

### Technische Numerik

**13.** Für die stückweise linear Interpolierende  $f_2(x)$  der auf dem Intervall  $[\frac{1}{5}, 1]$  gegebenen Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  gilt die Fehlerabschätzung

$$\int_{\frac{1}{5}}^1 [f(x) - f_2(x)]^2 dx \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f''(s)|^2 ds$$

Wie muss der Interpolationsknoten  $x_1$  gewählt werden, damit beide Summanden auf der rechten Seite übereinstimmen?

**14.** Sei  $f_n(x)$  eine auf den Stützstellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gebildete lineare Spline-Interpolationsfunktion. Man zeige, dass  $f_n(x)$  in der Form

$$f_n(x) = ax + b + \sum_{i=1}^{n-1} c_i |x_i - x|$$

dargestellt werden kann.

**15.** Es sei  $f(x)$  auf  $[a, b]$  zweimal stetig differenzierbar. Man beweise die folgende Fehlerabschätzung für die Mittelpunktsformel

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} f''(\eta) (b-a)^3, \quad \eta \in (a, b).$$

Hinweis: Man verwende die Taylorentwicklung von  $f(x)$  um  $\frac{a+b}{2}$ .