

Quantenmechanik

Rainer Verch

Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Vorlesung 01

Kapitel 1

Einführung in die Quantenmechanik

1.1 Vorbemerkung

Quantenmechanik: Theorie zur Beschreibung von:

- physikalischen Prozessen im molekularen und (sub-)atomaren Bereich (d.h. relevant für “Mikrosystem”)
- Wechselwirkung von elektromagnetischer (e.m.) Strahlung mit Materie (Atomen)

Die Prinzipien der QM unterscheiden sich stark von denen der “klassischen Theorien” (Mechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik).

Diese Prinzipien haben oft einen abstrakten Charakter ohne direkte “anschauliche” Entsprechung.

Bisherige Annahme: Die Prinzipien der QM sind allgemein gültig (grundsätzliche

Wahrscheinlichkeitsinterpretation, Unschärferelation, Superpositionsprinzip).

Hervorragende Übereinstimmung zwischen theoretischen Aussagen und experimentellen Befunden.

Quantenphänomene der älteren Quantentheorie (bis ca. 1930):

- Atomspektren: Diskrete Spektrallinien
- korpuskulare Aspekte der e.m. Strahlung:
 - Hohlraumstrahlung, Plancksche Strahlungsformel
 - Photoeffekt
 - Compton-Effekt
 - Interferenzerscheinungen bei Mikroteilchen
(Elektronenbeugung, Doppelspalt-Experiment)
- Radioaktiver Zerfall

Moderne Quantenphänomene und Anwendungen der QM (nach 1930)

- Atombau, Quantenchemie → DNA-Analyse
- Aufbau der Atomkerne, Kernphysik
- Elementarteilchenphysik, QFT
- Festkörperphysik, Halbleiter → Mikrochips, Computer, ...
- Quantenoptik → Laser, Maser
- Atomuhren
- Kollektive Quanteneffekte: Supraleitung, Bose-Einstein-Kondensation
- Kernspintomographie
- Quanteninformationstheorie, Quantenkryptographie, Quantencomputer
- ...

1.2 Die Hohlraumstrahlung

G.Kirchhoff(1859):

Konzept des **schwarzen Körpers** als materieller Körper, der einfallende e.m. Strahlung vollständig absorbiert und in Wärme umsetzt.

Thermodynamik → Im thermischen Gleichgewicht eines schwarzen Körpers der absoluten Temperatur T mit e.m. Strahlung ist die Funktion

$$\rho(T, \nu) = \text{spektrale Energiedichte der Strahlung pro Einheitsvolumen}$$

unabhängig vom Material des schwarzen Körpers.

Es ist

$$u(T; \nu_0, \nu_1) = \int_{\nu_0}^{\nu_1} d\nu \rho(T, \nu)$$

die Energie pro Einheitsvolumen der Strahlung im Frequenzbereich zwischen ν_0 und ν_1 .

T = Temperatur des schwarzen Körpers

Operationell:

e.m. Strahlung im
therm. Gleichgewicht mit
einem schwarzen Körper

↔

e.m. Strahlung in einem
Hohlraum mit adiathermischen
Wänden, gehalten auf Temperatur T

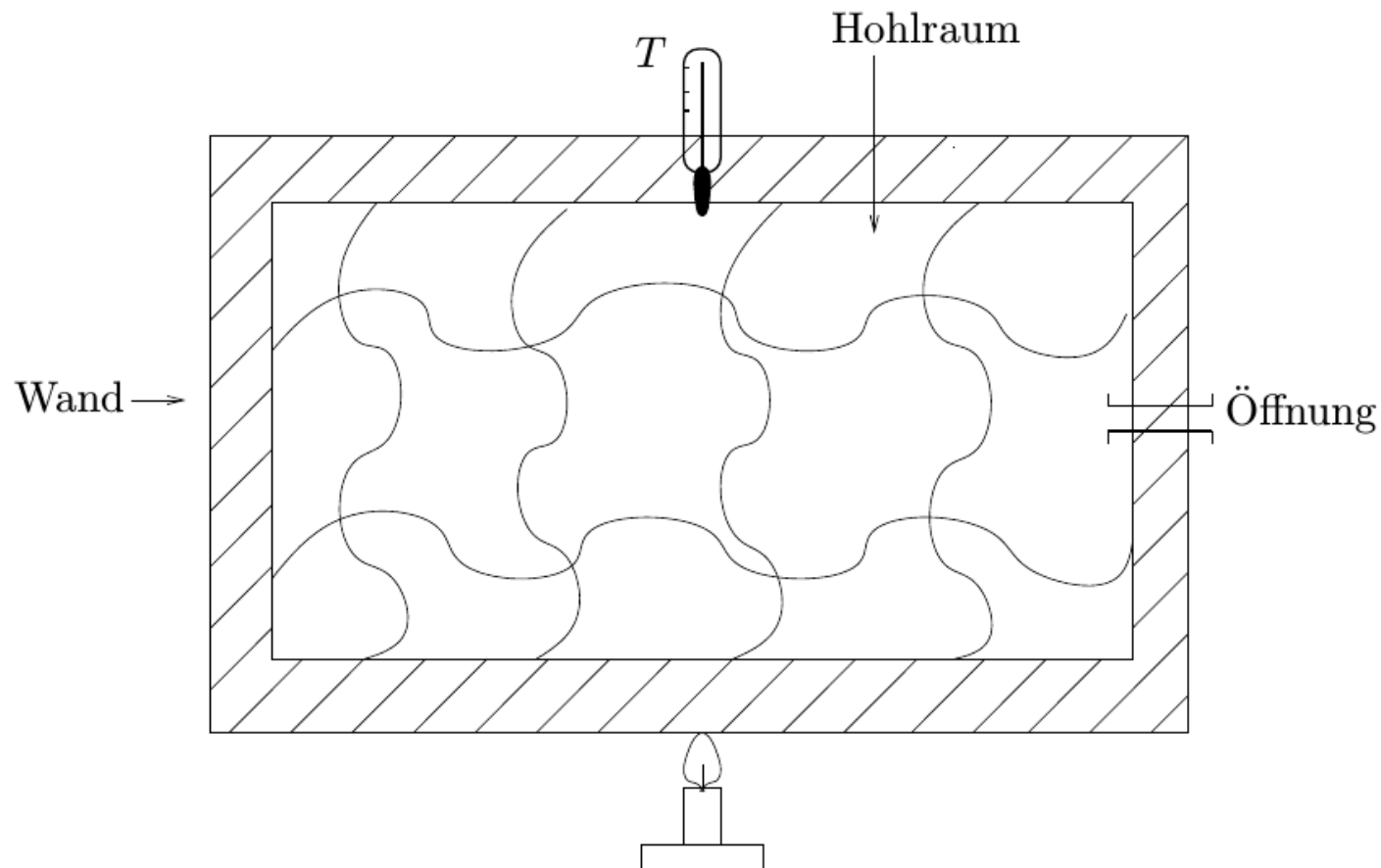


Abbildung 1.1: Hohlraumstrahlung des Schwarzen Körpers: Der Hohlraum (mit Einheitsvolumen V) ist frei von Materie (“Vakuum”), aber (experimentelle Erfahrung) bei endlicher Temperatur der Wand erfüllt von e.m. Strahlung im thermischen Gleichgewicht mit der Wand. Praktisch benötigt man eine kleine Öffnung zur Messung der spektralen Energiedichte der Strahlung.

Ab ca. 1880: Bemühungen vieler Physiker, die Funktion $\rho(T, \nu)$ (materialunabhängig) aus den damals bekannten Prinzipien der

- Mechanik
- E-Dynamik
- Thermodynamik
- statistischen Mechanik

herzuleiten.

Um 1900 waren folgende Eigenschaften von $\rho(T, \nu)$ bekannt und akzeptiert:

1. Stephan-Boltzmann-Gesetz:
Für die Energiedichte

$$U(T) = u(T, 0, \infty) = \int_0^{\infty} d\nu \rho(T, \nu)$$

der Strahlung des Hohlraums gilt:

$$U(T) = a T^4$$

wobei a = Stephan-Boltzmann-Konstante

2. Wiensches Verschiebungsgesetz:
adiab. Skalierung des Volumens und Dopplereffekt:

$$\rho(T, \nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

(mit einer zu bestimmenden Funktion F)

Für die Form von $\rho(T, \nu)$ (bzw. $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$) wurden ca. 1900 folgende Vorschläge gemacht:

W. Wien (1896)

Annahmen: Maxwells Form für die Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen ist anwendbar auf die Moleküle der Hohlraumwand und:

Frequenz und Intensität der e.m. Strahlung im Gleichgewicht mit der Hohlraumwand sind vollständig bestimmt durch die Geschwindigkeiten der Wandmoleküle

$$\rho(T, \nu) = \alpha \nu^3 e^{-\beta\nu/T}$$

mit universellen Konstanten α und β .

Präzise Messungen der spektralen Energieverteilung von Hohlraumstrahlung durch Paschen (1897) [Paschen & Wanner (1899)], Lummer und Pringsheim (1897), Rubens und Kurlbaum (1900) zeigen Übereinstimmung mit Wiens Formel im sichtbaren Frequenzbereich (große $\beta\nu/T$), aber Diskrepanz bei niedrigen Frequenzen (entsprechend Wellenlängen im Bereich $12 - 18 \mu m$).

Rayleigh (1900)/Rayleigh-Jeans (1905)

Ansatz:

$$\rho(T, \nu) = N(\nu) \varepsilon(T, \nu)_{kl}$$

wobei

$N(\nu)$ = Anzahl der Normalmoden e.m. Strahlung der Frequenz ν im Hohlraum mit Einheitsvolumen V
 $\varepsilon(t, \nu)_{kl}$ = mittlere Energie der Normalschwingung mit Frequenz ν im Einheitsvolumen V im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T

Rayleigh-Jeans finden:

$$N(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

 $(c = \text{Lichtgeschwindigkeit})$

$\varepsilon(T, \nu)_{kl}$ wird berechnet wie bei Ensemble unabhängiger Oszillatoren im therm. Gleichgewicht. bei Temperatur T nach Boltzmann-Statistik:

$$\varepsilon(T, \nu)_{kl} = \frac{\int_0^\infty dE E e^{-E/k_B T}}{\int_0^\infty dE e^{-E/k_B T}} = k_B T$$

“Äquipartitions-gesetz” ($k_B = \text{Boltzmannkonstante}$)

Rayleigh-Jeans-Gesetz:

$$\rho(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

Die Messungen von Lummer und Pringsheim zeigen Übereinstimmung mit dem Rayleigh-Jeans-Gesetz bei niedrigen Frequenzen (bzw. bei kleinen $\beta\nu/T$).

Problem: Da im Rayleigh-Jeans-Gesetz $\rho(T, \nu)$ für große ν nicht abfällt sondern wächst, erhält man

$$U(T) = \int_0^{\infty} d\nu \rho(T, \nu) = \infty$$

(“Ultraviolett-Katastrophe”)

für die Energiedichte pro Einheitsvolumen der Hohlraumstrahlung. Das Rayleigh-Jeans-Gesetz kann also bei großen ν nicht richtig sein.

Max Planck (1900)

findet eine “glücklich erratene Interpolationsformel”:

$$\rho(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \frac{h\nu/k_B T}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

(Plancksche Strahlungsformel)

die mit den experimentellen Ergebnissen sehr gut übereinstimmt und zwischen dem Rayleigh-Jeans-Gesetz (für kleine $h\nu/k_B T$) und der Wienschen Formel (für große $h\nu/k_B T$) interpoliert. Dabei ist h die Plancksche Wirkungskonstante

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Im Jahr 1901 veröffentlichte Planck eine theoretische Erklärung für seine Formel - nicht in allen Punkten schlüssig, aber wesentlich ist dabei die

Plancksche Quantenhypothese:

Die Energien (Energie-Differenzen) der Strahlungsnormalmode der Frequenz ν können nicht beliebige kontinuierliche Werte annehmen, sondern immer nur ein ganzzahliges Vielfaches des

Wirkungsquantums h mal der Frequenz ν :

$$E_\nu(n) = \text{möglicher Energiewert der Strahlungsmode der Frequenz } \nu = nh\nu$$

wobei n aus den natürlichen Zahlen.

Später (1911) hat Planck gezeigt, dass diese Annahme benutzt werden kann, um die von Rayleigh-Jeans benutzte Boltzmann-Statistik abzuwandeln:

$$\begin{aligned}\varepsilon(T, \nu)_{Pl} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/k_B T}} \\ &= k_B T \frac{h\nu/k_B T}{e^{h\nu/k_B T} - 1}\end{aligned}$$

ist nach Plancks Quantenhypothese die mittlere Energie der Strahlungsnormalmode der Frequenz ν im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T .

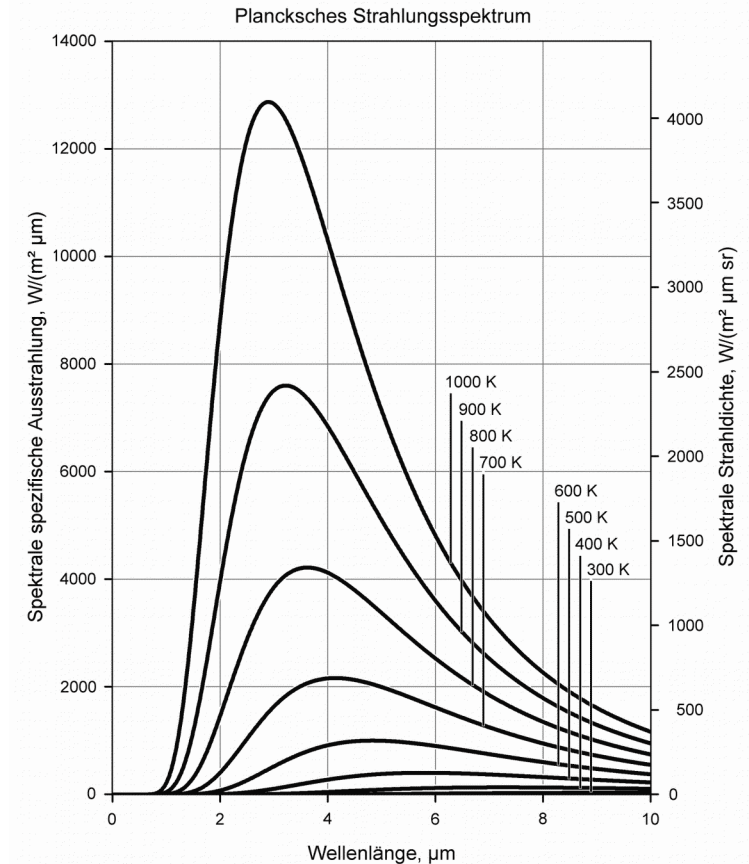
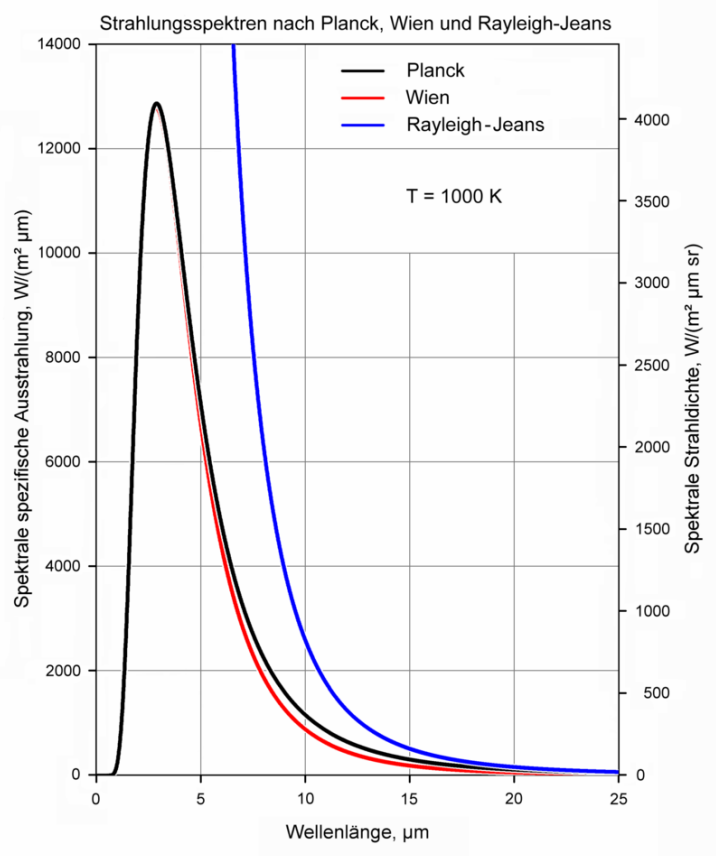


Abbildung links: Die spektralen Energiedichten nach Wien (rot), Rayleigh-Jeans (blau) und Planck (schwarz) im Vergleich, aufgetragen gegen die Wellenlänge der Strahlung.

Abbildung rechts: Die spektrale Energiedichte nach Planck zu verschiedenen Temperaturen. Bei zunehmender Temperatur verläuft die Kurve steiler, das Maximum wird ausgeprägter und wird zu kleineren Wellenlängen (höheren Frequenzen) verschoben.

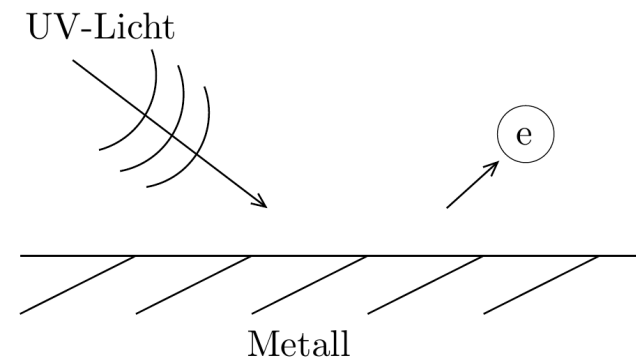


Abbildung 1.2: schematische Darstellung des Photoeffekts

1.3 Der Photoeffekt

Effekt: Metalle emittieren Elektronen, wenn sie mit e.m. Strahlung (UV-Licht) beleuchtet werden. Experimentelle Arbeiten von Hertz 1887, Hallwachs 1887, Stoletow 1888, Lenard 1899-1902 haben gezeigt:

1. Anzahl der emittierten Elektronen ist proportional zur Intensität der e.m. Strahlung
2. Für jedes Metall gibt es eine minimale Frequenz ν_0 , so dass für e.m. Strahlung mit $\nu < \nu_0$ keine Elektronen emittiert werden.
3. Die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen ist proportional zu $(\nu - \nu_0)$ und ist unabhängig von der Intensität der einfallenden Strahlung.
4. Die Emission der Elektronen erfolgt instantan, d.h. der Effekt setzt bei Beleuchtung ohne merkliche Verzögerung ein und hört bei Wegnahme der Beleuchtung ebenso schlagartig auf.

2. und 4. sind nicht kompatibel mit der Maxwell-Theorie e.m. Strahlung. Experimente mit Metallstaub: Maxwell-Theorie sagt verzögerte Emission voraus, wird nicht beobachtet (Gerlach und Meyer 1914).

Einsteins Erklärung(1905):

Monochromatische Strahlung der Frequenz ν verhält sich so, als ob sie aus endlich vielen voneinander unabhängigen, lokalisierten “Energie-Quanten” besteht, die jeweils die Energie

$$E = h\nu$$

tragen.

Liefert schlüssige Erklärung des Photoeffekts:

- Elektronen sind im Metall gebunden, Ionisierungsenergie des Metalls V_0
- Photon trifft auf Elektron wie bei elastischen Stoß \rightarrow Energieübertrag, Elektronen können nur emittiert werden wenn

$$h\nu - V_0 > 0$$

- $K_{\max} = h\nu - V_0$ ist die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen
- Die Intensität des Lichtstrahls ist proportional zur Anzahl der “Energie-Quanten”

Experiment bestätigt durch Milikan (1916)

Bem. 1.3.1.

Teilchennatur des Lichts ist implizite Hypothese