Messen mit Dehnungsmessstreifen

Formelsammlung für die elementaren Lastfälle

Stand: 21.01.2018, Kab.

Biegung

Berechnung des Biegemomentes aus der gemessenen Dehnung bzw aus der gemessenen Brückenverstimmung

Die maximale Spannung σ_b auf der Randfaser ergibt sich aus dem Biegemoment M_b und dem Widerstandsmoment W_b gegen Biegung:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} \quad \text{(Gl. 1)}$$

Für rechteckige Querschnitte mit der Balkenbreite b und der Balkenhöhe h gilt:

$$W_b = \frac{b\,h^2}{6} \quad \text{(Gl. 2)}$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz :

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad \text{(Gl. 3)}$$

und Gleichung 1) und 2) berechnet sich für das Moment aus der gemessenen Dehnung auf der Oberfläche eines Biegebalkens mit rechteckigem Querschnitt:

$$M_b = \epsilon \cdot E \cdot \frac{b\,h^2}{6} \quad \text{(Gl. 4)}$$

Mit der linearisierten Brückengleichung

$$\frac{\Delta Ud}{Us} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad \text{(Gl. 5)}$$

und dem Zusammenhang zwischen Dehnung und Widerstandsänderung für den Dehnungsmessstreifen

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \epsilon \quad \text{(Gl. 6)}$$

gilt für eine Vollbrücke mit $\varepsilon 1 = \varepsilon 3 = -\varepsilon 2 = -\varepsilon 4 = \varepsilon$

$$\frac{\Delta U_d}{U_s} = \frac{1}{4} (4\,k\,\epsilon) = k \cdot \epsilon \quad \text{(Gl. 7)}$$

Mit Gl. 7 in Gl. 4 erhält man:

$$M_b = \frac{\Delta U_d}{U_s} \cdot \frac{1}{k} \cdot E \cdot \frac{b\,h^2}{6} \quad \text{Gl. 8}$$

Torsion

Berechnung des Torsionsmomentes aus der gemessenen Dehnung bzw. aus der gemessenen Brückenverstimmung

Die maximale Schubspannung τ_t auf der Randfaser ergibt sich aus dem Torsionsmoment M_t und dem Widerstandsmoment W_t gegen Torsion

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{(Gl. 9)}$$

Für den zylindrischen Querschnitt ist das Widerstandsmoment Wt gleich dem polaren Widerstandsmoment Wp.

Für den Vollzylinder gilt:

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} = W_p \quad \text{(Gl 10a)}$$

Für den Hohlzylinder gilt:

$$W_t = \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{16 d_a} = W_p \quad \text{(Gl. 10b)}$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \text{(Gl. 11)}$$

und Gl. 9 und Gl. 10B berechnet sich das Moment M_t aus der Scherung Y

$$M_t = \gamma \cdot G \cdot W_p = \gamma \cdot G \cdot \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{16 d_a} \quad \text{(Gl. 12)}$$

Mit dem Dehnungsmessstreifen lässt sich nur die Dehnung ε erfassen, nicht die Scherung Y.

Der Zusammenhang zwischen Scherung und Dehnung unter einer Messrichtung von α=45° zur Längsachse gilt:

$$\epsilon_{45} = \gamma / 2 \quad \text{(Gl. 13) (vgl. Anhang, 2)}$$

Der Schubmodul G lässt sich aus dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν ableiten:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \text{(Gl. 14)}$$

Mit Gl. 13 und Gl. 14 in Gl. 12 ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen Dehnung und Torsionsmoment

$$M_t = 2 \cdot \epsilon_{45} \cdot \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{16 d_a} = \epsilon_{45} \cdot \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{16 d_a} = \frac{\Delta U_d}{U_s} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{16 d_a} \quad \text{(Gl. 15)}$$

ME-Meßsysteme GmbH
Neuendorfstr. 18a
16761 Hennigsdorf
Tel.: +49 3302 89824 60
Fax: +49 3302 89824 69
Mail: info@me-systeme.de
Web: www.me-systeme.de

Durch Vergleich von Gl. 15 mit Gl. 11 und Gl. 12 und aus dem (Mohrschen Spannungskreis für den Spannungsfall der Torsion)findet man auch:

$$\tau = \frac{E}{1+\nu} \cdot \epsilon_{45} = \sigma_1 = -\sigma_2 \quad \text{(Gl 16)}$$

Anhang

1) Axiales und polares Flächenträgheitsmoment für den Kreisquerschnitt

Beim polaren Flächenträgheitsmoment geht die neutrale Faser durch einen ein Pol (ein Punkt im Zentrum des Kreisquerschnittes.

Beim axialen Flächenträgheitsmoment ist die neutrale Faser eine Achse (eine Achse im Zentrum des Kreisquerschnittes.

Für einen Kreisquerschnitt gilt:

Das polare Flächenträgheitsmoment gegen Torsion ist doppelt so groß wie das axiale Flächenträgheitsmoment gegen Biegung:

$$I_p = \int_A r^2\, dA = \int_A (x^2 + y^2)\, dA = \int_A x^2\, dA + \int_A y^2\, dA = I_x + I_y$$

$$W_p = \frac{I_p}{(d/2)} = \frac{1}{2} W_b = \frac{1}{2} \frac{I_b}{(h/2)}$$

2) Zusammenhang zwischen Scherung und Dehnung

Quelle: Agne, Klaus: Technische Mechanik in der Feinwerktechnik. Aufgaben Beispiele Lösungen. Vieweg + Teubner verlag, Braunschweig, 1988.

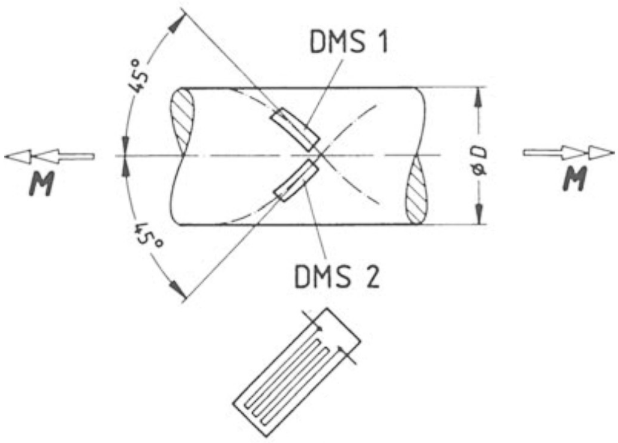


Abbildung 2: Torsionsmessung mit Dehnungsmessstreifen

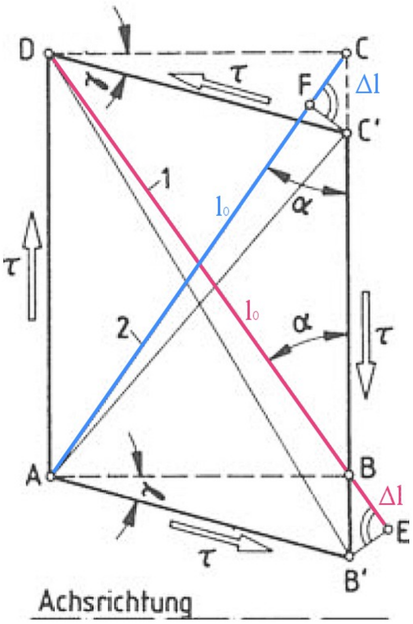


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Scherung γ und Dehnung Δl/l in der Messrichtung α

Die Kreisbögen B'E und C'F können für kleine Scherungen γ als Geraden angenommen werden. Für die Dehnungen ε_1 und ε_2 gilt:

$$\epsilon_1 = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}};\ \epsilon_2 = \frac{-\overline{CF}}{\overline{AC}};$$

Mit $\gamma \approx \tan\gamma = \overline{BB'}/\overline{AB} = \overline{CC'}/\overline{CD}$ werden ε_1 und ε_2 :

$$\epsilon_1 = \frac{\overline{BB'}\cos\alpha}{\overline{AB}/\sin\alpha} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}}\sin\alpha\cos\alpha = \gamma\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\epsilon_2 = \frac{\overline{CC'}\cos\alpha}{\overline{CD}/\sin\alpha} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CD}}\sin\alpha\cos\alpha = -\gamma\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

Für α = 45° wird

$$\epsilon_1 = \gamma/2;\ \epsilon_2 = -\gamma/2;$$

3) Widerstandsmomente gegen Torsion für ausgewählte Querschnitte

Quelle [1]: Läpple, Volker: Lösungsbuch zur Einführung in die Festigkeitslehre.Vieweg und Teubner Verlag, Wiesbaden, 2007.

Durch Einsetzen der Widerstandmomente Wt in Gl. 15 lässt sich das Torsionsmoment Mt aus der Dehnung bzw. Brückenverstimmung für nicht zylindrische Querschnitte berechnen.

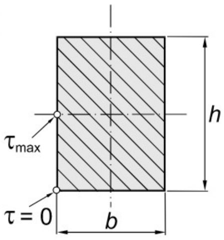
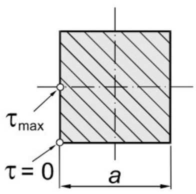
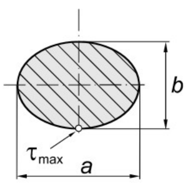
Profil	**Torsionsflächenmoment I_t**	**Torsionswiderstandsmoment W_t**
Rechteck 	$I_t = c_1 \cdot h \cdot b^3$ mit $c_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{0{,}630}{h/b} + \frac{0{,}052}{(h/b)^5}\right)$	$W_t = \frac{c_1}{c_2}\cdot h \cdot b^2$ und $c_2 = 1 - \frac{0{,}650}{1+(h/b)^3}$
Quadrat 	$I_t = 0{,}141 \cdot a^4$	$W_t = 0{,}208 \cdot a^3$
Ellipse 	$I_t = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$	$W_t = \frac{\pi}{16}\cdot a \cdot b^2$

Abbildung 3: Widerstandsmomente Wt für Rechteck-Querschnitte und Ellipse, aus [1]

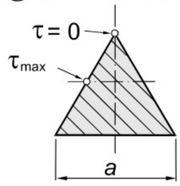
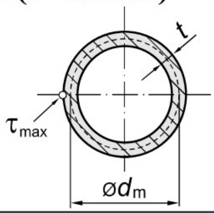
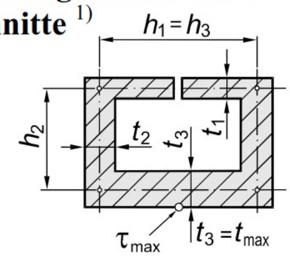
Profil	Torsionsflächenmoment I_t	Torsionswiderstandsmoment W_t
Gleichseitiges Dreieck 	$I_t = \frac{a^4}{46{,}2}$	$W_t = \frac{a^3}{20}$
Dünnwandiges, geschlossenes Kreisrohr (*t* = konst.) 	$I_t = \frac{\pi}{4} \cdot d_m^3 \cdot t$	$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot d_m^2 \cdot t$
Dünnwandige offene Hohlquerschnitte [1)] 	$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$	$W_t = \frac{1}{3 \cdot t_{max}} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$

Abbildung 4: Widerstandsmomente Wt für Dreieck-Querschnitte und dünnwandige, offene Hohlquerschnitte, aus [1]