Übungen zur Theoretischen Physik II   Sommer 2019, Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 13.5.2019, spätestens 14:15 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Bewegung auf Kegel (10 P.)

Geben Sie die Lagrange-Funktion und die Lagrange-Gleichungen an für ein Teilchen, dass sich im homogenen Schwerefeld der Erde bewege auf einem nach unten offenen Kegel mit Öffnungswinkel α, dessen Spitze bei $z = 0$ sei.

Aufgabe 2: Peitsche (10 P.)

Betrachten Sie eine Peitschenschnur der Länge L und der Masse μ pro Längeneinheit. Die Schnur sei anfangs geknickt wie auf der Skizze gezeigt, das Ende A befinde sich in Ruhe und am Ende B wird mit konstanter Geschwindigkeit $V > 0$ nach rechts gezogen. Die Schnur werde als beliebig biegsam aber nicht dehnbar angenommen. Ziel der Aufgabe ist es, die Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Koordinate $y = \overline{CA}$ im Lagrange-Formalismus aufzustellen und zu lösen.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Bedingung, dass die Peitschenschnur eine feste Länge hat, die Relation $\dot{C} = (\dot{A} + \dot{B})/2$ zwischen den Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C folgt. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Relation, dass $\dot{A} = 2\dot{y} + V$ gilt.

(b) Leiten Sie nun die Lagrange-Funktion der Peitsche als Funktion von y und $\dot{y}$ ab. (Die Schwerkraft werde vernachlässigt.)

(c) Zeigen Sie, dass die zugehörige Lagrange-Gleichung

$$\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0 \tag{1}$$

lautet.

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung (1) mit den Anfangsbedingungen $y(t = 0) = y_0$ und $\dot{y}(t = 0) = -V$ mit Hilfe des Potenzansatzes $y = Y\,(t_0 - t)^\alpha$, $t \leq t_0$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Punktes A im Laborsystem und diskutieren Sie das Ergebnis. Warum und wann (ausgedrückt durch y_0 und V) knallt eine Peitsche?

Bewundern Sie schließlich die Leichtigkeit, mit der der Lagrange-Formalismus solche Probleme angeht.

Aufgabe 3: Geschwindigkeitsabhängige Kräfte I (5+5 P.)

Betrachten Sie die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eB}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x)$$

(a) Leiten Sie die zugehörigen Lagrange-Gleichungen her. Interpretieren Sie Ihr Resultat.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Lagrange-Gleichungen an.

Aufgabe 4: Geschwindigkeitsabhängige Kräfte II (10 P.)

Neben Potentialkräften spielen in der Natur auch geschwindigkeitsabhängige Kräfte eine fundamentale Rolle (Lorentz-Kraft). In dieser Aufgabe sollen Sie lernen, wie solche Kräfte in allgemeiner Form in die Lagrange-Mechanik integriert werden können. Betrachten Sie hierzu die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t)$$

eines Teilchen im dreidimensionalen Raum (charakterisiert durch die Konstanten m und q). Die gegebenen Funktionen $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und $\phi(\mathbf{r}, t)$ können in beliebiger Weise von den Koordinaten und der Zeit abhängen.

Stellen Sie die zugehörigen Lagrange-Gleichungen auf. Es ist sinnvoll, diese mit Hilfe der sogenannten Rotation von $\mathbf{A}$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

zu schreiben.

Identifizieren Sie Ihr Ergebnis mit den Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens in elektrischen und magnetischen Feldern. Womit müssen Sie hierzu das elektrische und das magnetische Feld identifizieren?