"*Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der Alte nicht würfelt.*" – Albert Einstein

Aufgabe 6. *Skalarprodukte und Erwartungswerte*

(a) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren $|f\rangle$, $|g\rangle$ in Ortsdarstellung bzw. Impulsdarstellung lautet

$$\int \mathrm{d}x\ f^*(x)g(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \int \mathrm{d}k\ \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k). \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass aus $\langle f|f\rangle = 1$ folgt

$$\int \mathrm{d}x\ |f(x)|^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \int \mathrm{d}k\ |\tilde{f}(k)|^2 = 1. \tag{2}$$

(c) Betrachten Sie eine Gaußsche Wellenfunktion

$$\Psi(x) = \mathcal{N}\mathrm{e}^{-x^2/d^2}. \tag{3}$$

Wie lautet der Normierungsfaktor $\mathcal{N}$? Was sind die Erwartungswerte

$$(i) \quad \langle\hat{x}\rangle = \langle\Psi|\,\hat{x}\,|\Psi\rangle \tag{4}$$
$$(ii) \quad \langle\hat{x}^2\rangle = \langle\Psi|\,\hat{x}^2\,|\Psi\rangle \tag{5}$$
$$(iii) \quad \langle\hat{p}\rangle = \langle\Psi|\,\hat{p}\,|\Psi\rangle \tag{6}$$
$$(iv) \quad \langle\hat{p}^2\rangle = \langle\Psi|\,\hat{p}^2\,|\Psi\rangle\,, \tag{7}$$

wobei $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ ist?

Aufgabe 7. *Matrizen*

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

nicht hermitesch ist, aber reelle Eigenwerte besitzt. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren *keinen* vollständigen Satz bilden.

(b) Sei

$$R = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad |\Psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \tag{9}$$

mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Berechnen Sie $\langle\Psi|\, R^2\, |\Psi\rangle$ auf zwei Wegen: (i) Man berechne $\langle R^2\rangle$ direkt. (ii) Man finde die Eigenwerte und Eigenvektoren von R

$$R\,|r_n\rangle = r_n\,|r_n\rangle\,, \qquad n = 1, 2 \tag{10}$$

und entwickle $|\Psi\rangle$ in eine Linearkombination

$$|\Psi\rangle = c_1\,|r_1\rangle + c_2\,|r_2\rangle\,. \tag{11}$$

Bestimmen Sie dann

$$\langle R^2\rangle = r_1^2|c_1|^2 + r_2^2|c_2|^2. \tag{12}$$

Aufgabe 8. *Fouriertransformierte*
Es ist oft nützlich, neben der Wellenfunktion im Ortsraum auch die Fouriertransformierte Wellenfunktion im k-Raum zu betrachten. In einer Dimension gilt:

$$\tilde{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-ikx}\psi(x). \tag{13}$$

Zeigen Sie, dass für die Mittelwerte von x^n und k^n gilt:

$$\langle x^n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x^n|\psi(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \tilde{\psi}^*(k)\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)^n \tilde{\psi}(k), \tag{14}$$

$$\langle k^n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ k^n|\tilde{\psi}(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi^*(x)\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \psi(x). \tag{15}$$

Aufgabe 9. *Fouriertransformierte*
Gegeben seien die folgenden Wellenfunktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} N_1\sin(kx) & \text{für } |x| \le n\pi/k \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{16}$$

$$f_2(x) = N_2\ \mathrm{e}^{-x^2/a^2}\cos(kx). \tag{17}$$

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten N_1 und N_2.

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierten $\tilde{f}_1(k)$ und $\tilde{f}_2(k)$.

Hinweis: Benutzen Sie für $\tilde{f}_2(k)$ das komplexe Gaußsche Integral.

(c) Finden Sie geeignete Größen zur Charakterisierung der x- und k-Ausdehnung der Wellenpakete, Δx und Δk. Wie groß ist jeweils $\Delta x \Delta k$?