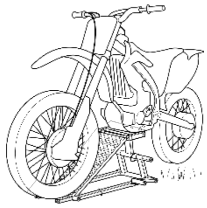
Gedämpfte Federschwingung



Gedämpfte Schwingungen werden beispielsweise beim Bau von Stoßdämpfern an Fahrzeugen relevant. Dazu werden meist eine Stahlfeder und ein hydraulischer (flüssigkeitsbetriebener) Dämpfer gemeinsam eingesetzt. Doch Dämpfung ist nicht gleich Dämpfung. Was das bedeuten soll und wie du diese Aussage mathematisch einengen kannst, kannst du im Folgenden herausfinden, indem du die Schwingung einer Feder mit Massestück in einer Flüssigkeit (z.B. Wasser) modellierst.

i

Bei der Bewegung eines Federpendels entsteht Reibung zwischen der Feder und dem umgebenden Medium. Handelt es sich dabei um eine Flüssigkeit, so nennt man die dafür ursächliche Kraft viskose Reibung oder auch Stokes-Reibung. Sie lässt sich durch die folgende Formel beschreiben:

$$F_r = -k \cdot v$$

k: Reibungskonstante
v: Geschwindigkeit des Massestück

Aufgabe 1:

a) Gib eine Formel für die aus Feder- und Reibungskraft kombinierte Gesamtkraft F an.

$F =$ ______________________________

b) Erstelle damit ein eindimensionales *Newton-II* Projekt mit Schiebereglern für Startwert s_0, Masse m, Federhärte D und Reibungskonstante k.

i

Tipp: Verringere den dt-Wert, wenn dir der Graph zu kantig erscheint.

c) Untersuche das Federverhalten in Abhängigkeit von der Reibungskonstanten und beschreibe deine Beobachtungen. Lasse dabei D und m konstant. Kannst du verschiedene Dämpfungsarten erkennen? Verändert sich die Frequenz der Schwingung?

i

Tipp: Es kann nützlich sein, den Wertebereich von k zwischendurch zu ändern, um das Verhalten bei geringer Reibung genauer zu untersuchen.

i

Du solltest drei Arten von Dämpfungen erkannt haben. Um diese besser beschreiben zu können, benötigst du eine weitere Konstante. Die Dämpfungskonstante δ.

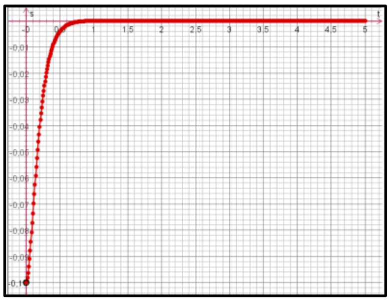
$$\delta = \frac{k}{2m}$$

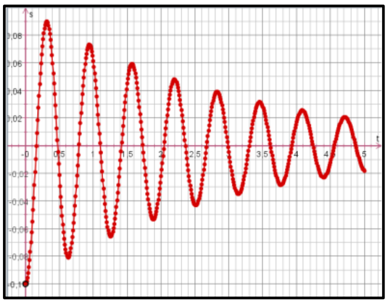
Ihre Bedeutung wird dann klar, wenn man sie mit der Eigenfrequenz ω_0 der Schwingung vergleicht. Zur Erinnerung:

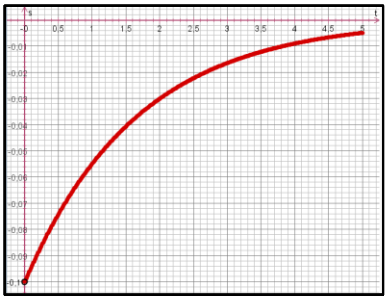
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Aufgabe 2:

a) Verbinde die grafisch dargestellten Dämpfungsfälle mit ihren Bezeichnungen. Berechne jeweils δ und ω_0 und vergleiche sie miteinander, um auch die unteren Kästen zuordnen zu können.







Kriechfall	**Schwingfall**	**aperiodischer Grenzfall**
$\omega_0 > \delta$	$\omega_0 = \delta$	$\omega_0 < \delta$

b) Überlege dir für jeden Dämpfungsfall ein Anwendungsgebiet eines nach diesem Prinzip arbeitenden Schwingers.

Die Definition der Abklingkonstanten hat noch einen weiteren Zweck, wie sich zeigen wird.

Aufgabe 3:

a) Erzeuge einen Schwingfall und zeichne die folgende Vergleichsfunktion ein:

$$s_{hüll}(t) = s_0 \cdot \exp(-\delta \cdot t)$$

> **i** Die Funktion $\exp(x) = e^x$ ist eine Exponentialfunktion mit der eulerschen Zahl $e = 2{,}71828 \ldots$ als Basis. Sie ist in der Physik ähnlich wichtig wie die Kreiszahl π.

Was fällt dir auf?

> **i** Durch die Dämpfung verändert sich auch die Frequenz der Schwingung. Sie lautet nun
>
> $$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$
>
> Erinnerung: Die Formel einer harmonischen Schwingung mit Kreisfrequenz ω lautet
>
> $$s_{harm}(t) = s_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

b) Versuche mithilfe der vorherigen Teilaufgabe eine Funktion für die gedämpfte Schwingung zu finden. Überprüfe sie mithilfe von Newton-II.

$$s_{dämpf}(t) = \underline{\hspace{6cm}}$$

c) Wie lange würde es dauern, bis die Amplitude einer im Schwingfall gedämpften Feder mit Masse m, Federhärte D und Reibungskonstante k nur noch 5% ihrer anfänglichen Auslenkung s_0 beträgt? Finde eine Formel und verifiziere dein Ergebnis mithilfe der Simulation.

d) Inwiefern unterscheidet sich das Modell in diesem Zusammenhang von der Realität?

Zusatzaufgabe: Falls du noch Zeit hast, dann versuche auch den aperiodischen Grenzfall mithilfe einer Funktion zu beschreiben. Tipp: Erzeuge eine kritische Dämpfung und untersuche den Graphen der Funktion $d(t) = s(t)/s_{hüll}(t)$.

$$s_{krit}(t) = \underline{\hspace{6cm}}$$