Mikrokanonische Zustandssumme des idealen Gases

Wir betrachten ein klassisches ideales Gas aus N Teilchen im Volumen V mit Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}$$

Für das Zustandsvolumen $\overline{\Omega}(E)$ erhalten wir

$$\overline{\Omega}(E) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int_V d^3\vec{x}_1 \ldots \int_V d^3\vec{x}_N \int d^3\vec{p}_1 \ldots \int d^3\vec{p}_N \, \Theta\left(E - \sum_i \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} \right)$$

Der Integrand ist sphärisch symmetrisch in $3N$ Dimensionen, d.h.

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}(E) &= \frac{V^N}{h^{3N} N!} \int d\Omega_{3N} \int_0^{\sqrt{2mE}} dp \, p^{3N-1} \\ &= \frac{V^N}{h^{3N} N!} \int d\Omega_{3N} \frac{(2mE)^{3N/2}}{(3N-1)} \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral über die Oberfläche einer d-dimensionalen Kugel ist

$$\boxed{\int d\Omega_d = \frac{2\,\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}}$$

wobei $\Gamma(x)$ die Gammafunktion ist für die gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$ mit n positiv ganzzahlig. Dies liefert

$$\overline{\Omega}(E) = \frac{V^N \, (2\pi m E)^{3N/2}}{h^{3N} N! \, (3N/2)!}$$

wobei O.B.d.A. angenommen wurde, dass N gerade ist.

Mit Hilfe der Stirling Formel

$$\boxed{N! \sim N^N e^{-N} \, (2\pi N)^{1/2}}$$

findet man schliesslich

$$\underline{\underline{\overline{\Omega}(E) = \left(\frac{V}{N} \right)^N \left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N} \right)^{3N/2} e^{5N/2}}}$$