Ferienkurs Quantenmechanik

Struktur und Grundlagen der Quantenmechanik

1 Kurze Fragen

a) Nennen Sie zwei Experimente, die ein Elektron als Welle identifizieren, und zwei, die es als Teilchen identifizieren.

b) Für welche Amplitudenverteilung $\varphi(x,t)$ nimmt ein Wellenpaket die minimale Orts-Impuls-Unschärfe $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ an?

c) Leiten Sie die allgemeine Form des Zeitentwicklungsoperators aus der Tatsache her, dass sich $\psi(\vec{x},t)$ durch Kentnis von $\psi(\vec{x},t_0)$ und seiner Zeitentwicklung eindeutig bestimmen lässt.

d) Warum kann die Schrödinger-Gleichung keine relativistische Dynamik beschreiben?

e) Lässt sich beim Doppelspaltexperiment der Auftreffort eines einzelnen Elektrons auf dem Detektor voraussagen? Welche Aussage kann man treffen?

f) Definieren Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes.

g) Wie lautet die Normierungsbedingung für die Wahrscheinlichkeitsamplitude?

h) Ist die Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ direkt messbar? Wenn nicht, was sonst?

2 Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

2.1 Normierung

Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung homogen sein muss, damit die Normierungsbedingung für alle Zeiten erfüllt sein kann.

Hinweis: Nehmen Sie an, die Schrödinger-Gleichung besäße eine Inhomogenität, und zeigen Sie, durch Einsetzen der SG in die Normierungsbedingung, dass diese nicht zu allen Zeiten erfüllt bleibt.
Benutzen Sie den Gaußschen Integralsatz

$$\int_V d^3x\, \vec{\nabla}\, \vec{F} = \oint_S d\Omega\, \vec{F}; \qquad (V \subset \mathbb{R}^n) \text{ kompakt und } \vec{F} \text{ stetig differenzierbar} \tag{1}$$

und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}[\psi^*(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi] \tag{2}$$

3 Wellenpakete

3.1 Gaußsches Wellenpaket

Wir betrachten das eindimensionale Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\varphi(p)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right\} \tag{3}$$

mit folgender Amplitudenverteilung:

$$\varphi(p) = A\exp\left\{-(p-p_0)^2 d^2/\hbar^2\right\} \tag{4}$$

a) Werten Sie explizit $|\psi(x,t)|^2$ für das angegebene Wellenpaket aus.
Hinweis: Benutzen Sie die Substitutionen

$$a = \frac{d^2}{\hbar^2} + i\frac{t}{2m\hbar},\ \ b = \frac{d^2 p_0}{\hbar^2} + i\frac{x}{2\hbar},\ \ c = \frac{d^2 p_0^2}{\hbar^2} \tag{5}$$

und das Gauß-Integral

$$\int dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{6}$$

b) Zeigen Sie, dass für die Normierungskonstante $A = \sqrt[4]{8\pi d^2}$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitutionen

$$v = \frac{p_0}{m},\ \Delta = \frac{t\hbar}{2md^2} \tag{7}$$

und die Identität

$$2\mathrm{Re}\{(b^2 - ac)a^*\}/|a|^2 = \frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)} \tag{8}$$

c) Interpretieren Sie das Ergebnis für $t = 0$ und $t > 0$. Was ist v?

4 Operatoren, Kommutatoren

4.1 Wichtige Kommutatoren

Berechnen Sie folgende wichtige Kommutatoren in Ortsdarstellung:

a)

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \tag{9}$$

b) Sei $\hat{P}$ der Paritätsoperator und $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(x)$ der Hamilton-Operator mit $V(x)$ symmetrisch.

$$[\hat{H}, \hat{P}] \tag{10}$$

4.2 Operatoreigenschaften

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte hermitescher Operatoren reell sind.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen hermitescher Operatoren orthogonal aufeinander stehen (für den nicht-entarteten Fall). Gilt die Orthogonalität auch für den entarteten Fall?

c) Zeigen Sie, dass kommutierende Operatoren einen gemeinsamen Satz an Eigenfunktionen haben.

d) Zeigen Sie, dass für $[\hat{A},\hat{A}^\dagger] = 1$ und jede Funktion $f(\hat{A}^\dagger)$ mit $\hat{A}\,|0\rangle = 0$ gilt:

$$\hat{A} f(\hat{A}^\dagger)\,|0\rangle = \frac{df(\hat{A}^\dagger)}{d\hat{A}^\dagger}\,|0\rangle \tag{11}$$

4.3 Matrix-Exponentielle

Die Matrix-Exponentielle für einen Operator ist definiert als: $e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$. Weiter gilt:

$$e^{-\hat{A}} e^{\hat{A}} = e^{\hat{A}} e^{-\hat{A}} = 1 \tag{12}$$

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \quad \text{für} \quad [\hat{A},\hat{B}] = 0 \tag{13}$$

a) Zeigen Sie für einen hermiteschen Operator $\hat{H}$, dass der zu $e^{-i\hat{H}}$ der zu $e^{i\hat{H}}$ adjungierte Operator ist.

b) Zeigen Sie, dass $\hat{U} = e^{i\hat{H}}$ für einen hermiteschen Operator $\hat{H}$ unitär ist.

c) Nehmen Sie für zwei nicht-kommutierende Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ die Funktion

$$f(\lambda) = e^{\lambda\widehat{A}}\widehat{B}e^{-\lambda\widehat{A}} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

an.
Benutzen Sie diese Funktion, um die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^{\widehat{A}}\,\widehat{B}\,e^{-\widehat{A}} = \widehat{B} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]^{(n)}$$

zu zeigen.

Hierbei sind: $\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]^{(1)} = \left[\widehat{A},\widehat{B}\right]$ und $\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]^{(n)} = \left[\widehat{A},\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]^{(n-1)}\right]$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung von $f(\lambda)$.

4.4 Matrixdarstellung

Der Hamilton-Operator eines Zwei-Niveau-Systems lautet:

$$\hat{H} = \varepsilon\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

Hierbei sind $|1\rangle$ und $|2\rangle$ die orthonormierten Basiszustände. Der Parameter ε hat Energieeinheiten.

a) Wie lautet die Matrixdarstellung des Operators $\hat{H}$ in dieser Basis.

b) Finden Sie die Energieeigenwerte und die zugehörigen Eigenzustände des Operators $\hat{H}$.

5 Dirac-Darstellung

5.1 Dirac-Formalismus für ebene Wellen

Die Lösungen in Form von ebenen Wellen $\psi(x) \propto e^{ikx}$ der freien Schrödinger-Gleichung werden im Dirac-Formalismus durch (uneigentliche) Zustände $|k\rangle$ beschrieben, die in Ortsdarstellung die Form $\langle x|k\rangle = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$

a) Verifizieren Sie die Orthogonalität $\langle k|k'\rangle = \delta k - k'$ der Zustände $|k\rangle$

b) Betrachten Sie einen Zustand ($\langle\psi|\psi'\rangle = 1$) im Hilbertraum in k-Darstellung

$$|\psi\rangle = \int dk \psi(k) \, |k\rangle \,. \tag{14}$$

Zeigen Sie, dass der Ortsoperator $\hat{x}$ in dieser Darstellung die Form $\hat{x} = i\partial_k$ hat, d.h. $\langle k|\hat{x}\psi\rangle = i\partial_k \psi(k)$. Bestimmen Sie damit den Erwartungswert $\langle\psi| f(\hat{x}) |\psi\rangle$ einer beliebigen Funktion f(x) in der Impulsdarstellung, d.h. ausgedrückt durch $\psi(k)$.

c) Wie müssen die Ortswellenfunktionen $\langle x|E\rangle \propto e^{ik_E x}$ mit $k_E = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ in der Energie-Darstellung normiert werden, damit die Standard-Ortogonalitätsrelation $\langle E|E'\rangle = \delta(E - E')$ erfüllt ist?
Hinweis: Benutzen Sie die Relation für die Delta-Distribution:

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \quad \text{für} \quad x_0 = 0 \tag{15}$$

6 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

a) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für zwei Wellenfunktionen $\psi,\ \phi \in \mathbb{L}^2$

$$|\langle\phi,\psi\rangle|^2 \leq \langle\phi,\phi\rangle \langle\psi,\psi\rangle \tag{16}$$

Hinweis: Zerlegen Sie ψ o.B.d.A in: $\psi = z\phi + \xi$ mit $\langle\phi,\xi\rangle = 0$

b) Beweisen Sie, dass für zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die verallgemeinerte Unschärferelation

$$\Delta\hat{A}\ \Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} \left|\left\langle [\hat{A},\hat{B}] \right\rangle\right| \tag{17}$$

gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Schwarzsche Ungleichung für

$$\phi = (\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2)\xi \quad \text{und} \tag{18}$$

$$\psi = (\langle\hat{B}^2\rangle - \langle\hat{B}\rangle^2)\xi \tag{19}$$

c) Folgern Sie, dass man daraus für $\hat{A} = \hat{x}$ und $\hat{B} = \hat{p}$ die Ort-Zeit-Unschärferelation

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{20}$$

erhält.

d) Die Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ lässt sich auch aus der Ungleichung

$$\int dx \, |[\gamma(x - \langle x\rangle) - i(\widehat{p} - \langle p\rangle)] \, \psi(x)|^2 \geq 0$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$ folgern.

Zeigen Sie, dass das Gleichheitszeichen nur für Gaußfunktionen gilt.