Technische Universität München

Carla Zensen — Ferienkurs Analysis 2 für Physiker
Vorlesung Dienstag — SS 2012

1 Lokale Umkehrbarkeit und implizite Funktionen

Ein Ingenieur und ein Mathematiker wachen nachts auf und merken, daß ihre Häuser brennen. Was tun sie?
Der Ingenieur rennt zum Feuerlöscher, löscht damit den Brand und legt sich wieder schlafen. Der Mathematiker sieht den Feuerlöscher vom Bett aus und denkt: „Es existiert eine Lösung!“ und schläft seelenruhig weiter.

In diesem Kapitel geht es im Wesentlichen darum, Kriterien zu bestimmen, ob eine Funktion prinzipiell *umkehrbar* oder *auflösbar* ist. Es geht **nicht** darum, sie dann auch tatsächlich umzukehren oder aufzulösen! Außerdem lernen wir eine Formel für die Ableitung einer Auflösung kennen. Das kann einem, auch in der Physik, manchmal sehr viel Arbeit ersparen.

1.1 Theorie

Die Grundlagen stammen wieder einmal aus der linearen Algebra, da es oft ausreicht, die lokalen Eigenschaften von (impliziten) Funktionen mithilfe der linearen Approximation zu untersuchen:

- Eine **Bijektion** ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung, die also jedes Element einer Struktur auf genau ein anderes Element einer anderen Struktur abbildet. Sie ist damit gleichzeitig **injektiv** (es gibt genau ein Urbild zu jedem Bildelement) und **surjektiv** (alle Werte der Bildmenge werden angenommen).
- Ein **Isomorphismus** ist eine lineare Bijektion.
- Für Isomorphismen I gilt: I invertierbar $\Leftrightarrow \det(I) \neq 0$
- Ein **Diffeomorphismus** ist ein Isomorphismus zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ist $f \in C^k$, $k \geq 1$, heißt f **C^k-Diffeomorphismus**. Ein Diffeom. ist eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist. f ist ein **lokaler Diffeomorphismus**, wenn es für alle $x \in U$ Umgebungen $U_x \subset U$ gibt, in denen das so eingeschränkte f Diffeomorphismus ist.
- Es gilt für C^k-Diffeomorphismen:
  - $U \subseteq \mathbb{R}^n \wedge V \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$
  - f' Isomorphismus auf U
  - $f^{-1\prime}(f(u)) = [f'(u)]^{-1}$ in U
  - $f^{-1} \in C^k(U, V)$
- ein C^1-Diffeomorphismus ist ein **Homöomorphismus**.
- Ein **Banachraum** ist ein vollständiger normierter Vektorraum. Es wird im Folgenden ausreichend sein, alle Abbildungen im Vektorraumformalismus zu behandeln.

1.1.1 Lokale Umkehrbarkeit

Besitzt die Funktion f eine Umkehrfunktion und welche Eigenschaften hat diese?

Satz 1.1 *Satz über Umkehrfunktionen*

Sei $f \in C^k(U,Y)$, $1 \leq k \leq \infty$, $U \subseteq X$ offen, X,Y Banachräume, $x \in U$. Wenn $f'(x)$ ein Isomorphismus ist, dann git es offene Umgebungen $V \subseteq U$ um x und $V' \subseteq Y$ um $f(x)$, so dass die eingeschränkte Abbildung $f|_V : V \to V'$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Das ist ein Kriterium, um herauszufinden, ob eine Abbildung bijektiv ist!
Betrachten wir den Fall, dass $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann gilt:

f ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn $\forall x \in U : Df(x)$ invertierbar.

oder:

Aus $\det(f'(x)) \neq 0$ folgt im Endlichdimensionalen „lokale Umkehrbarkeit“.

Beispiel 1.2 *Ebene Polarkoordinaten*
$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion, denn

$$\det Df(r,\phi) = \det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(r,\phi)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = r > 0$$

1.1.2 Implizite Funktionen

Kann man eine Funktion $f(x,y) = 0$ darstellen als $f(x,g(x)) = 0$? Kann man die implizite Gleichung $f(x,y) = 0$ prinzipiell nach y auflösen? Wie groß ist der Bereich, in dem das geht?

Satz 1.3 *Satz über implizite Funktionen*

Sei $f \in C^k(U,Z)$, $1 \leq k \leq \infty$, $U \subseteq X \times Y$ offen, X,Y,Z Banachräume, und $(x_0,y_0) \in U$ eine Nullstelle von f. Wenn $d_y f(x_0,y_0) : Y \to Z$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es Umgebungen $U' \subseteq X$ von x_0 und $U'' \subseteq Y$ von y_0, sowie eine Abbildung $\hat{y} \in C^k(U',U'')$, so dass

$$f(x,y) = 0, (x,y) \in U' \times U'' \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \hat{y}(x), x \in U'$$

weiter gilt $\forall x \in U'$:

$$\hat{y'}(x) = -\left[d_y f(x,\hat{y}(x))\right]^{-1} d_x f\,(x,\hat{y}(x)) \tag{1}$$

Um das zu verstehen, benötigen wir die Definition des partiellen Integrals, das ein Ausdruck der linearen Approximation der Funktion im Punkt (x_0,y_0) ist:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Definition 1.4 *Partielles Differential*
Für X,Y,Z Banachräume, $U \subseteq X \times Y$ offen, $f \in C^1(U, Z)$
$d_y f(x,y) : Y \to Z, k \mapsto f'(x,y) \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$
$d_x f(x,y) : X \to Z, h \mapsto f'(x,y) \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Zusammenhang mit der totalen Ableitung bzw. der *Jacobi-Matrix* im Punkt (x, y) ist der Folgende:

$$df(x,y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} := J \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & J_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x f(x,y) & d_y f(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.5 *Satz über implizite Funktionen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*
$f \in C^2(U \times V)$, U,$V \subset \mathbb{R}$, $f(x_0, y_0) = 0 \wedge (D_2 f)(x_0, y_0) \neq 0$
Dann gilt: $\exists$ offene Umgebungen $U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$ von x_0, y_0 und genau ein g mit

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in U_1$$

und es gilt $g'(x) = -\frac{d_x f(x,g(x))}{d_y f(x,g(x))}$

1.2 Praxis

Wir untersuchen typische Fragestellungen. Gegeben ist eine Funktion $f(x, y) = 0$, die wir gerne nach $y = g(x)$ auflösen würden, sodass gilt: $f(x, g(x)) = 0$. Der Satz über implizite Funktionen ist lokal definiert, also versuchen wir, allgemein an einem Punkt (x_0, y_0) aufzulösen und geben dann ein Intervall an, in dem der Punkt maximal liegen darf, sodass der Satz tatsächlich gilt.

a) Wie testet man, ob der Satz über implizite Funktionen anwendbar ist?

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- Gilt $f \in C^1(U \times V, Z)$?
- Gilt $f(x_0, y_0) = 0$?
- Gilt $d_y f(x_0, y_0)$ invertierbar? $\det d_y f(x_0, y_0) \neq 0$?

Beispiel 1.6 *Ist die folgende Funktion in der Umgebung des Punktes (0,0,1) nach x,y,z auflösbar?*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y, z) = \sin x + xy + e^{-z^2} - 1 = 0$$

Überprüfen der Voraussetzungen:

- $f(0, 0, 1) = \sin 0 + 0 + e^0 - 1 = 0$
- $f \in C^1$, da Verkettung von unendlich oft differenzierbaren Funktionen.
- $\begin{array}{lcl} d_x f(x,y,z) = \cos x + y & \Rightarrow & d_x f(0,0,1) = 1 \neq 0 \\ d_y f(x,y,z) = x & \Rightarrow & d_y f(0,0,1) = 0 \\ d_z f(x,y,z) = -2ze^{-z^2} & \Rightarrow & d_z f(0,0,1) = -\frac{2}{e} \neq 0 \end{array}$

$\Rightarrow$ *Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren Funktionen* $g(x, y)$ *und* $h(y, z)$*, sodass* $f(x, y, g(x, y)) = 0$ *in der Umgebung von* $(x, y) = (0, 0)$ *bzw.* $f(h(y, z), y, z) = 0$ *in der Umgebung von* $(y, z) = (0, 1)$*. Die Funktion kann also in* $(0, 0, 1)$ *nach* x *oder* z *aufgelöst werden, aber nicht nach* y*!*

b) Wie berechnet man den Gradienten einer Auflösung?

Einen Gradienten erhält man nur, wenn nach einer eindimensionalen Variablen $y \in \mathbb{R}$ aufgelöst wird. Die Formel für den Gradienten in einem Punkt $(x_0, y_0)^T = (x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,p}, y_0)^T$ folgt aus dem Satz:

$$\nabla g(x_0) = -\frac{1}{(d_y f(x_0, y_0))} \cdot \left(d_{x_1} f(x_0, y_0), ..., d_{x_p} f(x_0, y_0)\right)^T$$

Beispiel 1.7 *Gradient einer Auflösung* Nun betrachten wir die Auflösung der obigen Funktion nach z im Punkt $(0, 0, 1)$: $f(x, y, g(x, y)) = 0$. Um den Gradienten im Punkt $(0, 0, g(0, 0))$ anzugeben, verwenden wir die oben angegebene Formel:

$$\nabla g(0, 0) = -\left(d_z f(0, 0, 1)\right)^{-1} \cdot \left(d_x f(0, 0, 1), d_y f(0, 0, 1)\right) = -\left(-\frac{2}{e}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Wie berechnet man höhere Ableitungen?

Da man nun eine Formel für die erste Ableitung für die Auflösung $g(x)$ kennt, kann man diese einfach noch einmal ableiten (auch hierzu ist keine explizite Auflösung nötig!)Da alles andere den Rahmen der Klausur sprengen würde, soll hier nur der einfachste Fall, nämlich für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = 0$ und Auflösung nach y vorgeführt werden:

$$g'(x) = -\frac{(\partial_x f)(x, g(x))}{(\partial_y f)(x, g(x))}$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx} g\prime(x) = -\frac{\left(\partial_y f\right)^2 \partial_x^2 f - 2\partial_y f \partial_{xy}^2 f \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot \left(\partial_x f\right)^2}{\left(\partial_y f\right)^3}\Bigg|_{(x, g(x))}$$

d) Wie stellt man fest, ob ein Gleichungssystem lösbar ist?

Betrachte ein m-dimensionales Gleichungssystem, das von $q + p = n$ Variablen abhängt und folgendermaßen geschrieben wird:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_p) = 0 \\ f_2(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_p) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_p) = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ f_m \end{pmatrix} (x) = 0$$

Dieses kann man verstehen als eine Funktion $f : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, die nun nicht mehr nur nach $\mathbb{R}$ abbildet. Auch hier ist der Satz für implizite Funktionen unter den geforderten Bedingungen anwendbar.

Die Fragestellung „Ist das Gleichungssystem nach p Variablen $y_1, y_2, ..., y_p$ auflösbar?“ bedeutet:

- P ist Lösung des Gleichungssystems
- Die Funktion $f : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ ist in P stetig differenzierbar
- Die Matrix $D_{y=(y_1,...,y_p)^T} f(P) = \frac{\partial(f_1,...,f_m)}{\partial(y_1,...,y_p)}$ ist invertierbar.

Beispiel 1.8 *Klausur (Prof. Warzel, SS09). Der Punkt P=(1,1,-2) ist eine Lösung des Gleichungssystems. Dieses soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden?*

$$f_1(t,x,y) = \log x + y^2 t - 4 = 0$$

$$f_2(t,x,y) = x^2 + yt^2 + t^2 = 0$$

Gesucht ist die Jakobi-Matrix von f im Punkt P, wenn man nach dem Vektor $(x,y)^T = (1,1)^T$ auflöst:

$$D_{(x,y)}f = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} d_x f_1 & d_y f_1 \\ d_x f_2 & d_y f_2 \end{pmatrix}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Beachte: Hier kann man natürlich keinen Gradienten finden!

2 Vektoranalysis

2.1 Differentialoperatoren

$U \subset \mathbb{R}^n$offen, $k \in \mathbb{N}$

- **Gradient**

$$\text{grad}: \; C^k(U,\mathbb{R}) \mapsto C^{k-1}(U,\mathbb{R}^n) \qquad f \mapsto \text{grad}\, f =: \nabla f$$

- **Divergenz**

$$\text{div}: \; C^k(U,\mathbb{R}^n) \mapsto C^{k-1}(U,\mathbb{R}) \qquad v \mapsto \text{div}\, v := \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j =: \nabla \cdot v$$

- **Laplace-Operator**

$$\Delta: \; C^{k+1}(U,\mathbb{R}) \mapsto C^{k-1}(U,\mathbb{R}) \qquad f \mapsto \Delta\, f := \text{div}\,\text{grad}\, f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f = \nabla^2$$

- **Rotation**

  (i) Fall: n=2

$$\text{rot}: \; C^k(U,\mathbb{R}^2) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R}) \qquad v \mapsto \text{rot}\, v := \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$$

  (ii) Fall: n=3

$$\text{rot}: \; C^k(U,\mathbb{R}^3) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R}^3) \qquad v \mapsto \text{rot}\, v := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} =: \nabla \times v$$

- $\text{div}\, v = 0$ bezeichnet man auch als *quellenfrei.*
- $\Delta\, f = 0$ heißt *harmonisch.*
- $\nabla \times f = 0$ heißt *rotationsfrei.*
- Aufpassen, $\Delta f = \text{div}\,\text{grad}\, f$ ist *nicht* das selbe wie $\text{grad}\,\text{div}\, f$ mit $f \in C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$!
- Für nichtskalare Funktionen kann man den Laplace-Operator auch auffassen als

$$\Delta f = (\text{div}\,\text{grad}\, f_1, ..., \text{div}\,\text{grad}\, f_m)$$

Die „Rechenregeln" der Differentialoperatoren werden als *Nabla-Kalkül* bezeichnet und eignen sich hervorragend für Klausuraufgaben. Im Folgenden wird eine ganze Sammlung aufgelistet.

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f_1, f_2 \in C^2(U)$, $v_1, v_2 \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$

- $\nabla(f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2$

- $\nabla \cdot (v_1 + v_2) = \nabla \cdot v_1 + \nabla \cdot v_2$

$f \in C^2(U)$, $v \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$

- $\nabla \times (\nabla f) = 0$ („Gradientenfelder sind wirbelfrei.“)
- $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$ („Rotationen sind quellfrei.“)
- $\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v$

$U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f_1, f_2 \in C^2(U)$, $v_1, v_2 \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ Nabla-Kalkül für **n=3**

- $\nabla \times (v_1 + v_2) = \nabla \times v_1 + \nabla \times v_2$
- $\nabla \times (v_1 \times v_2) = v_1(v_2 \cdot \nabla) - (v_1 \cdot \nabla)v_2 + (v_2 \cdot \nabla)v_1 - v_2 \cdot (\nabla v_1)$
- $\nabla(v_1 \cdot v_2) = (v_1 \cdot \nabla)v_2 + (v_2 \cdot \nabla)v_1 + v_1 \times (\nabla \times v_2) + v_2 \times (\nabla \times v_1)$
- $\nabla \times (fv) = f(\nabla \times v) + (\nabla f) \times v$

Exemplarisch sollen zwei Beweise vorgeführt werden, mehr davon in der „Ubung;

(i) Z.z.:
$\nabla \cdot (fv) = (\nabla f) \cdot v + f \nabla \cdot v$
Beweis:
$\nabla \cdot (fv) = \sum_{j=1}^n \partial_j (f v_j) = \sum_{j=1}^n (v_j \partial_j f + f \partial_j v_j) = (\nabla f) \cdot v + f \nabla \cdot v$

(ii) Z.z.:
$\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$
Es ist praktisch, bei solchen Aufgaben eine Darstellung durch Epsilon-Tensoren zu benutzen. Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist hierbei folgendermaßen definiert:

$$a \times b = \sum_i e_i \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

und die wichtigste weitere Formel zur Umrechnung von Epsilon-Tensoren und Kronecker-Deltas ist:

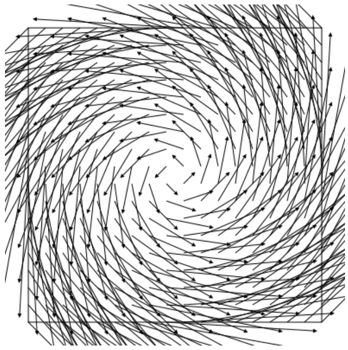
$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Beweis:

$$\nabla \cdot (\nabla \times v) = \nabla \cdot \sum_i e_i \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j v_k = -\sum_{ijk} \epsilon_{jik} \partial_i \partial_j v_k =$$
$$= -\sum_{ijk} \epsilon_{jik} \partial_j \partial_i v_k = -\nabla \cdot (\nabla \times v) \qquad \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times v)$$

2.2 Das Vektorfeld

Ein Vektorfeld ist eine Funktion, die jedem Raumpunkt einen Vektor zuordnet. Hier ein zweidimensionales *Strömungsfeld* (Quelle Wikipedia):



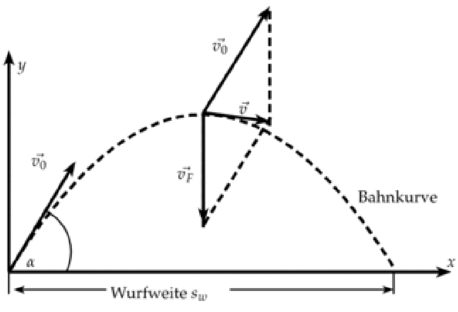
Definition 2.1 *C^k-Vektorfeld*
$F \in C^k \left(U, \mathbb{R}^n\right)$ heißt C^k-Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 2.2 *Gradientenfeld*
Kann man $F \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$ schreiben als $F(x) = \nabla f(x)$, f skalare Funktion („Potential“), so heißt F **Gradientenfeld**.

2.3 Kurve und Kurvenintegral

Eine Kurve bildet einen eindimensionalen Parameter auf einen Vektor ab. Das kann man sich z.B. als Zeitabhängigkeit des Kraftfeldes vorstellen.

Bahnkurve eines schiefen Wurfs (Quelle: 4teachers.de)



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\beta \\ v_0 t \sin\beta - \frac{g}{2} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in [t_0, t_{end}]$$

Definition 2.3 *C^k-Kurve*
Eine C^k-Kurve ist eine Abbildung $\gamma \in C^k(I, U)$ mit $I := [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nun noch einige Eigenschaften von Kurven:

- Eine Kurve heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$
- Eine Kurve heißt **regulär**, wenn $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \, \forall t \in I$
- Die **Länge** der Kurve ist
$$L(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$
Die **Bogenlänge** der Kurve ist
$$s : I \to [0, L(\gamma)] \qquad s(t) := \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Definition 2.4 *Kurvenintegral*
ist $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und die Kurve $\gamma \in C^1$, so definiert man das Kurvenintegral von F entlang γ als
$$\int_\gamma F(r) \cdot dr := \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Das Kurvenintegral heißt **wegunabhängig**, falls
$$\int_\gamma v(x)dx = \int_{\gamma'} v(x)dx$$
für beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurven $\gamma' : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(1) = \gamma'(1)$.
Für Gradientenfelder $v = \nabla f$ gilt Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals:
$$\int_\gamma (\nabla f)(x)dx = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$
Beweis: l.S.$= \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt =$r.S.

2.4 Konservative Vektorfelder

Definition 2.5 *Konservatives Kraftfeld*
Ein Kraftfeld $v \in C^1(U.\mathbb{R}^n)$ heißt **konservativ**, falls
$$\oint_\gamma v(x)dx := \int_\gamma v(x)dx = 0$$
für beliebige stückweise stetige, geschlossene Kurven $\gamma : [0,1] \to U \; \gamma(0) = \gamma(1)$

Satz 2.6 Für $v \in C^1(U.\mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent

(i) v konservativ
(ii) $\int_\gamma v(x)dx$ wegunabhängig
(iii) $\exists f \in C^1(U) : v = \nabla f$

2.5 Potential und Vektorpotential

Haben alle Vektorfelder ein Potential? $\Rightarrow$ Im Allgemeinen gilt dies nicht.

Definition 2.7 *Sternförmigkeit*
$U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, falls $\exists x_0 \in U : \forall x \in U \forall t \in [0,1] : x_0 + t \cdot (x - x_0) \in U$

Aus der Konvexität einer offenen Menge folgt Sternförmigkeit. Es gilt immer:

$$v = \nabla f \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times v = 0$$

$$v = \nabla \times w \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot v = 0$$

Die Umkehrung aber nur bedingt:

- $v \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, **sternförmig**
  - (i) $\nabla \times v = 0 \qquad \Rightarrow \exists f \in C^2(U) : v = \nabla f$
  - (ii) $\nabla \cdot v = 0 \qquad \Rightarrow \exists w \in C^2(U, \mathbb{R}^3 : v = \nabla \times w$
- allgemein für $v \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, **sternförmig** (Lemma von Poincaré):
  $\partial_j v_k - \partial_k v_j = 0$ für alle $j, k \in \{1, ..., n\} \Leftrightarrow \exists f \in C^2(U) : v = \nabla f$

- $\nabla f = \nabla(f + const.)$
- $\nabla \times w = \nabla \times (w + \nabla f)$