Über die Symmetrie in den Zusammenhangszahlen kombinatorischer Mannigfaltigkeiten.

Von **L. Vietoris** in Innsbruck.

Von Poincaré stammt der bekannte Satz:

In einer n-dimensionalen unberandeten orientierbaren Mannigfaltigkeit ist die k^{te} Bettische Zahl B_k gleich der $(n-k)^{\text{ten}}$ Bettischen Zahl B_{n-k} für $k = 1, 2, \ldots n-1$ [1]).

Analog ist für die Torsionszahlen der Satz bekannt [2]):

Die Torsionszahlen der k^{ten} Dimension jeder n-dimensionalen unberandeten orientierbaren Mannigfaltigkeit stimmen mit denen $(n-k-1)^{\text{ter}}$ Dimension überein für $k = 0, 1, \ldots n$.

Sowohl der Satz Poincarés wie sein Beweis wurden von P. Heegaard [3]) mit Hilfe eines Gegenbeispiels angegriffen, worauf Poincaré, Rend. Pal., 13 (1899), S. 285—343, zeigte, daß Heegaards Beispiel zwar nicht seinen Satz widerlege, sondern nur eine ihm von Heegaard irrtümlich unterschobene Auslegung, daß aber damit trotzdem sein Beweis widerlegt sei, weil dieselben Schlüsse, durch welche Poincaré zu seinem Satz gelangt sei, auch zu der sicher falschen Heegaardschen Auslegung führen würden. Gleichzeitig gab Poincaré einen neuen Beweis, der von Veblen [4]) noch vervollständigt worden ist.

Aber auch dieser Beweis enthält, wie wir sogleich zeigen wollen, eine ernste Lücke, die übrigens aufs engste mit einer von E. Steinitz und H. Tietze (vgl. Anm. 14) aufgeworfenen Frage zusammenhängt. Wir werden diese Lücke nicht ausfüllen, sondern einen Mannigfaltigkeitsbegriff definieren, für den wir sie ausfüllen können, während der übrige Beweis Poincarés unverändert übertragen werden kann [4a]).

Die Schwierigkeit im Beweis des Symmetriesatzes liegt darin, daß die Begriffe „Komplex“ und „Mannigfaltigkeit“, wie man sie im Anschluß an Poincaré verwendet, nicht rein kombinatorisch sind. Sie sind aus topologischen Bildern von Simplexen, also aus Punkt-

---

1) Analysis Situs, Journ. Ec. Pol., 1894. Man kann diesen Satz auch für $k = 0$, n gültig machen, wenn man die Bettische Zahl 0ter Dimension geeignet definiert. Vgl. Anm. 22. Der entsprechende Satz findet sich auch für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten, aber bezüglich der Veblen-Alexanderschen „connectivities“ bei O. Veblen, Analysis Situs. Cambridge colloquium, 1916, S. 49, 77.

2) Veblen, l. c. S. 123.

3) Diss., Kopenhagen 1898. Bull. soc. math. Franç., 44 (1916), S. 161—242.

4) l. c. S. 88—91.

4a) Siehe Anm. 27.

mengen zusammengesetzt, weshalb wir sie im folgenden zum Unterschied von rein kombinatorisch definierten Komplexen und Mannigfaltigkeiten synthetische nennen. Und zwar ist hier zwischen zwei verschiedenen Definitionen zu unterscheiden, durch welche man die Mannigfaltigkeiten unter den Komplexen kennzeichnet.

(*A*) Ein synthetischer Komplex[5]) K heißt eine n-dimensionale (synthetische) Mannigfaltigkeit, wenn der Stern[6]) in K jeder Ecke von K ein n-dimensionales Element[7]) ist. K heißt unberandet, wenn keine seiner Ecken auf dem Rand[8]) des Sternes um sie liegt.

(*B*) Ein synthetischer Komplex K heißt eine n-dimensionale (synthetische) Mannigfaltigkeit, wenn in K, als Punktmenge betrachtet, jeder Punkt p eine Umgebung hat, welche mit einem n-dimensionalen Simplex homöomorph ist[9]), K heißt unberandet, wenn p in dieser Homöomorphie immer einem inneren Punkt dieses Simplexes entspricht[10]).

Poincarés Beweis beruht auf dem Begriff der reziproken Mannigfaltigkeit. Ist C eine unberandete n-dimensionale synthetische Mannigfaltigkeit [nach (*A*) oder (*B*)], so gewinnt man die dazu reziproke (die dann allerdings nicht mehr simplizial ist) in zwei Schritten. Zunächst kommt man durch reguläre[11]) Unterteilung von C zu einem Komplex $\overline{C}$. Die Sterne aller Ecken P_i^0 von C bilden dann die n-dimensionalen Seiten b_i^n der zu C reziproken Mannigfaltigkeit[12]) C'. Ist $[P_i^0\, P_k^0] = a_l^1$ eine Kante von C, so ist der Durchschnitt $b_i^n\, b_k^n = b_l^{n-1}$ eine $(n-1)$-dimensionale Seite[13]) von C'. Sie ist

---

5) Wir beschränken unsere Betrachtungen auf simpliziale Komplexe mit endlich vielen Seiten.

6) Ist S eine k-dimensionale Seite eines n-dimensionalen Komplexes K $(k \leqq n)$, dann heißt der Komplex aller l-dimensionalen Seiten von K $(k \leqq l \leqq n)$, welche S als Seite haben, der Stern von K in S. Ist S eine Ecke von K, so ist $k = 0$.

7) n-dimensionales Element heißt jeder Komplex, der einem n-dimensionalen Simplex homöomorph ist.

8) Rand R (S) eines n-dimensionalen Simplexes heißt der Komplex aller $(n-1)$-dimensionalen Seiten von S. Rand eines Komplexes $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_r A_r$, geschrieben $R\,(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_r A) = \alpha_1 R\,(A_1) + \alpha_2 R\,(A_2) + \ldots + \alpha_r R\,(A_r)$ *per definitionem.* Daher $R\,(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = \lambda_1 R\,(K_1) + \lambda_2 R\,(K_2)$. Vgl. meine Abhandlung, Math. Ann., 97 (1927), S. 455 f., deren Terminologie wir hier verwenden. Newman erklärt den Rand von $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_r A_r$ nur für $\alpha_i = 1$.

9) Vgl. H. Kneser, Topologie der Mannigfaltigkeiten, Jahresber. deutsch. Math.-Ver., 34 (1925), S. 1—14, wo eine ähnliche Unterscheidung gemacht wird.

10) Wir wollen damit einfach die „unberandete Mannigfaltigkeit" definiert haben, ohne uns Rechenschaft zu geben, wie weit der Name „unberandet" sonst berechtigt ist.

11) Veblen, l. c. S. 41, 88. Wir verwenden genau die Buchstabenbezeichnungen Veblens, S. 88 f.

12) Der Name Mannigfaltigkeit ist hier eigentlich nur dann einigermaßen berechtigt, wenn man auf dem Boden von *(B)* steht.

13) Wir betrachten, im Gegensatz zu Veblen, den Rand eines Simplexes als Teil desselben.

zugleich der Durchschnitt der Ränder $R(b_i^n)$ und $R(b_k^n)$. Ist allgemein $[P_{i_0}^0, P_{i_1}^0, \ldots P_{i_k}^0]$ eine k-dimensionale Seite von C, so ist der Durchschnitt $b_{i_0}^n b_{i_1}^n, \ldots b_{i_k}^n$ eine $(n-k)$-dimensionale Seite b_s^{n-k} von C'. Sie ist zugleich der Durchschnitt der Ränder $R(b_{i_0}^n)\ R(b_{i_1}^n) \ldots R(b_{i_k}^n)$. Ist dabei $k = n$, so besteht b_s^{n-k} aus einem Punkt P_s^n, d. i. der im Innern von $[P_{i_0}^0 P_{i_1}^0 \ldots P_{i_n}^0] = a_s^n$ angenommenen Ecke von $\overline{C}$. Zwischen diesen b_s^{n-k} und den b_r^{n-k-1} bestehen für $k = 0, 1, \ldots n-1$ dieselben Inzidenzbeziehungen, wie zwischen den a_s^k und den a_r^{k+1}. Das gilt zunächst nur, wenn man diese Seiten nicht orientiert denkt. Ist aber C orientierbar und hat man den Seiten a_s^k $(k=0, 1, 2 \ldots n)$ von C willkürlich Orientierungen gegeben, so lassen sich die b_s^{n-k} so orientieren, daß ihre Inzidenzbeziehungen auch dem Vorzeichen nach dieselben sind, wie die der a_s^k. Die Matrix M'_{n-k}, welche die Inzidenzen zwischen den b_r^{n-k-1} und den b_s^{n-k} angibt, ist also, wenn man noch die Zeilen mit den Spalten vertauscht, genau die Matrix M_{k+1}, welche die Inzidenzen zwischen den a_s^k und den a_r^{k+1} angibt. Wenn man nun aus den Matrizes M'_k die Bettischen bzw. Torsionszahlen von C ebenso rechnen kann, wie aus den Matrizes M_k selbst, dann erhält man sofort die ausgesprochenen Symmetriesätze. Das ist sicher der Fall, wenn alle Seiten b_r^k von C' aller Dimensionen k für $0 \leqq k \leqq n$ k-dimensionale Elemente sind.

Legt man die Definition (A) zugrunde, so ist dies für $k = n$ eine Folge der Definition, weil der Stern in $\overline{C}$ von P_i^0 homöomorph mit dem Stern von P_i^0 in C ist und dieser als n-dimensionales Element vorausgesetzt war.

Legt man aber (B) zugrunde, so bedeutet der Nachweis, daß jedes b_r^n ein n-dimensionales Element ist, den Nachweis, daß jede Mannigfaltigkeit nach (B), wir wollen kurz „B-Mannigfaltigkeit" sagen, auch eine A-Mannigfaltigkeit ist. Dieser Beweis ist aber bis heute meines Wissens nicht geliefert[14]).

Aber auch wenn man (A) zugrunde legt, stößt man beim Nachweis, daß die b_i^k k-dimensionale Elemente sind, auf dieses Problem, allerdings noch nicht bei den b_i^n, sondern erst bei den b_i^{n-1}. Ist

[14]) Vgl. H. Kneser, Topologie der Mannigfaltigkeiten. Jahresber. deutsch. Math.-Ver., 34 (1925), S. 10, Anm. 1, und den zugehörigen Absatz im Text, wo es sich um eine ähnliche Frage handelt. Sie ist ein Teil der schon von E. Steinitz, Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges., 1908, im Archiv f. Math. Phys., III, 13, S. 32, und H. Tietze, Monatsh. f. Math. Phys., 19 (1908), S. 1—118, erörterten Frage nach der Übereinstimmung zwischen kombinatorischer und mengentheoretischer „Homöomorphie".

nämlich $a_r^1 = [a_i^0\, a_j^0]$ eine Kante von C, so ist b_r^{n-1} der Stern um P_r^1 auf dem Rand von b_i^n, wo P_r^1 der auf a_r^1 liegende Eckpunkt von $\overline{C}$ ist. $R\,(b_i^n)$ ist als Rand eines n-dimensionalen Elementes eine $(n-1)$-dimensionale Sphäre, d. i. homöomorph mit dem Rand eines n-dimensionalen Simplexes. b_r^{n-1} ist homöomorph mit dem Stern um a_j^0 im Rand des in $\overline{C}$ gebildeten Sterns von a_i^0; d. h. b_i^n ist, abgesehen von seiner Einteilung zufolge der angewendeten regulären Unterteilung, ein beliebiger Stern auf einer $(n-1)$-dimensionalen Sphäre. Als solcher ist er auch ein beliebiger Stern auf einer n-dimensionalen B-Mannigfaltigkeit. Der Nachweis, daß b_r^{n-1} ein $(n-1)$-dimensionales Element ist, kommt damit wieder auf den Nachweis hinaus, daß jede $(n-1$-dimensionale B-Mannigfaltigkeit eine A-Mannigfaltigkeit ist[15]). Dieselbe Schwierigkeit tritt beim entsprechenden Nachweis für die b_i^k $(k < n-1)$ ebenso auf.

Auf die Frage, ob jede $(n-1)$-dimensionale B-Mannigfaltigkeit eine A-Mannigfaltigkeit ist, führt auch der Beweis, daß jede n dimensionale A-Mannigfaltigkeit eine B-Mannigfaltigkeit ist. Zwar ist der Umgebungscharakter der inneren Punkte der n-dimensionalen Simplexe jeder n-dimensionalen Mannigfaltigkeit C natürlich gegeben, ebenso der in den inneren Punkten der $(n-1)$-dimensionalen Seiten, auch ist der Umgebungscharakter der Ecken von C verhältnismäßig leicht festzustellen, aber dazwischen fehlt es. Auf dieselbe Schwierigkeit führt die Frage, ob jede reguläre Unterteilung jeder A-Mannigfaltigkeit wieder eine A-Mannigfaltigkeit ist. Schließlich hängt an demselben Problem auch der folgende Satz: Ist M eine n-dimensionale A-Mannigfaltigkeit, dann ist in M nicht nur, wie definiert, der Umgebungskomplex[16]) um jede Ecke von M eine $(n-1)$-dimensionale Sphäre, sondern es ist auch der Umgebungskomplex jeder k-dimensionalen Seite von M $(k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$ eine $(n-k-1)$-dimensionale Sphäre[17]).

Während nun einerseits die Schwierigkeit im Beweis aller dieser Behauptungen daher kommt, daß hier der Homöomorphiebegriff der Punktmengenlehre in die kombinatorische Topologie hereinspielt, sind andererseits die nach Art von (A) und (B) definierten Mannigfaltigkeitsbegriffe anscheinend enger, als für die Gültigkeit dieser Sätze erforderlich ist. Wir wollen im folgenden einen Mannigfaltigkeitsbegriff definieren, der uns für diese Sätze, insbesondere den Symmetriesatz, den natürlichen Geltungsbereich zu liefern scheint und der im Fall, daß jede (B)-Mannigfaltigkeit eine (A)-Mannigfaltigkeit ist, die (A) $\bigl(=(B)\bigr)$-Mannigfaltigkeiten umfaßt. Wir stellen uns dabei auf den rein kombinatorischen Standpunkt von

---

15) Vgl. Veblen, l. c. S. 90.

16) Die Definition des Umgebungskomplexes siehe weiter unten.

17) Vgl. Enzykl., III A B 3 (Dehn-Heegaard), S. 162, wo diese Behauptung als Folge der A-Eigenschaft bezeichnet ist.

Math. Ann., 97, S. 455—458. Zunächst stellen wir einige Begriffe und Hilfssätze bereit.

Ist $[a_0, a_1, \ldots a_n]$ ein Simplex mit den Ecken $a_0, a_1, \ldots a_n$, so heißen die Simplexe $[a_0, a_1, \ldots a_k]$ und $[a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n]$ einander in $[a_0, a_1, \ldots a_n]$ gegenüberliegend. $[a_0, a_1, \ldots a_n]$ heiße ihre „Verbindung“ $[a_0, a_1, \ldots a_k] \times [a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n] = [a_0, a_1, \ldots a_n]$ [18]. Sind $A_1, A_2, \ldots A_r$ m-dimensionale Simplexe und $B_1, B_2, \ldots B_s$ n-dimensionale Simplexe, welche mit den A_i keine Ecken gemeinsam haben, so verstehen wir unter dem Verbindungskomplex $(a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_r A_r) \times (b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots + b_s B_s)$ den $(m+n+1)$-dimensionalen Komplex $\sum\limits_{ik} [a_i b_k (A_i B_k)]$, wobei die a_i, b_k natürlich ganze Zahlen bedeuten.

Sind A, B zwei Symplexe ohne gemeinsame Ecke, so ist der Rand $R(A \times B) = [R(A) \times B] + [A \times R(B)]$. Zufolge der Definition des Verbindungskomplexes und der Additivität der Operation R gilt auch für zwei Komplexe K, L ohne gemeinsame Ecke $R(K \times L) = [R(K) \times L] + [K \times R(L)]$ [19].

(Z) Sind A und B Komplexe, in denen jeder k-dimensionale Zykel homolog 0 ist, während in ihrem Durchschnitt D jeder $(k-1)$-dimensionale Zykel homolog 0 ist, dann ist in der Vereinigung $A \dotplus B$ jeder k-dimensionale Zykel homolog 0 [20].

Denn es sei C irgend ein k-dimensionaler Zykel in $A \dotplus B$. C_1 sei der Komplex jener k-dimensionalen Seiten von C, welche in A liegen, C_2 der Komplex aller übrigen k-dimensionalen Seiten, $C_2 = C - C_1$. $R(C_1)$ ist ein $(k-1)$-dimensionaler Zykel in D; weil jeder solche Zykel laut Voraussetzung in D homolog 0 ist, gibt es einen k-dimensionalen Komplex C_1^* in D, dessen Rand $R(C_1^*) = R(C_1)$ ist, $C_1 \leqq D$. $C^* = C_1^* + C_2$ ist ein k-dimensionaler Zykel; denn $R(C^*) = R(C_1^*) + R(C_2) = R(C_1) + R(C_2) = 0$. Außerdem ist C^* k-dimensional und liegt in B. Also ist $C^* \backsim 0$ in B und damit auch in $A \dotplus B$. $C^* - C = C_1^* - C_1$ ist ein k-dimensionaler Zykel. Denn $R(C_1^* - C_1) = R(C_1^*) - R(C_1) = 0$; er liegt in A. Also ist $C^* - C \backsim 0$ in A, erst recht in $A \dotplus B$. Daher ist $C = C^* + (C - C^*) \backsim 0$ in $A \dotplus B$.

Ist K ein n-dimensionaler Komplex und S eine k-dimensionale Seite desselben ($k = 0, 1, 2, \ldots n$), so heißt (Anm. 6) der Komplex aller Teilsimplexe von K, welche S enthalten, der Stern von S in K. In

---

[18]) M. H. A. Newman, On the foundations of combinatory Analysis Situs. Amst. Proc., 29, S. 611—626, 627—641, erklärt S. 612 dieses Produkt für nicht orientierte Simplexe. Achtet man in dieser Definition auf die Reihenfolge der Punkte, indem man nie einen Simplex durch einen andern ersetzt, der dieselben Ecken, aber in einer ungeraden Permutation enthält, dann hat man den Verbindungskomplex auch für orientierte Simplexe erklärt. Schon früher findet sich der Verbindungskomplex in der unter Anm. 27) erwähnten Abhandlung von H. Weyl.

[19]) Vgl. Newman, l. c., S. 613. Doch deckt sich Newmans Randbegriff nicht ganz mit unserem. Vgl. Anm. 8.

[20]) Vgl. auch W. Mayer, „Abstrakte Topologie“ im folgenden Band der Monatsh. f. Math. Phys.

jedem dieser Teilsimplexe gibt es eine S gegenüberliegende Seite. Der Komplex dieser Seiten heißt der Umgebungskomplex $U(S)$ von S in K[21]).

Wir erklären nun rekursiv:

Wir verstehen für $n \geqq 1$ unter einer n-dimensionalen h-Mannigfaltigkeit einen simplizialen Komplex M, in welchem der Umgebungskomplex jeder Ecke eine $(n-1)$-dimensionale h-Sphäre oder ein $(n-1)$-dimensionales h-Element ist. M heißt berandet oder nicht, je nachdem sein Rand nicht leer oder leer ist.

Unter einer n-dimensionalen h-Sphäre verstehen wir für $n \geqq 1$ eine n-dimensionale unberandete orientierbare h-Mannigfaltigkeit mit folgenden Homologiezahlen: $h_0=1$, $h_1=h_2=\ldots=h_{n-1}=0$, $h_n=1$[22]). Als 0-dimensionale h-Sphäre erklären wir das Punktepaar. Es ist orientiert, wenn es aus einem positiven und einem negativen Punkt besteht.

Unter einem n-dimensionalen h-Element verstehen wir für $n > 0$ eine orientierbare n-dimensionale h-Mannigfaltigkeit, deren Homologiezahlen $h_0=1$, $h_1=h_2=\ldots=h_n=0$ sind und deren Rand eine $(n-1)$-dimensionale h-Sphäre ist. Als 0-dimensionales h-Element erklären wir den Punkt[23]).

(N_0) Die Verbindung $S_n \times S_0$ aus einer n-dimensionalen h-Sphäre S_n und einer 0-dimensionalen h-Sphäre $S_0=a_2-a_1$ ist eine $(n+1)$-dimensionale h-Sphäre S_{n+1}.

Diese Behauptung ist richtig für $n=0$. Denn $(a_2-a_1)\times(b_2-b_1)=$ $=[a_1\,b_1]+[b_1\,a_2]+[a_2\,b_2]+[b_2\,a_1]$. Nun sei sie richtig für $(n-1)$ statt n. Dann gilt sie auch für n. Denn *a)* $S_n \times S_0$ ist eine $(n+1)$-dimensionale h-Mannigfaltigkeit, *b)* die Homologiezahlen sind $h_0=1$, $h_1=h_2=\ldots=h_n=0$.

Beweis *a)*: Der Umgebungskomplex jeder Ecke x von S_{n+1} in M ist eine h-Sphäre n^{ter} Dimension. Für $x=a_1$ oder $x=a_2$ ist das klar, weil für diese beiden Punkte der Umgebungskomplex in S_{n+1} gerade S_n, bzw. $(-S_n)$ ist. Ist x eine Ecke von S_{n+1}, welche von a_1 und von a_2 verschieden ist, so ist x eine Ecke von S_n. Der Stern von x in $S_n \times S_0$ ist die Verbindung des Sternes $S(x)$ von x in S_n mit S_0. Der Rand dieses Sterns ist das Produkt des Randes $R(x)$ von $S(x)$ mit S_0. $R(x)$ ist, weil S_n als n-dimensionale h-Sphäre vorausgesetzt war, eine $(n-1)$-dimensionale h-Sphäre. Laut Induktionsannahme ist also $R(x) \times S_0$, d. i. der Umgebungskomplex

21) Nach Tietze, Vgl. Abh. Hamb. Sem., 2.

22) Wir verstehen unter Homologiezahlen die „nombres cyclomatiques" von G. Mannoury, Nieuw Archief v. Wiskunde, (2) 2 (1898), S. 126—152, d. h. es bedeutet h_0 die Komponentenzahl, h_k für $0 < k \leqq n$, die k^{te} Bettische Zahl (im Sinn Poincarés) vermindert um 1.

23) Der Beweis des Symmetriesatzes für h-Mannigfaltigkeiten, als welche nur unberandete in Betracht kommen, läßt sich auch ohne den Begriff des h-Elementes führen, weil dabei nur h-Elemente von der Form $a \times S_k$ vorkommen, wo a ein Punkt und S_k eine k-dimensionale h-Sphäre ist. Wir führen das h-Element nur ein, um nicht die Sätze U, U', D in einer sonst nicht begründeten Einschränkung ansprechen zu müssen. W. Mayer hat l. c. den Symmetriesatz auch auf unberandete Mannigfaltigkeiten ausgedehnt.

von x in S_{n+1}, eine n-dimensionale h-Sphäre. *b)* $S_n \times S_0 = S_n \times \times (a_2 - a_1) = (S_n \times a_2) - (S_n \times a_1)$. In jedem dieser beiden Summanden ist jeder k-dimensionale Zykel für $k = 1, 2, \ldots n$ homolog 0. Im Durchschnitt S_n, der beiden ist jeder Zykel $(k-1)^{\text{ter}}$ Dimension homolog 0 für dieselben k. Also ist nach (Z) in $S_n \times S_0$ jeder k-dimensionale Zykel homolog 0 für alle diese k. Daß $S_n \times S_0$ genau eine Komponente hat, d. h. daß $h_0 = 1$ ist, bedarf keines Beweises. *c)* Wir nehmen außer $S_0 = a_2 - a_1$ auch S_n orientiert an. Dann sind $S_n \times \times (-a_1)$ und $S_n \times a_2$ orientiert (Anm. 18) und zwar so, daß $R\,[S_n \times (-a_1)] + R\,[S_n \times a_2] = 0$ ist.

Ähnlich beweist man auch:

(N_1) Die Verbindung $S_n \times E_0$ einer n-dimensionalen h-Sphäre mit einem 0-dimensionalen h-Element ist ein $(n+1)$-dimensionales h-Element. Die Verbindung $E_n \times S_0$ eines n-dimensionalen h-Elementes mit einer 0-dimensionalen h-Sphäre ist ein $(n+1)$-dimensionales h-Element. Die Verbindung $E_n \times E_0$ ist ein $(n+1)$-dimensionales h-Element.

(U) Die reguläre Unterteilung K' jeder n-dimensionalen h-Mannigfaltigkeit K ist eine n-dimensionale h-Mannigfaltigkeit.

Es ist zunächst leicht zu beweisen, daß jede reguläre Unterteilung durch eine endliche Folge von „eindimensionalen" Unterteilungen erhalten werden kann. Dabei bestehe die eindimensionale Unterteilung von M längs der Kante $[a_1, a_2]$ darin, daß in $[a_1, a_2]$ ein von a_1 und von a_2 verschiedener Punkt a_{12} angenommen und jeder durch $[a_1, a_2]$ gehende Simplex von M durch die Verbindung von $[a_1 a_{12}] + [a_{12}, a_2]$ mit dem Umgebungskomplex von $[a_1, a_2]$ ersetzt wird.

Satz (U) ist also bewiesen, wenn wir gezeigt haben:

(U') Entsteht M_1 aus der n-dimensionalen h-Mannigfaltigkeit M durch eine eindimensionale Unterteilung, dann ist auch M_1 eine n-dimensionale h-Mannigfaltigkeit.

Die Behauptung ist für $n = 1$, in trivialer Weise auch für $n = 0$, richtig. Wir nehmen an, sie sei für $(n-1)$ statt n richtig und beweisen sie daraus für n.

$[a_1, a_2]$ sei die Kante, längs welcher wir unterteilen, a_{12} der Mittelpunkt derselben, G_{12} der Umgebungskomplex von $[a_1, a_2]$ in M. Wir untersuchen der Reihe nach den Umgebungskomplex einer beliebigen Ecke x von M_1 in M_1 für die verschiedenen Lagen von x:

a) Ist $x = a_1$ oder $x = a_2$, so ist der Umgebungskomplex von x in M_1 kongruent[24]) mit dem von x in M.

b) $x = a_{12}$, $G_{12} \times a_1$ ist der Stern von a_1 in dem Umgebungskomplex G_2 von a_2 in M. G_2 ist, weil M eine n-dimensionale h-Mannigfaltigkeit ist, eine $(n-1)$-dimensionale h-Sphäre oder ein

---

[24]) Nach Newman l. c. heißen zwei Komplexe K_1 und K_2 einander kongruent, wenn zwischen ihren Seiten gleicher Dimension eine eineindeutige Zuordnung besteht, welche die Inzidenzrelationen von K_1 in die von K_2 überführt und umgekehrt.

(n—1)-dimensionales h-Element. Deshalb ist G_{12}, d. i., abgesehen vom Vorzeichen R $(G_{12} \times a_1)$, eine (n—2)-dimensionale h-Sphäre oder ein (n—2)-dimensionales h-Element. Nach (N_0) bzw. (N_1) ist $(G_{12} \times a_2) - (G_{12} \times a_1)$, d. i. der Rand des Sternes von $[a_1, a_2]$ in M, eine (n—1)-dimensionale h-Sphäre oder ein (n—1)-dimensionales h-Element. $(G_{12} \times a_2) - (G_{12} \times a_1)$ ist aber gerade der Umgebungskomplex von a_{12} in M.

c) Nun sei x eine Ecke b von G_{12}. Der Umgebungskomplex von b in M_1 entsteht aus dem von b in M durch Unterteilung längs der Kante $[a_1, a_2]$, ist also laut Induktionsannahme wie dieser eine (n—1)-dimensionale h-Mannigfaltigkeit, und zwar eine h-Sphäre oder ein h-Element, weil durch Unterteilung die Homologiegruppen nicht geändert werden.

d) Nun sei x weder a_1 noch a_2 noch eine Ecke von G_{12}. Dann ist der Umgebungskomplex von x in M_1 mit dem von x in M identisch, also wieder eine (n—1)-dimensionale h-Sphäre oder ein (n—1)-dimensionales h-Element.

(D) Ist die Vereinigung der beiden homogen n-dimensionalen Komplexe A und B eine n-dimensionale zusammenhängende (berandete oder unberandete) h-Mannigfaltigkeit, dann hat der Durchschnitt $A\,.\,B$ eine Dimension $\geqq n-1$.

Der Satz ist richtig für $n = 1$, in trivialer Weise auch für $n = 0$. Wir nehmen nun an, er sei für $n-1$ statt n richtig. Dann gilt er auch für n. Denn:

Weil $A \dotplus B$ zusammenhängend ist, haben A und B eine gemeinsame Ecke q. Der Umgebungskomplex $G_{A \dotplus B}(q)$ von q in $A \dotplus B$ ist laut Voraussetzung eine (n—1)-dimensionale h-Sphäre oder ein (n—1)-dimensionales h-Element. Nun ist $G_{A \dotplus B}(q) = G_A(q) \dotplus$ $\dotplus\, G_B(q)$, wo $G_A(q)$ und $G_B(q)$ die Umgebungskomplexe von q in A und B bedeuten; diese sind homogen n-dimensionale Komplexe, deren Vereinigung eine (n—1)-dimensionale h-Sphäre oder ein (n—1)-dimensionales h-Element ist. Die Induktionsannahme ist damit für sie erfüllt. Also hat der Durchschnitt $G_A(q)\,.\,G_B(q)$ eine Dimension $\geqq n-2$. Der Durchschnitt $A\,.\,B$ hat daher eine Dimension $\geqq n-1$.

Es sei nun C eine n-dimensionale unberandete orientierbare h-Mannigfaltigkeit. Wie üblich, konstruieren wir vermittels der regulären Unterteilung $\overline{C}$ von C, die nach (U) wieder eine (unberandete orientierbare) h-Mannigfaltigkeit ist, den reziproken Komplex C' zu C. Seine Seiten mögen b_i^n, b_j^{n-1}, . . . b_s^0 heißen.

Zufolge der Definition der h-Mannigfaltigkeit und (N_1) sind die n-dimensionalen Seiten b_i^n n-dimensionale h-Elemente, deren Ränder (n—1)-dimensionale h-Sphären. Die (n—1)-dimensionalen Seiten b_j^{n-1} von C' sind Sterne auf diesen Rändern um die Punkte P_j^1, also (n—1)-dimensionale Elemente. Deren Ränder sind (n—2)-dimensionale h-Sphären. Die (n—2)-dimensionalen Seiten b_k^{n-2} von C' sind die Sterne um die Punkte P_k^2 auf diesen h-Sphären, also (n—2)-

dimensionale h-Elemente. Und so schließt man durch vollständige Induktion fort, daß alle Seiten von C' h-Elemente sind.

(H) Ist nun Z ein k-dimensionaler Zykel in C, so gibt es zu ihm einen in $\overline{C}$ homologen Zykel Z', der sich nur aus k-dimensionalen Seiten von C' zusammensetzt. Angenommen, Z liege auf der Vereinigung aller p-dimensionalen Seiten von C', wo $k < p \leqq n$ ist. Z_1 sei der Komplex aller Seiten von Z, welche in einer gewissen p-dimensionalen Seite S von C' liegen. Also ist $R(Z_1) \leqq R(S)$ und es gibt in $R(S)$ einen Komplex Z_1^*, so daß $R(Z_1) = R(Z_1^*)$ ist. Wie unter (Z) schließen wir wieder, daß $Z^* = Z_1^* + (Z - Z_1) \backsim Z$ in C' ist, wobei Z^* nur mehr außerhalb und auf dem Rand von S liegt. Diesen Vorgang setzen wir fort, so lange es noch p-dimensionale Seiten von C' gibt, in deren Innerem Ecken von Z, Z^* usw. liegen und so lange $p > k$ ist. Schließlich kommt man zu einem Zykel Z', der nur mehr auf der Vereinigung der k-dimensionalen Seiten von C' liegt. Daß er tatsächlich Summe solcher Seiten ist, sieht man so: Ist S eine k-dimensionale Seite von $\overline{C}$, welche in Z' mit der Vielfachheit r vorkommt, so müssen alle anderen Seiten von $\overline{C}$, welche mit S in derselben Seite b_j^k von C' liegen, in Z' in derselben Vielfachkeit r vorkommen, weil sonst zufolge (D) Z' in b_j^k einen Rand hätte.

(J) Ist Z ein k-dimensionaler Zykel in C, welcher in C homolog 0 ist, so ist jeder zu Z in $\overline{C}$ homologe, sich nur aus Seiten von C' aufbauende Zykel Z' [es gibt deren nach (H)] in C' homolog 0.

Denn Z ist Rand eines Komplexes K in C. $Z' - Z$ ist Rand eines Komplexes L in $\overline{C}$, also Z' Rand von $K + L$. Ebenso wie wir oben Z in Z' abgeändert haben, können wir jetzt $K + L$ in einen Komplex $K' + L'$ abändern, der sich nur aus Seiten von C' aufbaut und immer noch Z' zum Rand hat.

Wegen (H) sind nun die k-dimensionalen Zykel von C in derselben Weise durch die Lösungen des zur Matrix M'_k gehörigen Systems linearer Gleichungen dargestellt, wie durch die Lösungen des zur Matrix M_k gehörigen. Wegen (J) erhält man durch „homolog 0"-Setzen der Ränder aller $(k + 1)$-dimensionalen Seiten von C' ein System von Relationen zwischen diesen Lösungen, welches gerade die k^{te} Homologiegruppe von C liefert.

Damit ist die oben aufgewiesene Lücke im Beweis des Symmetriesatzes für h-Mannigfaltigkeiten ausgefüllt. Nimmt man an, daß jeder Komplex, der mit einem n-dimensionalen Simplex homöomorph ist, ein n-dimensionales k-Element und jeder Komplex, der mit dem Rand eines n-dimensionalen Simplexes homöomorph ist, eine $(n-1)$-dimensionale h-Sphäre ist[25]) — das ist im wesentlichen die Annahme,

---

[25]) Daß nicht jede h-Sphäre (schon 3^{ter} Dimension) eine Sphäre, d. h. dem Rand eines Simplexes homöomorph ist, zeigt das Beispiel von Poincaré, Rend. Pal., 18 (1904), S. 45—110.

daß jede B-Mannigfaltigkeit eine A-Mannigfaltigkeit ist —, dann ist in unserem Satz der Symmetriesatz über A- und B-Mannigfaltigkeiten mitgegeben. Anderseits scheint der Begriff der h-Mannigfaltigkeit gerade das zu enthalten, was man zum Beweis des Symmetriesatzes braucht.

Auf Grund des Symmetriesatzes können wir in der Definition der h-Sphäre mit der Festlegung der ersten $\frac{n}{2}$, bzw. $\frac{n+1}{2}$ Homologiezahlen auskommen. Denn zum Beweis des Symmetriesatzes für n-dimensionale h-Mannigfaltigkeiten wird der Begriff der k-dimensionalen h-Sphäre nur für $k = 0, 1, \ldots n-1$ benötigt, weil er nur für diese k in den Begriff der n-dimensionalen h-Mannigfaltigkeit überhaupt eingeht. Für h-Sphären dieser Dimensionen können wir also den Symmetriesatz *per inductionem* als richtig annehmen, da er für $k = 0$ trivial ist, und erhalten ihn dann für $k = n$, d. h. allgemein [26]). Die so gewonnene Definition der h-Mannigfaltigkeit enthält dann nur mehr voneinander unabhängige Teile [27]).

---

[26]) Analog läßt sich die Definition des h-Elements vereinfachen. Doch gehen wir darauf nicht ein, weil der Begriff des h-Elements in unseren Betrachtungen unwesentlich ist. Vgl. Anm. 23.

[27]) Zusatz bei der Korrektur. H. Weyl stellt in seiner „Análisis Situs Combinatorio" (Rev. Mat. Hisp. Am., Mai 1923), welche mir nach Einreichung dieser Abhandlung bekannt geworden ist, ein System von Axiomen 0, I, II, III, IV, A, B, C, D auf, welches den „ciclo n-dimensional" zu beschreiben hat. Dieser Begriff dient genau wie unsere h-Sphären zur Definition eines Mannigfaltigkeitsbegriffes, für welchen Weyl den Symmetriesatz beweist. Weyls Gedankengang unterscheidet sich von unserem vor allem durch die axiomatische Auffassung, welche es mit sich bringt, daß Weyls Begriff des „ciclo n-dimensional", sowie der darauf gegründete Mannigfaltigkeitsbegriff nicht eindeutig festgelegt ist (Weyl, l. c. S. 29, letzter Absatz). Außerdem verwendet Weyl einen allgemeineren Begriff der Unterteilung.