

# Konstruktion

Zeitschrift für Produktentwicklung und Ingenieur-Werkstoffe

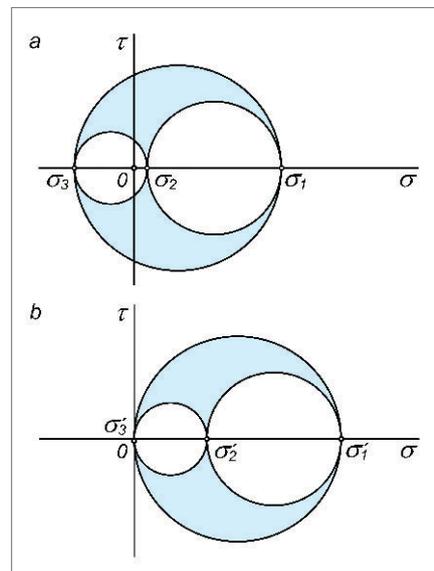
## Randnotizen zur Gestaltänderungsenergiehypothese

Auch die bei Festigkeitsnachweisen verbreitet angewendete Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) hat ihre Stärken und Schwächen. Die nachfolgenden Gedanken über mehr oder weniger bekannte Eigenheiten und Zusammenhänge der GEH können zu deren besserem Verständnis beitragen. Sie fördern damit die Sicherheit bei der Wahl der geeigneten Festigkeitshypothese und die Verlässlichkeit der Resultate.

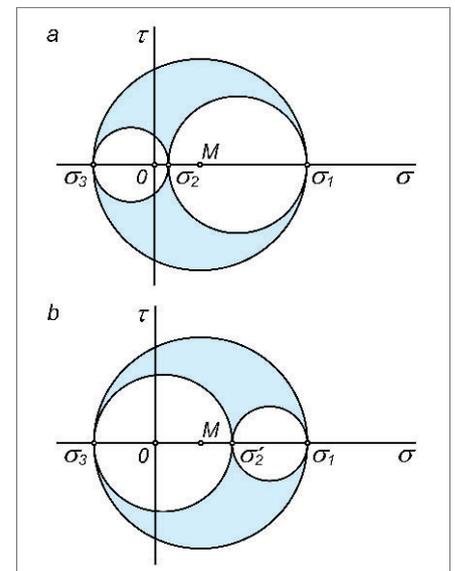
### 1 Einleitung

Unter den Hypothesen zur Umrechnung mehrachsiger Spannungszustände in einen als gleichwertig betrachteten einachsigen Spannungszustand dürfte die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) vermutlich die bekannteste und am häufigsten benutzte sein. Sie ist in praktisch alle FEM-Programme implementiert, und dies zumeist unter dem Namen von Mises [1], obwohl sie Jahre zuvor schon von Huber [2] vorgeschlagen und bereits Mitte des 19. Jahrhunderts von Maxwell [3] erwogen wurde. Oft wird sie mehr oder weniger automatisch angewählt, wenn es darum geht, Vergleichsspannungen zu berechnen. Dies ist aber definitiv keine gute Idee. Denn kaum alle User dürften sich über die Eigenheiten der GEH im Klaren sein und die Opportunität dieser Wahl im Einzelfall vertieft abgeklärt haben. Die nachfolgenden Betrachtungen möchten zum besseren Verständnis der Zusammenhänge beitragen, aber auch zum Nachdenken anregen.

Alle Festigkeitshypothesen ordnen dem wirklichen mehrachsigen Spannungszustand aufgrund eines bestimmten werkstoffmechanischen Kriteriums einen als gleichwertig postulierten, virtuellen einachsigen



**Bild 1**  
Spannungszustände gleicher GEH-Vergleichsspannung: Verschiebung auf der  $\sigma$ -Achse



**Bild 2**  
Spannungszustände gleicher GEH-Vergleichsspannung: Spiegelung am Mittelpunkt M des größten Spannungskreises

Spannungszustand zu. Dessen größte Normalspannung, die Vergleichsspannung  $\sigma_{Vmax}$ , kann in der Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{Vmax} \leq \sigma_{zul} = \sigma_G \cdot \frac{C}{S} \quad (1)$$

unter Einrechnung eines Einflussfaktors  $C$  und eines Sicherheitsfaktors  $S$  dem im einachsigen Versuch ermittelten Spannungs-Grenzwert  $\sigma_G$  gegenübergestellt oder in der Fließbedingung

$$\sigma_{Vmax} = \sigma_f \quad (2)$$

mit der Fließspannung  $\sigma_f$  gleichgesetzt werden. Analoges gilt für die Festigkeitshypothesen auf Basis von Dehnungsgrößen.

### 2 Einige Eigenschaften der GEH

Mit der unter Belastung aufgebauten, volumenbezogenen Gestaltänderungsenergie als Kriterium ergibt sich die Vergleichsspannung nach der GEH, lineare Elastizität vorausgesetzt, in der bekannten Form

$$\sigma_{V,GEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3)$$

#### Autor

Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz  
 Institutspartner Institut für Werkstofftechnik und  
 Kunststoffverarbeitung (IWK)  
 HSR Hochschule für Technik Rapperswil  
 Oberseestraße 10, CH-8640 Rapperswil  
 E-Mail: iwkw@hsr.ch  
 E-Mail: jkunz@hsr.ch  
 www.iwk.hsr.ch

in Funktion der Hauptspannungen. Durch die Gleichsetzung von  $\sigma_{V,GEH}$  mit der Fließgrenze  $\sigma_f$  gemäß (2) und die Abstraktion vom werkstoffmechanischen Hintergrund machte sie von Mises [1] zum mathematischen Kriterium für den Beginn plastischer Verformungen.

Die Hauptspannungsdifferenzen unter dem Wurzelausdruck in (3) stellen die Durchmesser der drei Spannungskreise dar, mit denen der Spannungszustand im  $\sigma, \tau$ -Koordinatensystem [4] veranschaulicht werden kann (Bild 1a). Die GEH-Vergleichsspannung wird also nicht von den Größen der einzelnen Hauptspannungen bestimmt, sondern von deren Differenzen. Dies bedeutet, dass nach der GEH alle Spannungszustände mit gleichen Hauptspannungsdifferenzen gleichwertig sind, unabhängig davon, wo auf der  $\sigma$ -Achse die Spannungskreise liegen (Bild 1a und b). Es spielt auch keine Rolle, wie sie zueinander angeordnet sind. Denn es ergibt sich eine Symmetrie bezüglich des Zentrums M des größten Kreises, das heißt zum arithmetischen Mittel  $(\sigma_1 + \sigma_2) / 2$  der größten und der kleinsten Hauptspannung (Bild 2), wobei hier und nachfolgend die übliche Konvention  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  angewendet wird.

Gleich große Vergleichsspannungen können sich auch bei Spannungszuständen mit veränderten Hauptspannungsdifferenzen ergeben, solange

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{V,GEH} \cdot (2/\sqrt{3}) \approx 1,15 \cdot \sigma_{V,GEH}$$

bleibt, ein Ergebnis, das sich mathematisch wie grafisch leicht bestimm-

men lässt. Der Grenzfall stellt sich bei  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2$  ein, wenn also die mittlere Hauptspannung dem arithmetischen Mittel der größten und der kleinsten Hauptspannung entspricht.

Geht man umgekehrt von einer vorgegebenen größten Hauptspannungsdifferenz  $\sigma_1 - \sigma_3 = k$  aus, so erreicht die Vergleichsspannung ihren Höchstwert  $\sigma_{V,GEH} = \sigma_1 - \sigma_3$ , und zwar dann, wenn zwei der drei Hauptspannungen gleich groß sind. Ihr Minimum erreicht sie bei  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2$  mit

$$\sigma_{V,GEH} = (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot (\sqrt{3}/2) \approx 0,866 \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (\text{Bild 3}).$$

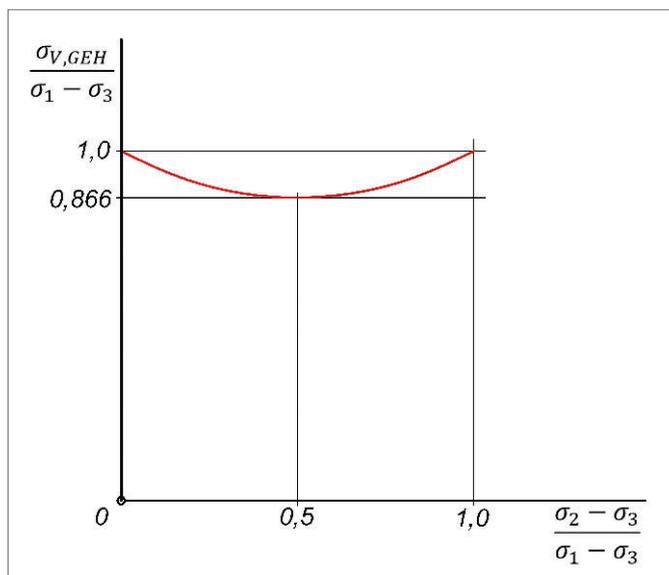
Diese Überlegungen sind keineswegs unwichtig. Beim dünnwandigen Rohr unter Innendruck  $p$  zeigt sich dies besonders klar. Ist das Rohr mit Innendurchmesser  $d$  und Wanddicke  $s$  offen, etwa unter mechanischer Belastung einer Pressverbindung, so stellt sich ein einachsiger Spannungszustand mit der Umfangsspannung  $\sigma_1 = p \cdot d/2 \cdot s$  als einzige von Null verschiedene Hauptspannung ein, und es ist  $\sigma_{V,GEH} = \sigma_1$ . Handelt es sich aber um ein geschlossenes Rohr, wird der Spannungszustand mit der zusätzlichen Achsialspannung  $\sigma_2 = \sigma_1/2$  zweiachsig. Die GEH liefert in diesem Fall  $\sigma_{V,GEH} = \sigma_1 \cdot \sqrt{3}/2 = 0,866 \cdot \sigma_1$ . Dies bedeutet nichts anderes, als dass nach der GEH die Werkstoffbeanspruchung durch die zusätzliche Hauptspannung gegenüber dem offenen Rohr um 13,4 % abnimmt. Diese Feststellung erscheint etwas merkwürdig, ist aber zumindest für ausge-

wählte Werkstoffe wie Eisen, Kupfer und Nickel experimentell unterlegt [5]. Wie aber soll eine solche Aussage werkstoffmechanisch begründet werden? Sicher ist, dass die Überlagerung der zweiten Hauptspannung wegen der Querkontraktion die Dehnung in der ersten Haupttrichtung und damit die resultierende Gestaltänderungsenergie im Volumenelement reduziert. Es könnte aber auch ein Hinweis darauf sein, dass die Werkstoffbeanspruchung beim mehrachsigen Spannungszustand auch etwas mit der größten Dehnung zu tun hat [6]. Im Gegensatz zur GEH führt die weiter unten erwähnte Schubspannungshypothese in beiden Fällen zu  $\sigma_{V,SSH} = \sigma_1$ , berücksichtigt also die zwischen den beiden Extremwerten 0 und  $\sigma_1$  liegende Hauptspannung  $\sigma_2$  nicht.

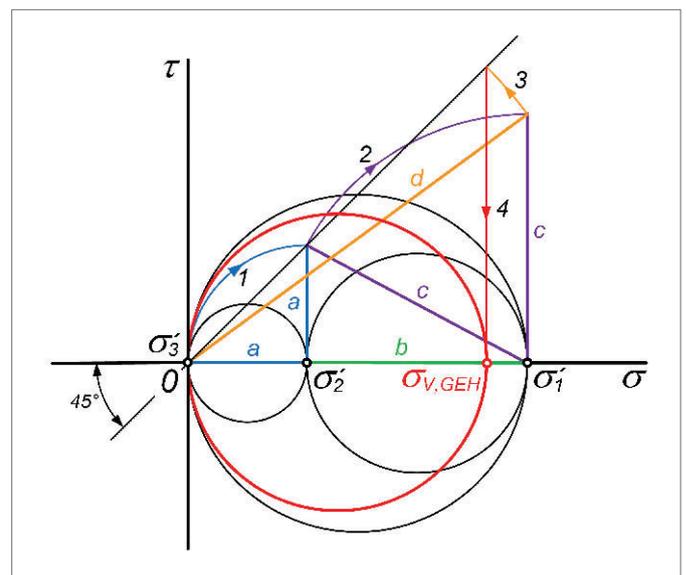
### 3 Geometrische Konstruktion der GEH-Vergleichsspannung

Es mag vielleicht überraschen, dass der GEH-Vergleichsspannungszustand auch grafisch bestimmt werden kann. Solche Lösungen finden heutzutage eher wenig Beachtung, haben aber gegenüber den analytischen und digitalen Methoden den Vorteil, anschaulich zu sein und somit das Verständnis für die Zusammenhänge zu fördern. Deshalb soll diese recht einfache geometrische Konstruktion, die zur Vergleichsspannung nach der GEH führt, hier vorgestellt werden (Bild 4).

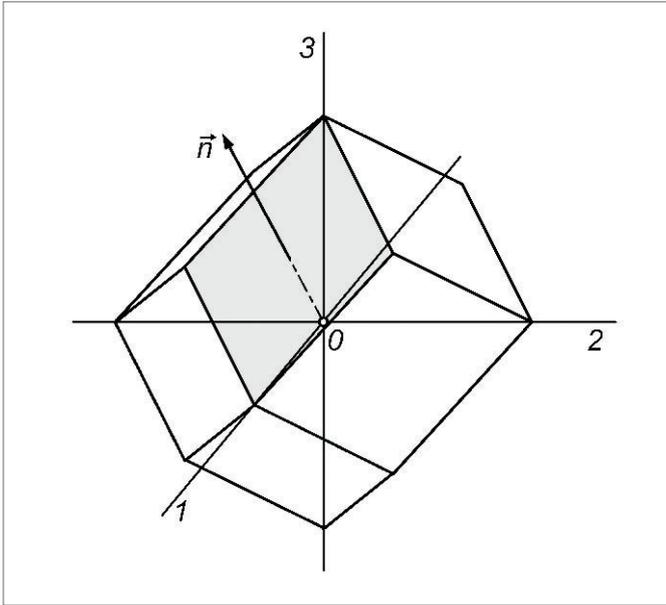
Die Überlegung geht von der Mohrschen Kreisdarstellung des räumlichen



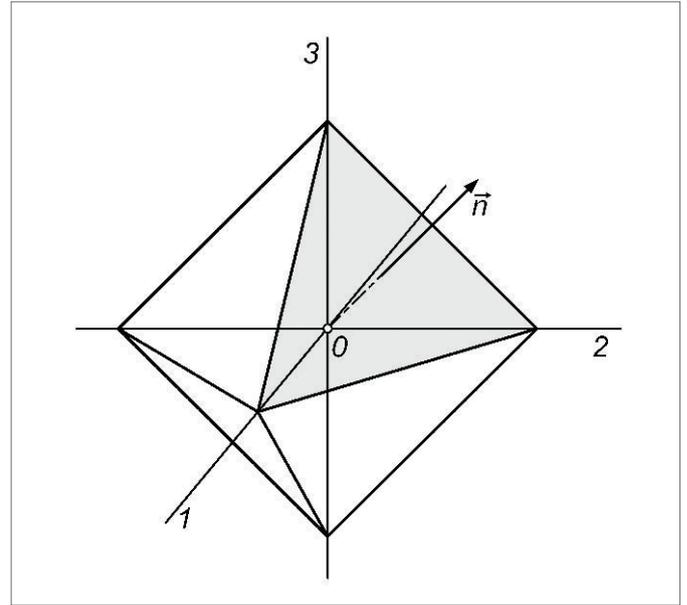
**Bild 3**  
Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die GEH-Vergleichsspannung



**Bild 4**  
Graphische Bestimmung des GEH-Vergleichsspannungszustandes in vier Schritten



**Bild 5**  
Fläche größter Schubspannung am regulären Rhombendodekaeder im 1,2,3-Hauptachsensystem



**Bild 6**  
Fläche der Oktaederschubspannung am regulären Oktaeder im 1,2,3-Hauptachsensystem

Spannungszustandes aus [4], in der die Klammerausdrücke unter der Wurzel in (3) als Hauptspannungsdifferenzen die Durchmesser der drei Kreise bedeuten (Bild 1a). Der Wurzelausdruck selber entspricht der Länge der Raumdiagonalen eines Quaders mit den Seitenlängen der drei Kreisdurchmesser, stellt also den euklidischen Abstand zwischen einem Punkt mit den Hauptspannungsdifferenzen als Koordinaten und dem Koordinatenursprung in einem kartesischen Koordinatensystem dar. Diesen euklidischen Abstand kann man einfach konstruieren.

Vor der eigentlichen Konstruktion werden die drei Spannungskreise um  $\sigma_3$  entlang der  $\sigma$ -Achse so verschoben, dass  $\sigma_3'$  als kleinste der Hauptspannungen durch den Ursprung 0 des  $\sigma, \tau$ -Koordinatensystems geht, was auf die Größe von  $\sigma_{V,GEH}$  keinen Einfluss hat (Bild 1b). Im ersten Schritt (Bild 4) wird nun der Durchmesser  $a = \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_3$  senkrecht hochgeklappt, sodass er mit  $b = \sigma_1' - \sigma_2'$  ein rechtwinkliges Dreieck bildet. Dessen Hypotenuse  $c$  wird im Schritt 2 nun ihrerseits senkrecht hochgeklappt; sie bildet mit  $a + b = \sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_3$  ein neues rechtwinkliges Dreieck. Die nun entstandene neue Hypotenuse  $d$  hat, wie man sich leicht überzeugen kann, die Länge des Wurzelausdrucks von (3). Durch Drehung von  $d$  um den Ursprung auf die  $45^\circ$ -Gerade durch 0 (Schritt 3) und anschließende Projek-

tion auf die  $\sigma$ -Achse (Schritt 4) wird sie um den Faktor  $\sqrt{2}$  verkleinert, und damit ist die Vergleichsspannung  $\sigma_{V,GEH}$  bestimmt.

Anhand dieser Konstruktion lässt sich einfach bestätigen, dass bei gegebener größter Hauptspannungsdifferenz  $\sigma_1 - \sigma_3$  die GEH-Vergleichsspannung für  $\sigma_2 = 0,5 \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)$  minimal wird (Bild 3).

#### 4 GEH und die Schubspannungen

Die Radien der drei Spannungskreise (Bild 1), also die Hälften der Hauptspannungsdifferenzen in (3), entsprechen den jeweils größten Schubspannungen bei Drehung der Flächennormalen um die an der Hauptspannungsdifferenz nicht beteiligten Hauptachsen. Dieser Zusammenhang zeigt eine gewisse Nähe der GEH zur Schubspannungshypothese (SSH), die mit

$$\sigma_{V,SSH} = 2 \cdot \tau_{max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (4)$$

von der größten Schubspannung als Vergleichsbasis ausgeht [7, 8]. Sie hat mit der GEH gemeinsam, dass sie bei allseitig gleichem Zug oder Druck mit  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  als hydrostatischem Spannungszustand den Wert Null liefert und damit einem spröden Werkstoffverhalten nicht gerecht wird. Eine Tatsache, die klar macht, dass ein Spannungszustand nie allein aufgrund einer Festigkeitshypothese, sondern nur in einer gesamtheitlichen Betrachtung vor dem Hintergrund des werkstoffmechanischen Geschehens beurteilt werden kann [9]. Die SSH bewertet einen vorliegenden Spannungszustand generell etwas strenger als die GEH, denn es gilt  $\sigma_{V,SSH} \geq \sigma_{V,GEH}$ .

Gelegentlich wird an der SSH bemängelt, dass sie einzig auf die maximale Schubspannung abstellt und damit – im Gegensatz zur GEH – die mittlere der drei Hauptspannungen nicht berücksichtigt. Dieser Einwand ist, wie oben dargelegt, nicht von der Hand zu weisen. Die Frage aber, inwieweit er werkstoffmechanisch relevant ist, kann nicht generell mit ja oder nein beantwortet werden. Zumal sich die Werkstoffe bekanntlich alles andere als einheitlich verhalten.

Die größte in einem Spannungszustand auftretende Schubspannung wirkt in einer Ebene, die zu mindestens zwei der drei Hauptachsen um  $45^\circ$  geneigt und zur dritten Hauptachse parallel ist. Im Fall von  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  ist das die Ebene, deren Normale mit der Winkelhalbierenden zwischen den Achsen 1 und 3 zusammenfällt. Diese drei Ebenen können als Flächen eines regulären Rhombendodekaeders im 1,2,3-Hauptachsen-System des Spannungszustandes aufgefasst werden (Bild 5). Die Eckpunkte der rhombischen Flächen sind die Durchstoß-

punkte der Achsen und der Raumdiagonalen des 1,2,3-Koordinatensystems durch diese Ebenen.

## 5 GEH und die Oktaederschubspannung

Im Zusammenhang mit der GEH ist eine weitere Schubspannung von Interesse, nämlich jene in der Fläche eines regulären Oktaeders, dessen Ebenen senkrecht auf den Raumdiagonalen des 1,2,3-Hauptachsen-Systems stehen und dessen Eckpunkte auf den Achsen liegen (Bild 6). Diese sogenannte Oktaederschubspannung hat den Wert

$$\tau_{okt} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sigma_{V,GEH} = 0,471 \cdot \sigma_{V,GEH} \quad (5)$$

Sie stimmt bis auf den Zahlenfaktor vor der Wurzel mit der GEH-Vergleichsspannung (3) überein, weist also eine formale Verwandtschaft mit der GEH auf. Wohl diese Tatsache dürfte dazu geführt haben, die Oktaederschubspannung als Kriterium für eine Vergleichsspannung insbesondere für die Fließbedingung (2) zu verwenden (Oktaederschubspannungshypothese [10]). Dabei stellt sich die Frage, welche Werkstoffkenngröße der Oktaederschubspannung (5) gegenübergestellt werden soll. Zieht man, wie auch etwa propagiert wird [11, S. 494], den in (5) aufgezeigten Zusammenhang zum Vergleich (2) mit der Fließspannung  $\sigma_F$  bei, so ist gegenüber der direkten Anwendung der GEH gar nichts gewonnen. Setzt man aber  $\tau_{okt}$  mit der Schubspannung  $\tau_F$  bei Fließbeginn gleich, muss man erklären können, warum hierfür nicht die maximale Schubspannung maßgebend sein soll, die ja in allen Fällen die Oktaederschubspannung übersteigt. Je nach Spannungszustand ergibt sich wegen  $0,816 \leq \tau_{okt} / \tau_{max} \leq 0,943$  ein Unterschied von immerhin 6 bis 22,5 %.

Das heißt nichts anderes, als dass plastische Verformungen schon vor Erreichen der Fließgrenze in der Oktaederebene eintreten können.

## 6 Quintessenz

Die GEH ist ein wichtiges, vielfach bewährtes und beliebtes Instrument bei Festigkeitsrechnungen. Doch vermag auch sie – wie die andern Hypothesen – nur einen Teil des Spektrums von Spannungszuständen und mechanischem Werkstoffverhalten zu erfassen. Man ist gut beraten, sie nicht unreflektiert anzuwenden, sondern ihre Eignung für den konkreten Fall im Vergleich mit andern Festigkeitshypothesen sorgfältig abzuwägen. Diese Thematik soll hier jedoch nicht auch noch ausgebreitet werden. Zur Frage, unter welchen Bedingungen welche Hypothese die treffendste ist, findet man in der Literatur vielerlei Hinweise [9]. Dass diese allerdings auch etwas auseinandergehen können, dürfte nicht zuletzt an der Komplexität der Materie liegen. Was die Aufgabe des Anwenders natürlich auch nicht leichter macht. Umso besser, wenn er über die Eigenheiten, Schwächen und Grenzen der in Frage kommenden Festigkeitshypothesen selber Bescheid weiß.

## Literatur

- [1] von Mises, R.: Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Heft 4. Berlin 1913, S. 582–592
- [2] Huber, M. T.: Die spezifische Formänderungsarbeit als Maß der Anstrengung. Csaopisme technice (Lwów) 22(1904), S. 38–40, 49–50, 61–62, 80–81
- [3] Maxwell, J. C.: Briefliche Mitteilung an W. Thomson, 1856
- [4] Mohr, O.: Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. Der Civilingenieur 28(1882), S. 113–156
- [5] Lode, W.: Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 303. VDI-Verlag Berlin 1928
- [6] Menges, G.: Erleichtertes Verständnis des Werkstoffverhaltens bei verformungsbezogener Betrachtungsweise. Fortschritts-Bericht VDI-Reihe 5, N2. 12(1971)
- [7] Coulomb, C. A.: Essai sur une application des règles des Maximis et Minimis à quelques Problemes de Statique, relatifs à l'Architecture. Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, Vol. 7 (1773), S. 343–382
- [8] Tresca, H.: Mémoires sur l'écoulement des corps solides. Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut impérial de France – Sciences mathématiques et physiques, tome 18, Paris 1868, S. 733–799
- [9] Kunz, J.: Spannungszustand und Werkstoffverhalten. KunststoffXtra 8(2018)4, S. 14–18
- [10] Nádai, A.: Theories of Strength. Journal of Applied Mechanics (1933)1, S. 11–129
- [11] Issler, L., Ruoss, H., Häfele, P.: Festigkeitslehre – Grundlagen. Korr. Nachdruck, Springer Verlag Berlin 2006

Wir bringen unsere Fachkompetenzen als professionelle Partner der Industrie kundenspezifisch und bedürfnisorientiert in Ihre Projekte ein, sei es in Form von Beratungen, Studien, Entwürfen, Konstruktions-, Berechnungs-, Prüfaufträgen oder experimentellen Untersuchungen in unseren Labors.

**DAS BINDEGLIED ZWISCHEN WISSENSCHAFT UND INDUSTRIE**