ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0_p) \subseteq V$, also $\exp_p(B_\varepsilon(0_p)) = B_\varepsilon(p) \subseteq W \subseteq U$, was nichts anderes bedeutet, als dass U offen ist bezüglich der von d induzierten Topologie.

□

Definition 11.8 (Injektivitätsradius). Sei $p \in M$

$$\operatorname{injrad}(p) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R} | \exp_p : B_\varepsilon(0_p) \to B_\varepsilon(p) \text{ ist ein Diffeomorphismus}\}$$

11.1 Energie & Länge

Sei $c : [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve.

$$E(c) := \frac{1}{2}\int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 \,\mathrm{d}\,t$$
$$L(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}\,t$$

Satz 11.9. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve. Dann gilt:*

$$L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c)$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis.

$$\begin{aligned} L(c)^2 &= \left(\int_a^b \|\dot{c}(t)\| \cdot 1 \,\mathrm{d}\,t\right)^2 \\ &\leq \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 \,\mathrm{d}\,t \int_a^b 1^2 \,\mathrm{d}\,t \\ &= 2E(c)(b-a) \end{aligned}$$

Die Gleichheit ergibt sich genau dann, wenn $\dot{c}(t)$ proportional zu 1 ist, d.h. wenn $\dot{c}(t)$ konstant ist. □

Korollar 11.10. *Eine Kurve c minimiert die Energie unter allen Kurven, die p und q verbinden genau dann, wenn c die Länge minimiert und proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.*

Korollar 11.11. *Jede längenminimierende Kurve von p nach q ist (bis auf Umparametrisierung proportional zur Bogenlänge) eine Geodätische.*

11.2 Vollständigkeit/Hopf-Rinow

Lemma 11.12. *Sei $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von 0_p in TM und eine offene Umgebung U von $(p,p) \in M \times M$, so dass*

$$\pi \times \exp : V \to U$$

ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Zeige, dass $\mathrm{d}\,\pi \times \exp_{0_p} : T_{0_p}TM \to T_{(p,p)}(M \times M) = T_pM \oplus T_pM$ ein Isomorphismus ist.

1. Sei $v \in T_pM$ und c eine Kurve in M mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v$. Sei $X \in V_c(M)$ mit $X(0) = 0_p$. Dann ist X eine Kurve in TM mit $X(0) = 0_p$ und $\pi \circ X = c$. Außerdem gilt:

$$\mathrm{d}(\pi \times \exp)|_{0_p}([X]) = (\dot{c}(0), *) = (v, *) \neq (0,0)$$

2. Sei $v \in T_pM$ und $\tilde{c}(t) = tv$ mit $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\pi \times \exp)(tv) = (p, c_v(t))$ und damit

$$\mathrm{d}(\pi \times \exp)|_{0_p}(tv) = (0, v)$$

Dies ergibt insgesamt die Surjektivität von $\mathrm{d}(\pi \times \exp)|_{0_p}$ und damit die Bijektivität, nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen. $\square$

Korollar 11.13. *Zu $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass*

$$\exp_q : B_{2\varepsilon}(0_q) \to B_{2\varepsilon}(q)$$

ein Diffeomorphismus ist für alle $q \in B_\varepsilon(p)$.

Beweis. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $B_{2\varepsilon}(q) \subseteq V$ für alle $q \in B_\varepsilon(p)$. $\square$

Lemma 11.14 (Hopf-Rinow). *Sei $p \in M$, Sei $R > 0$ mit $B_R(0_p) \subseteq \mathcal{D}(\exp_p)$. Zu $q \in M$ mit $d(p,q) < R$ gibt es einen Vektor $v \in B_R(0_p)$ mit $\|v\| = d(p,q)$ und $\exp_p(v) = q$.*
Insbesondere gilt:

1. *$c_v(t)$, $0 \leq t \leq \|v\|$ ist eine kürzeste Verbindung von p nach q*
2. *Für $0 < r \leq R$ ist $B_r(p) := \exp_p(B_r(0_p)) = \{q \in M | d(p,q) < r\}$ und für $r < R$ ist $\overline{B_r(p)}$ kompakt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\exp_q : B_{2\varepsilon}(0_q) \to B_{2\varepsilon}(q)$ ein Diffeomorphismus für alle $q \in B_\varepsilon(q)$.
$L(c_k) \leq d(p,q) + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_{\to} 0.$
Zeige es existiert ein $v' \in T_pM$ mit $\|v\| = 1$, so dass $q' = \exp_p(\varepsilon v)$ gilt:

$$\begin{aligned} d(p,q) &= d(p,q') + d(q',q) \\ &= \varepsilon + d(q',q) \end{aligned}$$

Dies gilt, denn: Wähle q_k'= letztes Mal, wenn c_k $\exp_p(\partial B_\varepsilon(0_p))$ durchstößt. Dann konvergiert eine Teilfolge $q_k' \to q' \in \exp_p(\partial B_\varepsilon(0_p)))$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(p,q) &\leq d(p,q_k') + d(q_k',q) \\ &\leq L(c_k) \\ &\leq d(p,q) + \varepsilon_k \end{aligned}$$

Und damit : $d(p,q) \leq d(p,q') + d(q',q) \leq d(p,q)$.

Sei nun $c := c_v$ die zugehörige Geodätische. Setze $A := \{t \in [0, d(p,q)] | d(p,q) = t + d(c(t),q)\}$.
Wir wissen, dass $\varepsilon \in A$. Mit $t \in A$ gilt $[0,t] \subseteq A$, denn für $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} d(p,q) &\geq d(p,c(s)) - d(c(s),q) \\ &= s + d(c(s),q) \\ &= s + (t-s) + d(c(t),q) \\ &= d(p,q) \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen $A = [0, d(p,q)]$. Sei $t_0 = \max(A) < d(p,q)$, $p_0 = c(t_0)$
$d(p,q) = d(p,p_0) + d(p_0,q) = t_0 + d(p_0,q)$
Wähle $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\exp_q : B_{2\varepsilon_0}(0_q) \to B_{2\varepsilon_0}(q)$ für alle $q \in B_{\varepsilon_0}(p)$.
Dann gibt es $w \in T_{p_0}M$ mit $\|w\| = \frac{\varepsilon_0}{2}$, so dass $d(p_0,q) = \frac{\varepsilon_0}{2} + d(q'',q)$ mit $q'' = \exp_{p_0}(w)$.
Sei $p_1 = c(t_0 - \frac{\varepsilon_0}{2})$ dann ist $d(p_1,q'') \leq d(p_1,p_0) + d(p_0,q'') \leq \varepsilon_0$.
Nun ist aber

$$\begin{aligned} d(p,q) &= d(p,p_1) + d(p_1,p_0) + d(p_0,q'') + d(q'',q) \\ &= d(p,p_1) + \varepsilon_0 + d(q'',q) \end{aligned}$$

Dann gilt $d(p_1,q'') = \varepsilon_0$, d.h. $q'' \in B_{2\varepsilon_0}(p_1)$ und $p_1 \in B_{\varepsilon_0}(p_0)$.
Damit ist aber die einzige Kürzeste Verbindung von p_1 nach q eine Geodätische.
$\Rightarrow w = \frac{\varepsilon_0}{2}\dot{c}(t_0)$
$\Rightarrow q'' = c(t_0 + \frac{\varepsilon_0}{2})$
$\Rightarrow t_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} \in A$ Ein Widerspruch $\Rightarrow A = [0, d(p,q)]$
$\Rightarrow$ für alle $q \in B_r(p)$ existiert ein $v \in T_pM$ mit $q = \exp_p(v)$ und $\|v\| = d(p,q)$.

Zeige nun für $r < R$, dass $\overline{B_r(p)}$ kompakt ist.
Sei $(p_i)_i \subseteq \overline{B_r(p)}$ eine Folge

1. $t_i := d(p,p_i) \leq r$
2. Es existieren $v_i \in T_pM, \|v_i\| = 1 : p_i = \exp_p(t_iv_i) =: c_i(t_i)$.
   Dann existieren Teilfolgen $v_i \to v \in T_pM$ mit $\|v\| = 1$ udn $t_i \to T \leq r$.
   Setze $q = \exp_p(Tv)$.
   Es gilt für eine geeignete Teilfolge:

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} p_i &= \lim_{i\to\infty} \exp_p(t_iv_i) \\ &= \exp_p(\lim_{i\to\infty} t_iv_i) \\ &= \exp_p(Tv) \\ &= q \end{aligned}$$

□

Satz 11.15 (Hopf-Rinow). *Sei (M,g) eine zusammenhängende, Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *(M,d) ist vollständig als metrischer Raum, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.*
2. *$\mathcal{D}(\exp_p) = T_pM$*
3. *M ist geodätisch vollständig ($:\Leftrightarrow \mathcal{D}(\exp_q) = T_qM \quad \forall q \in M$)*
4. *Abgeschlossene metrische Bälle in p $\overline{B_r(p)}$ sind kompakt für alle $r \geq 0$.*

5. *Abgeschlossene metrische Bälle $\overline{B_r(q)}$ sind kompakt für alle $q \in M$*

Jede dieser Aussagen impliziert, dass zu allen $p, q \in M$ eine kürzeste Verbindung von p nach q existiert. Diese ist dann eine Geodätische.

Beweis. Zeigen: $1.) \Rightarrow 3.) \overset{\checkmark}{\Rightarrow} 2.) \Rightarrow 4.) \overset{\checkmark}{\Rightarrow} 5.) \overset{\checkmark}{\Rightarrow} 1.)$ und $2.) \Rightarrow$Existenz der kürzesten Verbindung.
Dabei wird $2.) \Rightarrow *$ jeweils durch Lemma 11.14 impliziert. Also bleibt nur noch $1.) \Rightarrow 3.)$ zu zeigen: Sei c eine Geodätische in M mit maximaneln Definitionsbereich $[a, b]$. Nehme an $b < \infty$.
Sei $t_n \in]a, b[$ mit $t_n \nearrow b$.
Dann ist $(c(t_n))_n$ eine Cauche-Folge in M, denn $d(c(t_n), c(t_m)) \leq \|\dot{c}\|(t_n - t_m)$.
Sei $p = \lim_{n\to\infty} c(t_n) \in M$.
Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\exp_q : B_{2\varepsilon}(0_q) \to B_{2\varepsilon}(q)$ ein Diffeomorphismus ist für alle $q \in B_\varepsilon(p)$.
Für n groß genug ist $c(t_n) \in B_\varepsilon(p)$.
Dann gilt für alle Geodätische c durch $c(t_n)$ ist zumindest auf einem Intervall $\frac{2\varepsilon}{\|\dot{c}\|}$ definiert.
Für n groß genug ist c auf $t_n + \frac{2\varepsilon}{\|\dot{c}\|} > b$ definiert. Ein Widerspruch.
$\Rightarrow b = \infty$.
Analog für a. □

Bemerkung 11.16. Die Existenz einer kürzesten Verbindung ist schwächer als 1.) - 5.). Bspeispielsweise besitzt $D := \{v | \|v\| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{eukl}}$ immer eine kürzeste Verbindung, denn die Geodätischen sind Geraden eingeschränkt auf D und D ist konvex. Allerdings ist D bezüglich der euklidischen Norm, die durch g induziert wird nicht abgeschlossen, d.h. wir können Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ finden, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^2$ konvergieren, das nicht in D. Diese Folgen sind Cauchy-Folgen in D, aber nicht konvergent in D. Also ist D nicht vollständig, obwohl immer eine kürzeste Verbindung existiert.

Korollar 11.17. *Sei M eine zusammenhängende, kompakte, Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist M vollständig.*

12 Zweite Variation der Energie

Zur Erinnerung: Erste Variation der Energie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\bigg|_{s=0} E(c_s) = -\int_a^b \langle X, \nabla_t \dot{c}\rangle \,\mathrm{d}\,t + \langle X(b), \dot{c}(b)\rangle - \langle X(a), \dot{c}(a)\rangle$$

Wobei X das zur Variation c_s gehörige Variationsfeld ist.
Sei nun c eine nur stückweise glatte Kurve, d.h. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, so dass $c|_{[t_{i-1},t_i]}$ glatt ist.
Sei $H :] - \varepsilon, \varepsilon[\times [a, b] \to M$ stetig und glatt auf $] - \varepsilon, \varepsilon[\times]t_{i-1}, t_i[$ eine stückweise glatte Variation.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\bigg|_{s=0} E(c_s) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\bigg|_{s=0} E(c_s|_{[t_{i-1},t_i})\\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle X, \nabla_t \dot{c}\rangle \,\mathrm{d}\,t + \langle X(t_i), \dot{c}(t_i^-)\rangle - \langle X(t_{i-1}), \dot{c}(t_{i-1}^+)\rangle\right)\\
&= -\int_a^b \langle X, \nabla_t \dot{c}\rangle \,\mathrm{d}\,t + \sum_{i=1}^{k-1}\langle X(t_i), \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+)\rangle + \langle X(b), \dot{c}(b)\rangle - \langle X(a), \dot{c}(a)\rangle
\end{aligned}$$

Bemerkung 12.1. Sei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\big|_{s=0} E(c_s) = 0$ für alle eigentlichen Variationen einer stückweise glatten Kurve $c : [a, b] \to M$. Dann ist c eine Geodätische, denn:
Sei t_i mit $\dot{c}(t_i^-) \neq \dot{c}(t_i^+)$. Sei $\eta \in T_{c(t_i)}M$ mit $\langle \eta, \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+)\rangle > 0$.
Sei $\eta(t)$ das parallele Vektorfeld längs c, das durch η bestimmt ist.
Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t_i) = 1$, $\varphi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}\setminus]t_{i-1}, t_{i+1}[$.
Setze $X(t) = \varphi(t)\eta(t)$.

$$\begin{aligned}
0 &= \langle X(t_i), \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+)\rangle\\
&= \langle \eta, \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^-)\rangle\\
&> 0
\end{aligned}$$

Ein Widerspruch.

Satz 12.2. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische.*
Sei $H :] - \varepsilon, \varepsilon[\times [a, b] \to M$ eine eigentliche Variation von c und X das zugehörige Variationsfeld.
Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,s^2}\bigg|_{s=0} E(c_s) = \int_a^b \langle \nabla_t X, \nabla_t X\rangle - \langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle \,\mathrm{d}\,t$$

Beweis. In Satz 7.19 auf Seite 50 hatten wir gezeigt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\bigg|_{s=0} E(c_s) = \int_a^b \langle \nabla_t \frac{\partial}{\partial s} H, \frac{\partial}{\partial t} H\rangle \,\mathrm{d}\,t$$

Und damit

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, s^2}\right|_{s=0} E(c_s) &= \int_a^b \nabla_s \nabla_t \frac{\partial}{\partial s} H \frac{\partial}{\partial t} h + \langle \nabla_t \frac{\partial}{\partial s} H, \nabla_s \frac{\partial}{\partial t} H \rangle \,\mathrm{d}\, t \\ &= \int_a^b \langle R(X, \dot c)X, \dot c \rangle \,\mathrm{d}\, t + \int_a^b \langle \nabla_t \nabla_t \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} H}_{=X}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} H}_{=\dot c} \rangle \,\mathrm{d}\, t + \int_a^b \langle \nabla_t \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} H}_{=X}, \nabla_t \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} H}_{=X} \rangle \,\mathrm{d}\, t\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $\int_a^b \langle \nabla_t \nabla_s X, \dot c \rangle \,\mathrm{d}\, t = 0$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle \nabla_t \nabla_s X, \dot c \rangle \,\mathrm{d}\, t &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \langle \nabla_t X, \dot c \rangle - \langle \nabla_s X, \underbrace{\nabla_t \dot c}_{=0} \rangle \,\mathrm{d}\, t \\ &= [\langle \nabla_s X, \dot c \rangle]_a^b \\ &= 0, && \text{da } X \text{ eigentlich}\end{aligned}$$

□

Definition 12.3. Sei M eine zusammenhängende, Riemannsche Mannigfaltigkeit.
$\mathrm{diam}(M) := \sup\{d(p,q) | p, q \in M\}$ heißt *Durchmesser* von M.

Bemerkung 12.4. Sei M eine zusammenhängende, vollständige, Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt: $\mathrm{diam}(M) < \infty \Leftrightarrow M$ ist kompakt

Beweis.

"$\Leftarrow$" M ist kompakt $\Rightarrow M \times M$ ist kompakt.
$d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist stetig. $\Rightarrow d$ ist beschränkt und nimmt Maximum an. $\Rightarrow \mathrm{diam}(M) \leq R < \infty$.

"$\Rightarrow$" Sei $\mathrm{diam}(M) = R < \infty$. Hopf-Rinow: Vollständigkeit $\Rightarrow M = \overline{B_R(p)}$ ist kompakt für alle $p \in M$.

□

Satz 12.5 (Bonnet-Myers). *Sei M^n eine vollständige, zusammenhängende, Riemannsche Mannigfaltigkeit von Dimension n.*
Nehme an es existiert ein $\kappa > 0$, so dass $\mathrm{ric} \geq (n-1)\kappa g$.
Dann gilt: M ist kompakt und $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Beweis. Seien $p, q \in M$ mit $p \neq q$. Setze $d := d(p,q)$. Da M vollständig ist folgt unter Zuhilfenahme von Hopf-Rinow, dass eine minimale Geodätische $c : [0, d] \to M$ mit $c(0) = p$ und $c(d) = q$ existiert. Sei $E \in T_p M$ mit $E \perp \dot c(0)$ und $\|E\| = 1$ und $E(t)$ das zugehörige parallele Vektorfeld längs c.

Sei $X(t) = \sin(\frac{\pi}{d}t)E(t)$. Dann ist X glatt und $X(0) = X(d) = 0$. Sei $H :]-\varepsilon, \varepsilon[\times[a,b] \to M$ die zu X gehörige Variation. Dann gilt für $c_s(t) = H(s,t)$:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, s^2}\right|_{s=0} E(c_s) \\
&= \int_0^d \|\nabla_t X\|^2 - \langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle \,\mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^d \|\frac{\pi}{d}\cos(\frac{\pi t}{d})E(t)\|^2 - \sin(\frac{\pi t}{d})^2 R(E, \dot{c})\dot{c}E \,\mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^d \frac{\pi^2}{d^2}\cos^2(\frac{\pi t}{d}) - \sin^2(\frac{\pi t}{d})\langle R(E, \dot{c})\dot{c}, E\rangle \,\mathrm{d}\, t
\end{aligned}
$$

Sei nun $E_1, \dots, E_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM und $E_1(t), \dots, E_n(t)$ die zugehörigen parallelen Vektorfelder.
Summation über $i = 1, \dots, n$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^d (n-1)\frac{\pi^2}{d^2}\cos^2(\frac{\pi t}{d}) - \sin^2(\frac{\pi t}{d}) \underbrace{\mathrm{ric}(\dot{c}, \dot{c})}_{\geq \kappa(n-1)\underbrace{\langle \dot{c}, \dot{c}\rangle}_{=1}} \,\mathrm{d}\, t \\
&\leq (n-1)\int_0^d \frac{\pi^2}{d^2}\cos^2(\frac{\pi t}{d}) - \sin^2(\frac{\pi t}{d})\kappa \,\mathrm{d}\, t \\
&= (n-1)\frac{\pi^2 - \kappa d^2}{2d}
\end{aligned}
$$

Also $0 \leq \pi^2 - \kappa d^2$ und damit:

$$
d \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}
$$

Aus der Bemerkung 12.4 folgt dann auch: M ist kompakt. □

Wir betrachten ein Gegenbeispiel für den Fall, dass eine Schranke an die Skalarkrümmung vorliegt:
Seien M_1, M_2 Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $M := M_1 \times M_2$, $g_M := g_1 + g_2$, $T_pM = T_{(p_1,p_2)}M_1 \times M_2 = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$

$$
\mathrm{ric} = \begin{pmatrix} \mathrm{ric}_1 & \\ & \mathrm{ric}_2 \end{pmatrix}
$$

$\mathrm{scal}_M = \mathrm{scal}_1 + \mathrm{scal}_2$ Betrachte nun $M := S^{n-1} \times \mathbb{R}$, $n \geq 3$.
$\mathrm{scal}_M = \underbrace{(n-2)}_{=:\kappa}(n-1) + 0 \geq 0$, aber $\mathrm{diam}(M) = \infty$.

13 Fundamentalgruppe & Überlagerungen

Seien X, Y topologische Mannigfaltigkeiten. $f_i : X \to Y, i = 1, 2$.

Definition 13.1. Eine *Homotopie* von f_0 nach f_1 relativ $A \subseteq X$ ist eine stetige Abbildung $H : I \times X \to Y$ mit $H(0, \cdot) = f_0, H(1, \cdot) = f_1$ und $H(s, x) = f_0(x)$ für alle $s \in I$ und $x \in A$.

Beispiele 13.2.

1. $f_i : X \to \mathbb{R}^2$, $H(s, x) = (1 - s)f_0(x) + sf_1(x)$ ist eine Homotopie von f_0 nach f_1.
2. $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar.
3. $S^n \setminus \{p\}$ ist kontrahierbar, da $h : S^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ die stereografische Projektion ein Homöomorphismus ist.

Notation: $f_0 \simeq_A f_1$

Lemma 13.3. *Seien X, Y, Z topologische Mannigfaltigkeiten. $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.*

1. *Homotopie relativ zu A ist eine Äquivalenzrelation auf $\{$stetige Abbildungen $f : X \to Y\}$*
2. *Seien $f_i : X \to Y$ homotop relativ zu A, $g_i : Y \to Z$ homotop relativ zu B und $f_0(A) \subseteq B$. Dann ist $g_0 \circ f_0$ homotop zu $g_1 \circ f_1$.*

Beweis.

1. a) $f \simeq_A f : H(s, x) = f(x)$
   b) $f_0 \simeq_A f_1 \Rightarrow f_1 \simeq_A f_0$, durch $H'(s, x) = H(1 - s, x)$.
   c) $f_0 \simeq_A f_1, f_1 \simeq_A f_2$: Sei $H_0 : I \times X \to Y$ die Homotopie von f_0 und f_1 und $H_1 : I \times X \to Y$ die Homotopie von f_1 und f_2. Setze
   $$H(s, x) := \begin{cases} H_0(2s, x) & s \leq 0.5 \\ H_1(2s - 1, x) & s \geq 0.5 \end{cases}$$
2. $f_0 \simeq f_1$ mittels H und $g_0 \simeq g_1$ mittels H'. Dann ist $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ über $H'(s, H(s, x))$.

□

13.1 Erste Homotopiegruppe

Betrachte $c : I \to X$ ein Weg von $p := c(0)$ nach $q := c(1)$.

Definition 13.4.

1. X heißt *wegzusammenhängend*, falls für alle $p, q \in X$ ein Weg von p nach q existiert.
2. Sei $c_i : I \to X$ $(i = 0, 1)$ mit $c_0(0) = c_1(0) = p$ und $c_0(1) = c_1(1) = q$. Eine *eigentliche Homotopie* von c_0 nach c_1 ist eine Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$, d.h. $H(s, 0) = p$ und $H(s, 1) = q$ für alle s.
   c_0 und c_1 heißen dann *eigentlich homotop*.

Bemerkung 13.5. c_0, c_1 stückweise glatt, X differenzierbar. Dann wird obige Definition verschärft durch: $c_0 \simeq c_1 \Leftrightarrow$ Es gibt eine stückweise glatte Homotopie.

Sei $c : I \to X$ ein Weg von p nach q.

Dann definieren wir den inversen Weg c^{-1} wie folgt:

$$c^{-1} : I \to X, c^{-1}(t) = c(1-t)$$

Weiterhin kann für zwei Wege $c, c' : I \to X$ mit $c(1) = c'(0)$ eine Verknüpfung bzw. Zusammensetzung definiert werden. Dieser Weg wird mit $c*c'$ bezeichnet und folgendermaßen definiert:

$$c * c' : I \to X, (c * c')(t) := \begin{cases} c(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Lemma 13.6. 1. *Für Wege $c, c' : I \to X$ mit $c \simeq c'$ folgt für die inversen Wege $c^{-1} \simeq c'^{-1}$.*

2. *Seien $c_i, c_i' : I \to X$ mit $i = 0, 1$ Wege in X und $c_0 \simeq c_1$, $c_0' \simeq c_1'$ und $c_0(1) = c_0'(0)$. Dann gilt $c_0 * c_0' \simeq c_1 * c_1'$.*

3. *Für drei Wege $c, c', c'' : I \to X$ mit $c(1) = c'(0)$, $c'(1) = c''(0)$ gilt: $(c * c') * c'' \simeq c * (c' * c'')$.*

4. *Sei x der konstante Weg mit Wert $x \in X$. Sei c ein Weg von p nach q. Dann gilt: $*c \simeq c \simeq c * q$*

5. *Sei c ein Weg in X. Dann ist $c * c^{-1} \simeq c(0)$*

Beweis. Wir zeigen nur die 3.) Behauptung. Dazu definieren wir die Homotopie H wie folgt

$$H(s,t) := \begin{cases} c(4t - 2st) & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ c'(4t - s - 1) & \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ c''(2t - 2s + 2st - 1) & \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Damit gilt

$$H(0,t) = \begin{cases} c(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ c'(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c''(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (c * c') * c''$$

$$H(1,t) = \begin{cases} c(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ c''(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} = c * (c' * c'')$$

Da unser H klarerweise stetig ist, folgt die Behauptung. $\square$

Definition 13.7. Eine *Schleife* in $x \in X$ ist ein Weg $c : I \to X$ mit $c(0) = c(1) = x$.

Definition 13.8. Die Menge der eigentlichen Homotopieklassen von Schleifen in $x \in X$ $\pi_1(X, x)$ mi der von Lemma 13.6 induzierten Gruppenstruktur heißt *erste Homotopiegruppe* von X zum Basispunkt x.

Kann als Abbildungen von $(S^1, p_0) \to (X, x)$ aufgefasst werden.
$\rightsquigarrow (S^n, p_0) \to \pi_n(X, x)$.
Zuordnung (Funktor) $(X, x) \to \pi_1(X, x)$.

$f : (X, x) \to (Y, y), \quad f(x) = y$ oder
$f_\#, f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ induzierte Abb.
$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$

Definition 13.9 (Homotopieäquivalenz)**.** Eine Abbildung $f : (X, x) \to (Y, y)$ heißt *Homotopie-äquivalenz*, falls eine Abbildung $g : (Y, y) \to (X, x)$ existiert mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

Korollar 13.10. *f Homotopieäquivalenz $\Rightarrow$ $f_\# : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ ist ein Isomorphismus.*

Beispiele 13.11. $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{1\}$

13.2 Abhängigkeit vom Basispunkt

Sei c ein Weg in X von y nach x. Sei c' eine Schleife in x. Dann ist $c * c' * c^{-1}$ eine Schleife in y und $c' \simeq c'' \Rightarrow c * c' * c^{-1} \simeq c * c'' * c^{-1}$

$$i_c : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y), [c'] \mapsto [c * c' * c^{-1}]$$

Satz 13.12. *$i_c : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ ist ein Isomorphismus, der nur von der Homotopieklasse von c abhängt.*

Beweis. $i_{c^{-1}} : \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$
$i_c \circ i_{c^{-1}} = \mathrm{id} = {}_{c^{-1}} \circ i_c \quad \to \quad i_c$ ist ein Isomorphismus □

Korollar 13.13. *Sei X wegzusammenhängend, so hängt die Homotopieklasse von $\pi_1(X, x)$ nicht von x ab.*

Diese Homotopieklasse bzw. ein Repräsentant dieser Klasse heißt *Fundamentalgruppe* von X. Schreibe $\pi_1(X)$.

Definition 13.14. X heißt *einfach zusammenhängend*, falls

1. X wegzusammenhängend ist und
2. für alle c_0, c_1 Wege in x mit gleichen Anfangs und Endpunkt gilt, dass $c_0 \simeq c_1$.

Bemerkung 13.15. Sei X wegzusammenhängend. Dann gilt:
X ist einfachzusammenhängend genau dann, wenn $\pi_1(X) \cong \{1\}$ bzw. $\pi_1(X, x) = \{1\}$ für ein $x \in X$.

13.3 Überlagerungen

Definition 13.16. 1. Sei $p : E \to X$. Dann wird $x \in X$ *gleichmäßig überlagert* von p, falls eine Umgebung U von x in X existiert, so dass

   a) $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in A} U_\alpha \quad U_\alpha \subseteq E$ offen und

   b) $P|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ ein Homöomorphismus ist für alle $\alpha \in A$.

2. $p : E \to X$ heißt *Überlagerung*, falls

   a) p surjektiv ist und

   b) jedes $x \in X$ gleichmäßig von p überlagert wird.

Beispiele 13.17. 1. Sei $E := \bigsqcup_{\alpha \in A} X$ die disjunkte Vereinigung von A Kopien des Grundraums und $p : E \to X$ die kanonische Projektion. Dann ist $p : E \to X$ klarerweise eine Überlagerung.

2. Die surjektive Abbildung $p : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}, r \mapsto e^{ir}$ ist eine Überlagerung, denn für $z \in S^1$ finden wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $z = e^{ir}$. Nun wählen wir als $U := S^1 \setminus -z$. Dann gilt für beliebige $k \in \mathbb{Z}$, dass $e^{]r-\pi, r+\pi[+2\pi k} = U$ und die Abbildung ein Homöomorphismus ist. Zu guter letzt gilt auch $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{Z}}]r - \pi, r + \pi[+2\pi k$.

3. Die obige Konstruktion lässt sich analog auf Tori ausweiten und wir erhalten die Überlagerung $\mathbb{R}^n \to S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n, (r_1, \ldots, r_n) \mapsto (e^{ir_1}, \ldots, e^{ir_n})$.

4. Allgemeiner gilt sogar, dass für zwei Überlagerungen $p_1 : E_1 \to X_1$ und $P_2 : E_2 \to X_2$ auch das Produkt wieder $(p_1, p_2) : E_1 \times E_2 \to X_1 \times X_2$ eine Überlagerung darstellt.

Bemerkung 13.18. Für differenzierbare Mannigfaltigkeiten verlangen wir, dass p glatt und $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ ein Diffeomorphismus ist.

13.4 Liften von Abbildungen

Definition 13.19. Gegeben $p : E \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung. Dann heißt $g : Y \to E$ *Lift*, falls g stetig ist und $p \circ g = f$.

Satz 13.20. *Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$, $g, h : Y \to E$ stetig mit $p \circ h = p \circ h = f$.*
Dann gilt falls Y zusammenhängend ist und $y \in Y$ existiert mit $g(y) = h(y) \in E$, dass $f = g$.

Beweis. Sei $Z := \{y \in Y | g(y) = h(y)\} \neq \varnothing$.

1. $Y \setminus Z$ ist offen: Sei $y \in Y \setminus Z$, d.h. $h(y) \neq g(y)$. Sei $x = p(h(y)) = p(g(y))$. Dann existiert $U \ni x$, so dass $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow g(y) \in U_\alpha$ und $h(y) \in U_\beta$, wobei $\alpha \neq \beta$.
   Da g und h stetig sind existieren $V \ni y$ mit $g(V) \subseteq U_\alpha$ und $h(V) \subseteq U_\beta$.
   Da $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ gilt für alle $y' \in V : g(y') \neq h(y') \quad \to \quad V \subseteq Y \setminus Z \quad \to \quad Y \setminus Z$ ist offen.

2. Z offen: Sei $y_0 \in Z$, d.h. $h(y_0) = g(y_0)$. Sei $x_0 = p(h(y_0))$, $U \ni x_0$, so dass $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in A} U_\alpha$.
   Sei $\alpha \in A$, so dass $g(y_0) = h(y_0) \in U_\alpha$.
   Dann existiert ein $V \ni y_0$ mit $g(V) \subseteq U_\alpha$ und $h(U) \subseteq U_\alpha$. Außerdem ist $p(g(y')) = p(h(y'))$.
   $p|_{U_\alpha}$ ist ein Homöomorphismus $\Rightarrow \quad g(y') = h(y')$ für alle $y' \in V$.
   $\Rightarrow V \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad Z$ ist offen.

□

Satz 13.21. *Seien $f : I \times Y \to X$, $g : Y \to E$ stetig und $p : E \to X$ eine Überlagerung mit $p \circ g(y) = f(0, y)$. Dann existiert genau ein $h : I \times Y \to E$ mit $h(0, y) = g(y)$ für alle $y \in Y$.*

Korollar 13.22. *Sei $c : I \to X$ ein Weg und $p : E \to X$ eine Überlagerung. Zu jedem $z \in E$ über $c(0) = p(z)$ existiert ein eindeutiger Lift $c_z : I \to E$ mit $c_z(0) = z$.*

Korollar 13.23. *Sei $H : I \times I \to X$ stetig und $p : E \to X$ eine Überlagerun. Dann existiert zu jedem $z \in p^{-1}(H(0, 0))$ genau ein $H_z : I \times I \to E$ mit $H_z(0, 0) = z$.*

Beweis von Satz 13.21. Es existiert eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ mit $f|_{[t_{i-1}, t_i} \subseteq U_i$ mit $p^{-1}(U_i) = \dot{\bigcup}_{\alpha_i \in A_i} U_{\alpha_i}$, $p : U_{\alpha_i} \to U_i$ ein Homöomorphismus.

1. Sei $y_0 \in Y$ mit $g(y_0) \in U_{\alpha_0}$. Dann existiert ein $V_0' \ni y_0$ mit $g(V_0') \subseteq U_{\alpha_0}$ und ein $V_0'' \ni y_0$ mit $f([t_0, t_1] \times V_0'') \subseteq U_0$.
   Setze $V_0 = V_0' \cap V_0''$.
   Definiere $h_0(t, y) = \tau(f(t, y))$, wobei $\quad \tau : U_0 \to U_{\alpha_0}$ das Inverse von $p|_{U_{\alpha_0}}$ ist. Dann ist $h_0(0, y) = g(y)$.

2. Induktion:
   Sei $h_{i-1}(0, y) = g(y)$. Wähle α_{i-1} mit $h_{i-1}(t_{i-1}, y_0) \in U_{\alpha_{i-1}}$. Sei $y_0 \in V_{i-1}$.
   Analog zum ersten Schritt: $h_i'(t, y) = \tau(f(t, y)) \quad \tau : U_{i-1} \to U_{\alpha_{i-1}}$
   $h_i(t, y) := \begin{cases} h_{i-1}(t, y) & 0 \le t \le t_{i-1} \\ h_i'(t, y) & t_{i-1} \le t \le t_i \end{cases}$
   Lift h von f definiert auf $I \times V_{y_0}$.

   Sei nun $y_0, y_1 \in Y$ und $y \in V_{y_0} \cap V_{y_1}$. Dann gilt $h_{y_0}(0, y) = g(y) = h_{y_1}(0, y)$ und $p(h_{y_0}(t, y)) = p(h_{y_1}(t, y)) = f(t, y)$.
   Nach Satz 13.20 gilt dann $h_{y_0} = h_{y_1}$
   Das bedeutet aber nichts anderes, als dass wir die h_y alle zu einem globalen $h : I \times Y \to E$ verkleben können. Aus der Stetigkeit der h_y folgt dann auch die Stetigkeit von h.
   Da I zusammenhängend ist, ist h eindeutig.

□

Korollar 13.24. *Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung, $z \in E$, $p(z) = x \in X$. Dann ist $p_\# : \pi_1(E, z) \to \pi_1(X, x)$ injektiv.*

Beweis. Sei $c : I \to E$ eine Schleife in z. Dann ist $p \circ c$ eine Schleife in x.
Annahme: $p \circ c$ ist nullhomotop. Sei $H : I \times I \to X$ die zugehörige Homotopie. Dann existiert genau ein $H_z : I \times I \to E$ mit $H(0,0) = z$ und $H_z(1,t) = z, H_z(0,t) = c(t), H_z(s,0) = H_z(s,1) = z$. Damit ist H_z eine eigentliche Homotopie von c nach z und damit ist c schon nullhomotop in E.
$\Rightarrow p_\#$ ist injektiv. □

Satz 13.25. *Sei Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetig und $p : E \to X$ eine Überlagerung. Dann existiert ein $g : Y \to E$ mit $p \circ g = f$ mit $g(y_0) = z_0 \Leftrightarrow f_\#(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_\#(\pi_1(E, z_0))$*

Beweis. Sei $c : I \to Y$ mit $c(0) = y_0$ und $c(1) = y$. Sei σ der Lift von c mit $\sigma(0) = z_0$.
Setze $g(y) := \sigma(1)$

1. g ist wohldefiniert.

2. g ist stetig.

□

Satz 13.26 (Existenz von Überlagergungen). *Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit, $x_0 \in X$, $G \leq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe.*
Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Überlagerung $p : E \to X$, so dass E zusammenhängend ist und einen ausgezeichneten Basispunkt $z_0 \in p^{-1}(x_0)$ besitzt mit $p_\#(\pi_1(E, z_0)) = G$.

Satz 13.27. *Sei X eine zusammenhängende, topologische Mannigfaltigkeit, $x_0 \in X, G \leq \pi_1(x_0, X)$ eine Untergruppe. Dann existiert (bis auf Isomorphie) genau eine Überlagerung $p : E \to X$, so dass E zusammenhängend ist und einen ausgezeichneten Basispunkt $z_0 \in E$ mit $z_0 \in p^{-1}(x_0)$ besitzt und $p_\#(\pi_1(E, z_0)) = G$.*
Ein Morphismus *von $p : E \to X$ und $p' : E' \to X$ ist eine stetige Abbildung $f : E \to E'$ mit $p' \circ f = p$.*

Beweis. Sei $\Omega_0 := \{c : I \to X | c(0) = x_0\}$
Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_G$ auf Ω_0 durch:
$c_0, c_1 \in \Omega_0, c_0 \sim_G c_1 :\Leftrightarrow c_0(1) = c_1(1) \wedge [c_0 * c_1^{-1}] \in G$.
Dann setzen wir $E := \Omega_0 / \sim_G$ und $p : E \to X, [c] \mapsto c(1)$
Als nächstes müssen wir eine Topologie auf E definieren. Dies tun wir, in dem wir eine Basis der Topologie angeben:
Sei $U \subseteq X$ offen und $c \in \Omega_0$ mit $c(1) \in U$.
Nun setzen wir $(U, c) := \{z \in E | \exists \sigma : c * \sigma \in Z, \sigma(t) \in U \forall t\}$ als Basis unserer Topolgie.
Wir beobachten, dass für $c_1 \in (U, c_0)$ sogar $(U, c_1) \subseteq (U, c_0)$ und letztendlich $(U, c_0) = (U, c_1)$ gilt.
Es folgt für $c_2 \in (U_0, c_0) \cap (U_1, c_1) \quad \Rightarrow \quad (U_0 \cap U_1, c_2) = (U_0, c_0) \cap (U_1, c_1)$.
Damit gilt für $c_0, c_1 \in \Omega_0$ mit $c_0(1) \in U, c_1(1) \in U$: $(U, c_0) = (U, c_1) \vee (U, c_0) \cap (U, c_1) = \varnothing$.
Um die Stetigkeit von p zu zeigen, bemerken wir, dass für jedes offene $U \subseteq X$ auch $p^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{c(1) \in U \\ c \in \Omega_0}} (U, c)$ offen ist.

Um zu zeigen, dass p eine offene Abbildung ist, stellen wir fest, dass das Bild von (U, c) unter p eine Zusammenhangskomponente von U darstellt und somit offen ist. Dür Überlagerungseigenschaft sei U einfach zusammenhängend und offen. Dann ist $p|_{(U,c)} : (U, c) \to U$.

1. Um die Surjektivität von p zu zeigen, nutzen wir aus, dass jedes $x \in X$ in einer einfach zusammenhängenden Umgebung enthalten ist. Wählen wir also unser $x \in U$, so existiert ein Weg σ von $c(1)$ nach x und wir erhalten $p([c * \sigma]_G) = x$.

2. Wir behaupten zunächst, dass p auch injektiv auf (U, c) ist. Für zwei Punkte $z := [c*\sigma]_G$ und $z' := [c * \sigma']_G$ aus (U, c) mit $p(z) = p(z')$ gilt aber sofort $\sigma \sim \sigma$, da U einfach zusammenhängend ist. Also ist $z = z'$.
   Damit folgt, dass $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i \in I}(U, c_i)$ für eine geeignete Indexmenge I gilt. Diese Indexmenge existiert aber auf jeden Fall nach unserer Beobachtung zur Basis der Topologie.

Nun wenden wir uns dem ausgezeichneten Basispunkt zu. Wir wählen dazu einfach $z_0 := [x_0]_G$, wobei x_0 den konstanten Weg in x_0 bezeichnet. Dann ist $z_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$.
Als vorletzten Schritt zeigen wir nun $G = p_\#(\pi_1(E, z_0))a$.

1. $G \subseteq p_\#(\pi_1(E, z_0))$
   Sei $c \in \Omega_0$. Wir definieren $c_t \in \Omega_0$ durch $c_t(\tau) = c(t\tau) \quad \Rightarrow \quad c_t(1) = c(t)$.
   Als nächstes finden wir ein stetiges $\tilde{c} : I \to E, t \mapsto [c_t]_G$ mit $\tilde{c}(0) = z_0$ und $(p \circ \tilde{c})(t) = c(t)$. Also ist $\tilde{c}$ der Lift von c mit Anfangspunkt z_0.
   Sei nun c eine Schleife in x_0 mit $[c] \in G \leq \pi_1(X, x_0)$.
   Dann ist $\Omega_0/\sim \ni [c]_G = [x_0]_G$, also $c \sim_G x_0$. $\tilde{c}(1) = z_0$ und damit ist $\tilde{c}$ eine Schleife.
   Es gilt $p_\#([\tilde{c}]) = [c] \in G$ und somit $G \subseteq p_\#(\pi_1(E, z_0))$.

2. $p_\#(\pi_1(E, z_0)) \subseteq G$
   Sei $\tilde{c}$ eine Schleife in z_0. Dann ist $p \circ \tilde{c} = c$ eine Schleife in x_0.
   Dann ist $\tilde{c}$ der eindeutige Lift von c mit Anfangspunkt z_0.
   Es folgt, dass $\tilde{c}$ mit dem oben konstruierten Lift übereinstimmt.
   Also ist $[c]_G = \tilde{c}(1) = z_0$ und damit $[c] \in G$.

Schlussendlich bleibt nur noch die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie zu zeigen.
Seien $p : E \to X$ und $p' : E' \to X$ zwei Überlagerungen, die die obigen Eigenschaften erfüllen mit jeweiligem Basispunkt z_0 und z_0'.
Da sowohl E als auch E' zusammenhängend ist, existieren $f : E \to E'$ und $f' : E' \to E$ mit $f(z_0) = z_0'$, $f'(z_0') = z_0$, $p \circ f' = p'$ und $p' \circ f = p$.
Damit gilt $p \circ (f' \circ f) = p$ und $p' \circ c(f \circ f') = p'$ mit $f \circ f'(z_0') = z_0'$ und $f' \circ f(z_0) = z_0$. Aus der Eindeutigkeit für Lifts folgt dann: $f \circ f' = \mathrm{id}_{E'}$ und $f' \circ f = \mathrm{id}_E$.

Als Überlagerungstransformationen $E \xrightarrow{p} X$ werden gerade die Automorphismen $E \xrightarrow{p} X$ bezeichnet. □

Lemma 13.28. *Sei $f : E \to E'$ ein Morphismus. Falls E' wegzusammenhängend ist, ist f eine Überlagerung*

Definition 13.29 (Universelle Überlagerung). Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung, E zusammenhängend. Dann heißt $p : E \to X$ *universell*, falls zu jeder Überlagerung $p' : E' \to X$ mit E' zusammenhängend ein Morphismus $f : E \to E'$ existiert.

Satz 13.30 (Universelle Überlagerung). *Sei X eine zusammenhängende, topologische Mannigfaltigkeit, $x_0 \in X$. Dann ist eine Überlagerung $p : E \to X$ mit E einfachzusammenhängend universell.*
Die Gruppe der Überlagerungstransformationen von $p : E \to X$ ist isomorph zu $\pi_1(X, x_0)$ und gleichmächtig zu $p^{-1}(\{x_0\})$.

Beispiele 13.31. Oben wurde bereits gezeigt, dass $p : \mathbb{R} \to S^1, r \mapsto e^{ir}$ eine Überlagerungsabbildung darstellt. Nun ist die Überlagerungssabbildung exp $2\pi i$-periodisch und wir erhalten, dass alle Überlagerungstransformationen von der Form:

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto r + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

sein müssen. Es gilt klarerweise $f_k + f_l = f_{k+l}$ und $f_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Also ist die Gruppe der Decktransformationen isomorph zu $\mathbb{Z}$ und aus dem obigen Satz erhalten wir, dass $\pi_1(S^1, \cdot) = \mathbb{Z}$.

Definition 13.32. Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung. Dann ist f bezüglich $\tilde{g} = f^*g$ eine lokale Isometrie.
f heißt dann *semi-riemannsche Überlagerung*.

Lemma 13.33. *Sei $f : \tilde{M} \to M$ eine riemannsche Überlagerung. Dann gilt M ist genau dann vollständig, wenn $\tilde{M}$ vollständig ist.*

Beweis. "$\Leftarrow$" Sei $\tilde{M}$ vollständig. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$. Wähle $\tilde{p} \in \tilde{M}$ mit $f(\tilde{p}) = p$ und $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ mit $\mathrm{d} f_{\tilde{p}}\tilde{v} = v$.
Sei $c_{\tilde{v}} : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ die Geodätische, gegeben durch $\tilde{v}$. Dann ist $c := f \circ c_{tildev} : \mathbb{R} \to M$ eine Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$.
Also ist M (geodätisch) vollständig.

"$\Rightarrow$" Sei M vollständig. Sei $(\tilde{p}_n)_n \subseteq \tilde{M}$ eine Cauchy-Folge. Setze $p_n := f(\tilde{p}_n)$ eine Cauchy-Folge in M und somit $p_n \to p \in M$.
Sei $B_{2\varepsilon}(p)$, so dass $\exp_p : B_{2\varepsilon}(0_p) \to B_{2\varepsilon}(p)$ ein Diffeomorphismus ist und $2\varepsilon(p) \subseteq U$ gleichmäßig überlagert wird, d.h. $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in A} U_\alpha$.
Für alle $\tilde{p} \in f^{-1}(\{p\})$: $B_{2\varepsilon}(\tilde{p}) \subseteq U_\alpha(\tilde{p})$.
Für n groß genug: $d(\tilde{p}_n, \tilde{p}_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$
$f : B_{2\varepsilon}(\tilde{p}) \to B_{2\varepsilon}(p)$ ist ein Diffeomorphismus.
$\Rightarrow \exists \tilde{p} \in f^{-1}(p)$ mit $\tilde{p}_n \in B_\varepsilon(\tilde{p}) \quad \to \quad \tilde{p}_n \to \tilde{p}$.

□

Satz 13.34 (Zusatz zu Bonnet-Myers). *Sei M^n eine vollständige, zusammenhängende, riemannsche Mannigfaltigkeit,* $\dim M = n \geq 2$. *Sei $\kappa > 0$ und nehme an, dass* $\mathrm{ric} \geq \kappa(n-1)g$. *Dann ist $\pi_1(M)$ endlich.*

Beweis. Betrachte $f : \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung mit $\tilde{g} = f^* g$. Dann gilt $\tilde{M}$ ist zusammenhängend, vollständig und $\text{ric} \geq \kappa(n-1)\tilde{g}$.
Nach dem Satz von Bonnet-Myers 12.5 auf Seite 80 ist $\tilde{M}$ kompakt. $f^{-1}(\{x_0\}) \subseteq \tilde{M}$ ist diskret. Da $\tilde{M}$ kompakt ist, muss $f^{-1}(\{x_0\})$ endlich sein.
$\Rightarrow \#\pi_1(M, x_0) = \# f^{-1}(\{x\}) < \infty$ $\square$

14 Satz von Hadamard-Cartan

Lemma 14.1. *Seien $(\tilde{M}, \tilde{g})$ und (M, g) zusammenhängende, riemannsche Mannigfaltigkeiten. Sei $\tilde{M}$ vollständig und $f : \tilde{M} \to M$ eine lokale Isometrie. Dann ist f eine Überlagerung.*
Genauer gilt: Sei $p \in M$ und $\varepsilon > 0$, so dass $\exp_p : B_{2\varepsilon}(0_p) \to B_{2\varepsilon}(p)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann sind die $B_\varepsilon(\tilde{p})$ paarweise disjunkt, $\tilde{p} \in f^{-1}(\{p\})$ und $f : B_\varepsilon(\tilde{p}) \to B_\varepsilon(p)$ ist ein Diffeomorphismus für alle $\tilde{p} \in f^{-1}(\{p\})$

Beweis. Wir beweisen das Lemma in mehreren Schritten.

1. M ist vollständig:
   Sei $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $p = f(\tilde{p})$. Sei $v \in T_pM$. Dann existiert ein $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M} : \quad \mathrm{d}\, f_{\tilde{p}}\tilde{v} = v$.
   Sei $c_{\tilde{v}}$ die zu $\tilde{v}$ gehörige Geodätische. Dann gilt $c_{\tilde{v}} : \mathbb{R} \to \tilde{M}$.
   $c = f \circ c_{\tilde{v}} : \mathbb{R} \to M$ ist Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$ und damit ist $c_v : \mathbb{R} \to M$ für alle $v \in T_pM$.

2. $f : \tilde{M} \to M$ ist surjektiv:
   Sei $q \in M$. Nach Hopf-Rinow 11.15 auf Seite 77 existiert eine Geodätische $c : [0, d(p,q)] \to M$ mit $c(0) = p$ und $c(d(p,q)) = q$.
   Sei $v = \dot{c}(0)$. Sei nun $\tilde{p} \in f^{-1}(p)$. Dann existiert genau ein $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ mit $\mathrm{d}\, f_{\tilde{p}}\tilde{v} = v$.
   Betrachte die zugehörige Geodätische $c_{\tilde{v}} : \mathbb{R} \to \tilde{M}$. Dann gilt:
   $c_v = f \circ c_{\tilde{v}}$ ist eodätische mit $c_v(0) = p$ und $\tilde{c}_v(0) = v$.
   $\Rightarrow c_v(d(p,q)) = q \quad \Rightarrow \quad c_{\tilde{v}}(d(p,q)) \in f^{-1}(q)$.

3. Überlagerungseigenschaft: Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\exp_p : B_{2\varepsilon}(0_p) \to B_{2\varepsilon}(p)$ ein Diffeomorphismus ist.
   Nun ist $f \circ \exp_{\tilde{p}} = \underbrace{\exp_p \circ \mathrm{d}\, f_{\tilde{p}}}_{\text{Diffeo}}$
   Damit ist zunächst $f \circ \exp_{\tilde{p}}$ ein Diffeomorphismus. $\exp_{\tilde{p}}$ ist surjektiv, da nach Definition $B_\varepsilon(\tilde{p}) = \exp_{\tilde{p}}(B_\varepsilon(0_{\tilde{p}}))$ und $\exp_{\tilde{p}}$ ist injektiv, da $f \circ \exp_{\tilde{p}}$. Damit ist $\exp_{\tilde{p}}$ ein Diffeomorphismus.
   $\Rightarrow f : B_\varepsilon(\tilde{p}) \to B_\varepsilon(p)$ ist ein Diffeomorphismus.
   Für $\tilde{p}_1 \neq \tilde{p}_2 \in f^{-1}(\{p\})$ gitl $B_\varepsilon(\tilde{p}_1) \cap B_\varepsilon(\tilde{p}_2) = \varnothing$, denn nehme an $B_\varepsilon(\tilde{p}_1) \cap B_\varepsilon(\tilde{p}_2) \neq \varnothing$. Dann existiert eine Geodätische der Länge $\leq 2\varepsilon$, die $\tilde{p}_1$ mit $\tilde{p}_2$ verbindet. $c = f \circ \tilde{c}$ ist eine Geodätische von p nach p. $L(c) < 2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad c \in B_\varepsilon(p)$. Ein Widerspruch.

□

Satz 14.2 (Hadamard-Cartan). *Sei M eine zusammenhängende, vollständige, riemannsche Mannigfaltigkeit. $K_M \leq 0$. Dann ist für beliebiges $p \in M$ $\exp_p : T_pM \to M$ die universelle Überlagerung.*

Beweis. Der Beweis erfolgt wieder in mehreren Schritten.

1. Zunächst behaupten wir, dass $\exp_p : T_pM \to M$ surjektiv ist.
   Da M vollständig ist gilt nach Satz 11.15 (Hopf-Rinow) auf Seite 77, dass für jedes $q \in M$ eine Geodätische $c_v : [0, d(p,q)] \to M$ mit $c_v(0) = p$ und $c_v(d(p,q)) = q$ existiert.

2. Als nächstes zeigen wir, dass $\exp_p : T_pM \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.
Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{d}\exp_p|_v$ für jedes $v \in T_pM$ ein Diffeomorphismus ist und dazu wiederum genügt uns die Injektivität von $\mathrm{d}\exp_p|_v$.
Zur Erinnerung:
$$\mathrm{d}\exp_p|_{tv}(w) = \frac{J(t)}{t}$$
wobei $J(t) \in \mathfrak{J}_c(M)$ mit $J(0) = 0$ und $\nabla_t J(0) = J'(0) = w$, d.h. $\mathrm{d}\exp_p|_v(w) = J(1)$.
Falls $\mathrm{d}\exp_p|_v(w) = 0$ für ein $w \neq 0$, dann existiert ein J längs c_v mit $J(0) = 0$, $J(1) = 0$ und es existiert ein $t \in [0,1]$ mit $J'(t) \neq 0$, d.h. $\|J(0)\|^2 = \|J(1)\|^2 = 0$ und $\|J(t)\|^2 > 0$.
Aber $\|J(\cdot)\|^2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist konvex, denn
$$\begin{aligned}\langle J, J\rangle'' &= 2\langle J', J\rangle' \\ &= 2\langle J', J'\rangle + 2\langle J'', J\rangle \\ &= 2\underbrace{\langle J', J'\rangle}_{>0} - 2\underbrace{\langle R(J,\dot{c})\dot{c}, J\rangle}_{\leq 0} \\ &\geq 0\end{aligned}$$
Damit ist $J(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$. Also ist $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus und $\exp_p(T_pM, \tilde{g}) \to (M, g)$ mit $\tilde{g} = \exp_p^* g$ ist eine lokale Isometrie.

3. Als letztes bleibt noch die Vollständigkeit von $(T_pM, \tilde{g})$ zu zeigen.
Diese folgt aber direkt aus der Beobachtung, dass Geodätische bezüglich $\tilde{g}$ genau die Geraden durch 0_p sind. Diese sind natürlich auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und nach dem Satz von Hopf-Rinow 11.15 auf Seite 77 ist $(T_pM, \tilde{g})$ vollständig.
Mit Lemma 14.1 folgt dann, dass $\exp_p : T_pM \to M$ eine Überlagerung ist. Sie ist sogar die universelle Überlagerung, da T_pM einfachzusammenhängen ist.

□

Index

Literatur

[1] Prof. Dr. C. Bär, *Differentialgeometrie*, Universität Potsdam, Stand vom 11.06.2010