RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 23.04.2014

Übungsblatt 2

Glatte Abbildungen und Tangentialräume

Abzugeben bis Mittwoch, 30.04.14, 14:00 Uhr

(15 Punkte je Aufgabe)

Aufgabe 1.

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; y = \lambda x,\;\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Der Quotient $\left(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$ mit der Quotiententopologie ist der *projektive Raum* $\mathbb{KP}^n$. Wir schreiben $[x_0 : \ldots : x_n]$ für die Äquivalenzklasse des Punktes $(x_0, \ldots, x_n)$ (*homogene Koordinaten*). Sei

$$\mathcal{U}_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_i \neq 0\}$$

und $b_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{K}^n$ durch

$$b_i([x_0 : \ldots : x_n]) = \frac{1}{x\,i}\,(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$$

gegeben, wobei „Hut“ das Weglassen der Stelle bedeutet.
Zeigen Sie, dass $\{(b_i, \mathcal{U}_i)\}$ ein C^∞-Atlas für $\mathbb{KP}^n$ ist.

(b) Sei S_r^n die Sphäre (siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 3a) und $\mathbb{RP}^n$ der reell projektive Raum (siehe vorige Aufgabe). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : S_r^n \to \mathbb{RP}^n, \quad (x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : \ldots : x_n]$$

glatt ist. Untersuchen Sie zusätzlich, ob sie ein lokaler Diffeomorphismus oder sogar ein Diffeomorphismus ist.
(„lokaler Diffeomorphismus“ bedeutet, dass es für alle $x \in S_r^n$ eine Umgebung U_x gibt, so dass $\phi|_{U_x} : U_x \to \phi(U_x)$ ein Diffeomorphismus ist)

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass S_r^n eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist und dass diese differenzierbare Struktur mit derjenigen vom letzten Blatt übereinstimmt (das bedeutet, dass die Identitätsabbildung $id : S_r^n \to S_r^n$ einen Diffeomorphismus zwischen den beiden Strukturen liefert).

(b) Sei $\iota : S_r^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Einbettung. Für jeden Punkt $p \in S_r^n$ ist $\mathrm{d}\iota_p(\mathrm{T}_p S_r^n)$ ein Unterraum des Tangentialraums $\mathrm{T}_{\iota(p)}\mathbb{R}^{n+1}$, den wir wie in der Vorlesung mit $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation

$$\mathrm{d}\iota_p(\mathrm{T}_p S_r^n) = \iota(p)^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, \iota(p)\rangle = 0\}$$

gilt.

Aufgabe 3. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit von Dimension n. Der Tangentialraum $\mathrm{T}_p M$ (mit $p \in M$) wurde als Raum der Derivationen in p eingeführt. Wir betrachten nun eine alternative Beschreibung als Äquivalenzklassen von Kurven: Sei

$$\mathrm{K}_p M = \{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \mid \epsilon > 0, \gamma \text{ ist } C^1, \gamma(0) = p\}$$

die Menge der differenzierbaren Kurven durch p. Wir betrachten die Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \exists \text{ Karte } \varphi : U \to \mathbb{R}^n,\ p \in U,\ \text{so dass } (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

und setzen $\widehat{\mathrm{T}}_p M = \mathrm{K}_p M / \sim$.
Zeigen Sie: $\widehat{\mathrm{T}}_p M$ besitzt eine Struktur als $\mathbb{R}$-Vektorraum und ist auf natürliche Weise isomorph zu $\mathrm{T}_p M$. Unter dieser Identifikation ist das Differential einer (differenzierbaren) Abbildung $g : M \to N$ in eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit N durch $\mathrm{d}g_p([\gamma]) = [g \circ \gamma]$ gegeben.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgenden Matrixgruppen C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ sind:

(a) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

(b) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AA^{\mathrm{T}} = I_n\}$ (wobei I_n die Einheitsmatrix bezeichnet)

(c) $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$