## Ganzrationale Funktionen (Jgst. 10) - Nullstellen

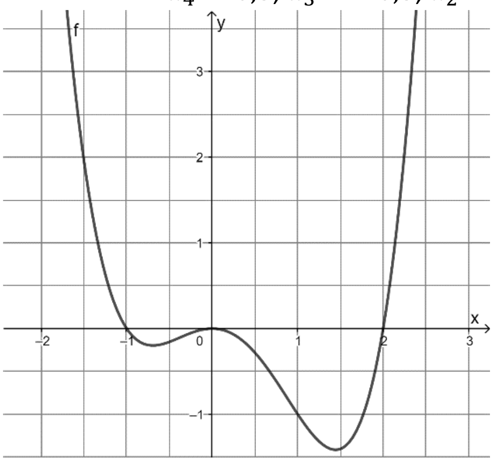
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit $a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ist der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades. Die Definitionsmenge jeder ganzrationalen Funktion ist $\mathbb{R}$.

**Musterbeispiel:** $f(x) = 0{,}5x^4 - 0{,}5x^3 - x^2$ ist eine ganzrationale Funktion vom **Grad 4**.

**Es gilt:** $a_4 = 0{,}5,\ a_3 = -0{,}5,\ a_2 = -1$ und $a_1 = a_0 = 0$

**<u>Graph</u>:**




**Schritt 3:** Term in faktorisierter Form aufschreiben
Da $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$ Lösungen der Gleichung
$0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$ gilt:
$0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0{,}5(x-2)(x+1)$
Achtung: 0,5 nicht vergessen!

**Bestimmung der <u>Nullstellen</u>:** $f(x) = 0$
Vorgehensweise im Musterbeispiel:

$$f(x) = 0{,}5x^4 - 0{,}5x^3 - x^2 = x^2 \cdot (0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1) = 0{,}5x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

**Schritt 1:** Wenn möglich höchste Potenz von x ausklammern
Hier: $x^2$

**Schritt 2:** Ist der „übriggebliebene" Termteil bereits ein quadratischer Term?
➔ Falls ja: Gleich 0 setzen: $0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$
➔ Mitternachtsformel anwenden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-0{,}5) \pm \sqrt{(-0{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}}{1} = 0{,}5 \pm 1{,}5$$

$\Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = -1$

***Anmerkung:** Falls der Grad des „übriggebliebenen" Termteils höher als 2 ist, können wir die Aufgabe mit unseren Mitteln nicht lösen.*

**Schritt 4:** Nullstellen und Ihre Vielfachheit anhand der faktorisierten Form (= Nullstellenform) ablesen

$$f(x) = 0{,}5x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-2) = 0$$

1. Nullstelle: $x_1 = 0$
doppelte Nst -> kein Vzw

2. Nullstelle: $x_2 = -1$
einfache Nst -> Vzw
Grund: $(x+1) = (x+1)^1$

3. Nullstelle: $x_3 = 2$
einfache Nst -> Vzw
Grund: $(x-2) = (x-2)^1$

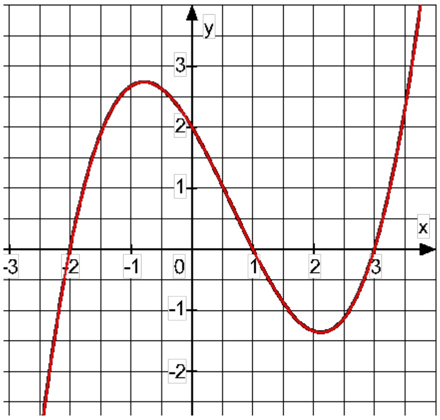
**Hinweise:**
(1) Ein Produkt wird dann 0, wenn ein Faktor 0 ist -> Welches x muss man jeweils einsetzen, damit ein Faktor 0 wird?
(2) Die Vielfachheit der Nullstellen liest man an den Potenzen der zugehörigen Linearfaktoren ab:
z. B. Linearfaktor $x^2$ -> doppelte Nullstelle, hier berührt der Graph die x-Achse

**Achtung:**
- Nicht jede ganzrationale Funktion hat eine faktorisierte Form, denn nicht jede ganzrationale Funktion hat eine Nullstelle. (z. B. $f(x) = 4x^4 + x^2 + 2$ hat keine Nullstelle)
- Die Anzahl der Nullstellen (mit ihrer Vielfachheit) ist höchstens so groß wie der Grad der Funktion.

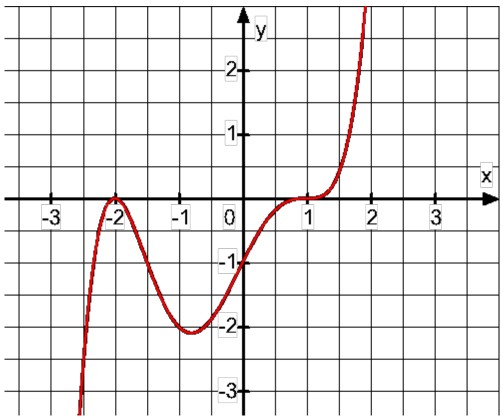
**Aufgaben:**

1. Zerlege die Funktionsterme wenn möglich vollständig in Linearfaktoren. Gib den Grad der Nullstellen an.
   a) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3$ b) $f(x) = 2x^5 - 8x^3$ c) $f(x) = 2x(x^2 + x - 12)(x - 3)$
   d) $f(x) = x^4 - 15x^2 - 16$ (Tipp zu d: Löse die Gleichung $u^2 - 15u - 16 = 0$)

2. Bestimme die Funktionsterme ganzrationaler Funktionen zu den gegebenen Graphen. Die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen mit den Achsen sind ganzzahlig. Der Grad und ein Punkt P des Graphen sind jeweils angegeben.
   a) Grad 3; P(0|2)




   b) Grad 5; P(–1|–2)




3. Gib den Term einer ganzrationalen Funktion an, die …
   a) Grad 5 sowie eine dreifache Nullstelle bei $x_1 = -4$ und eine doppelte Nullstelle bei $x_2 = 10$ hat.
   b) Die y-Achse im Punkt $P(0|5)$ schneidet und eine vierfache Nullstelle bei $x = -1$ hat.
   c) Grad 6 hat, eine Nullstelle bei $x = 6$ besitzt und sonst nur im negativen Bereich verläuft.

**Lösung:**

**Aufgabe 1:**

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3(x-4)$ Klammere $\frac{1}{3}x^3$ aus; Nullstellen: $x_1=0$ (dreifach) und $x_2=4$ (einfach)

b) $f(x) = 2x^5 - 8x^3 = 2x^3(x^2-4) = 2x^3(x+2)(x-2)$

Grund: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ $\Rightarrow x_{2/3} = \pm 2$ $\Rightarrow x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Nullstellen: $x_1 = 0$ (dreifach); $x_2 = -2$ (einfach) und $x_3 = 2$ (einfach)

c) $f(x) = 2x(x^2 + x - 12)(x-3)$

Finde Nullstellen des quadratischen Termteils: $x^2 + x - 12 = 0$; Lösung: $x_3 = -4$; $x_4 = 3$

$\Rightarrow f(x) = 2x(x^2 + x - 12)(x-3) = 2x \cdot (x-3) \cdot (x+4) \cdot (x-3) = 2x(x-3)^2(x+4)$

Insgesamt: $x_1 = 0$ (einfach); $x_2 = 3$ (doppelt) und $x_3 = -4$ (einfach)

d) $f(x)=x^4-15x^2-16$; Substitution: $u:=x^2 \Rightarrow$ $f(x)=u^2-15u-16 = 0$ $\Leftrightarrow u_1 = 16$ ; $u_2 = -1$ ;

Resubstitution: $u = x^2$

$u_1 = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 4$; somit $x_1 = 4$ (einfach); $x_2 = -4$ (einfach)

$u_2 = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ geht nicht und somit keine weitere Nullstelle

Zerlegung in *Linear*faktoren ist somit nicht möglich. Die „bestmögliche“ Zerlegung würde lauten:

$$f(x)=x^4-15x^2-16=(x-4)(x+4)(x^2+1)$$

**Aufgabe 2:**

a) $f(x) = a \cdot (x+2)(x-1)(x-3)$ $f(0) = 2$ liefert $a = \frac{1}{3}$

Insgesamt: $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x-1)(x-3)$

b) $f(x) = a \cdot (x+2)^2(x-1)^3$ $f(-1) = -2$ liefert $a = \frac{1}{4}$

Insgesamt: $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^3$

**Aufgabe 3:** Hinweis: Bei diesem Aufgabentyp gibt es mehrere verschiedene korrekte Lösungen

a) Grad 5 hat und eine dreifache Nullstelle bei $x_1 = -4$ und eine doppelte Nullstelle bei $x_2 = 10$ hat.
z. B. $f(x) = (x+4)^3(x-10)^2$

b) die y-Achse im Punkt $P(0|5)$ schneidet und eine vierfache Nullstelle bei $x = -1$ hat.
z. B. $f(x) = a \cdot (x+1)^4$
Weil $P(0|5)$ auf dem Graph von $f$ liegen muss, muss gelten: $f(0) = a \cdot (0+1)^4 = 5.$ $\Rightarrow a \cdot 1 = 5 \Rightarrow a = 5$

c) Grad 6 hat, nur im negativen Bereich verläuft und eine Nullstelle bei $x = 6$ besitzt. z. B. $f(x) = -(x-6)^6$