Kapitel 12

Regelsysteme und Abschlussoperatoren

Es kommt sehr oft vor, dass eine Menge syntaktischer Objekte mithilfe von Inferenzregeln definiert wird. Dabei handelt es sich fast immer um rekursive Definitionen. Ein typisches Beispiel ist die Definition einer Menge von ableitbaren oder beweisbaren Aussagen. Im Folgenden erklären wir diese Art von Definitionen mit einem abstrakten mathematischen Modell, für das wir eine Reihe von nützlichen Resultaten beweisen können.

In der Logik betrachtet man syntaktische und semantische Folgerungsrelationen. Syntaktische Folgerungsrelationen werden mithilfe von Inferenzregeln definiert, semantische mithilfe von Interpretationen. Die gemeinsamen Eigenschaften syntaktischer und semantischer Folgerungsrelationen können durch das abstrakte mathematische Modell des Abschlussoperators erklärt werden.

12.1 Regelsysteme

Sei X im Folgenden eine Menge. Wir bezeichnen X als die **Grundmenge**.

Eine **Regel für** X ist ein Paar (A, x), dass aus einer endlichen Menge $A \subseteq X$ und einem $x \in X$ besteht. Eine Regel $(\{x_1, \dots, x_n\}, x)$ notieren wir oft zweidimensional wie folgt:

$$\frac{x_1 \quad \cdots \quad x_n}{x}$$

Wir bezeichnen $x_1, \dots, x_n$ als die **Prämissen** und x als die **Konklusion** der Regel. Unter einem **Regelsystem für** X verstehen wir eine Menge von Regeln für X. Die Menge aller Regeln für X bezeichnen wir mit $\mathit{Rule}\,X$. Also ist $\mathcal{P}(\mathit{Rule}\,X)$ die Menge aller Regelsysteme für X.

Bei einer **Inferenzregel** handelt es sich um eine Notation für ein Regelsystem. Als Beispiel betrachten wir die Inferenzregel

$$\frac{x \quad y}{z} \quad z = x \cdot y$$

Damit wir diese Inferenzregel eindeutig als Beschreibung eines Regelsystems interpretieren können, müssen wir zuerst eine Grundmenge festlegen. Wir wählen die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Mit dieser Festlegung beschreibt die Inferenzregel das unendliche Regelsystem

$$\mathit{Mul} \overset{\text{def}}{=} \{ (\{x, y\},\ z) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge z = x \cdot y \}$$

Beachten Sie, dass dieses Regelsystem auch Regeln mit nur einer Prämisse enthält, zum Beispiel $(\{5\}, 25)$. Die als Teil der Inferenzregel angegebene Bedingung $z = x \cdot y$ wird als **Seitenbedingung** der Inferenzregel bezeichnet. Beachten Sie, dass Regeln im Gegensatz zu Inferenzregeln keine Seitenbedingungen haben können.

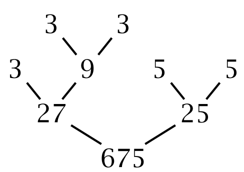
Wir kommen jetzt zur **operationalen Interpretation** von Regelsystemen. Eine Regel

$$\frac{x_1 \quad \cdots \quad x_n}{x}$$

besagt, dass wir aus den Prämissen $x_1, \ldots, x_n$ die Konklusion x ableiten können. Beispielsweise können wir mit der Regel $(\{3, 5\}, 15) \in \mathit{Mul}$ aus den Zahlen 3 und 5 die Zahl 15 ableiten. Insgesamt erlauben uns die Regeln von *Mul*, zu zwei natürlichen Zahlen deren Produkt abzuleiten. Wenn wir mehr als eine Regelanwendung zulassen, können wir mit dem Regelsystemen *Mul* aus der Menge $\{3, 5\}$ die folgende Menge ableiten:

$$\{ 3^m 5^n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m + n > 0 \}$$

Dabei sind immer nur endlich viele Ableitungschritte zulässig. Die Essenz einer Ableitung können wir durch einen **Ableitungsbaum** übersichtlich darstellen:



Dieser Baum zeigt, wie die Zahl 675 mit den Regeln von *Mul* aus den Zahlen 3 und 5 abgeleitet werden kann.

Aufgabe 12.1 Geben Sie die Menge an, die mit *Mul* aus $\{0, 2, 7\}$ abgeleitet werden kann. Zeigen Sie mit zwei Ableitungsbäumen, dass 56 mit *Mul* auf mindestens zwei verschiedene Arten aus $\{0, 2, 7\}$ abgeleitet werden kann. ■

12.2 Ableitungsoperatoren

Den **gesteuerten Ableitungsoperator für** X definieren wir rekursiv wie folgt:

$$C \in \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathit{Rule}\,X) \to \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$
$$C^0 RA = A$$
$$C^n RA = C^{n-1} RA \cup \{\, x \mid \exists B \subseteq C^{n-1} RA \colon (B, x) \in R \,\} \qquad \text{falls } n > 0$$

Machen Sie sich klar, dass $C^n RA$ genau die Objekte enthält, die aus den Elementen in A mit den Regeln aus R mit einem Ableitungsbaums abgeleitet werden können, der höchstens die Tiefe n hat. Für das Regelsystem *Mul* ergeben sich beispielsweise die folgenden Ableitungsmengen:

$$C^0(\mathit{Mul})\{2,3\} = \{2,3\}$$
$$C^1(\mathit{Mul})\{2,3\} = \{2,3,4,6,9\}$$
$$C^2(\mathit{Mul})\{2,3\} = \{2,3,4,6,9,8,12,16,18,24,27,36,54,81\}$$

Den **Ableitungsoperator für** X definieren wir wie folgt (wir überladen das Symbol C):

$$C \in \mathcal{P}(\mathit{Rule}\,X) \to \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$
$$CRA = \{\, x \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon x \in C^n RA \,\}$$

Machen Sie sich klar, dass CRA genau die Objekte enthält, die aus A mit R in endlich vielen Schritten abgeleitet werden können. Beispielsweise gilt

$$C(\mathit{Mul})\{3,5\} = \{\, 3^m 5^n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m + n > 0 \,\}$$

Proposition 12.2 (Konvergenz) Für alle $R \subseteq \mathit{Rule}\,X$ und $A \subseteq X$ gilt:
$A \subseteq C^1 RA \subseteq C^2 RA \subseteq C^3 RA \subseteq \cdots \subseteq CRA$.

Proposition 12.3 (Kompaktheit) Sei $R \subseteq \mathit{Rule}\,X$, $A \subseteq X$ und $x \in CRA$. Dann existieren endliche Teilmengen $R' \subseteq R$ und $A' \subseteq A$, sodass $x \in CR'A'$.

Beweis Es genügt, die Behauptung durch Induktion über n für C^n zu zeigen. Anschaulich gesprochen gilt die Behauptung, da jedes $x \in CRA$ mit einem endlichen Ableitungsbaum aus A abgeleitet werden kann. Dieser kann nur von endlich vielen Regeln aus R und von endlich vielen Elementen aus A Gebrauch machen. ∎

Proposition 12.4 (Prüfbarkeit) Seien $R \subseteq \mathit{Rule}\,X$ und $A \subseteq X$ prüfbare Mengen. Dann ist CRA prüfbar.

Beweis Wenn man die Regeln und die Elemente von A algorithmisch aufzählen kann, kann man auch die entsprechenden Ableitungsbäume algorithmisch aufzählen. ■

Proposition 12.5 (Monotonie) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $R, R' \subseteq \mathit{Rule}\, X$ und $A, A' \subseteq X$ gilt: $R \subseteq R' \wedge A \subseteq A' \implies C^n RA \subseteq C^n R'A' \wedge CRA \subseteq CR'A'$.

Beweis Es genügt, die Behauptung durch Induktion über n für C^n zu zeigen. ■

Sei R ein Regelsystem für X. Eine Menge $I \subseteq X$ heißt **Invariante von** R, wenn $\forall (A, x) \in R\colon\ A \subseteq I \Longrightarrow x \in I$. Wenn I eine Invariante von R ist, sagen wir auch, dass I unter R abgeschlossen ist. Machen Sie sich klar, dass $\emptyset$ und X immer Invarianten von R sind.

Proposition 12.6 (Fixpunkte) Sei R ein Regelsystem für X und $A \subseteq X$. Dann ist A genau dann eine Invarianten von R, wenn $CRA = A$.

Beweis Sei A eine Invariante von R. Es genügt, $CRA \subseteq A$ zu zeigen. Dafür genügt es, $C^n RA \subseteq A$ durch Induktion über n zu zeigen.

Sei $CRA = A$. Sei $(B, x) \in R$ und $B \subseteq A$. Dann $x \in C^1 RA \subseteq CRA = A$. Also ist A eine Invariante von R. ■

Satz 12.7 (Invarianten) Sei R ein Regelsystem für X und $A \subseteq X$. Dann ist CRA die kleinste Invariante von R, die A enthält.

Beweis Wir zeigen zuerst, dass CRA eine Invariante von R ist. Sei $(B, x) \in R$ und $B \subseteq CRA$. Da B endlich ist, gibt es ein n mit $B \subseteq C^n RA$. Also $x \in C^{n+1} RA \subseteq CRA$.

Da $A \subseteq CRA$, bleibt zu zeigen, dass CRA in jeder Invariante von R enthalten ist, die A enthält. Sei I eine Invariante von R mit $A \subseteq I$. Wir müssen $CRA \subseteq I$ zeigen. Dafür genügt es, $C^n RA \subseteq I$ für alle n zu zeigen. Das gelingt durch Induktion über n. ■

Korollar 12.8 (Induktion) Sei R ein Regelsystem für X und seien $A, I \subseteq X$. Dann $CRA \subseteq I$, falls $A \subseteq I$ und I eine Invariante von R ist.

12.3 Regelinduktion

Das gerade angegebene Korollar liefert eine wichtige Beweistechnik, die als **Regelinduktion** bezeichnet wird. Um die Aussage $CRA \subseteq I$ zu beweisen, genügt es, die folgenden Aussagen zu beweisen:

1. $\forall x \in A\colon\ x \in I$

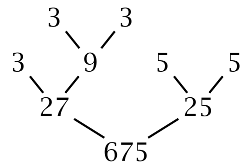
2. $\forall (B, x) \in R\colon\ B \subseteq I \Longrightarrow x \in I$

Regelinduktion ist also eine hochgradig modulare Beweistechnik. Wir demonstrieren Regelinduktion mithilfe eines Beispiels.

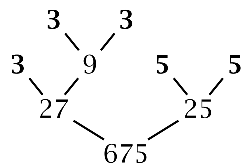
Behauptung $\forall x \in C(\mathit{Mul})\{3, 5\}\ \exists m, n \in \mathbb{N}\colon\ x = 3^m \cdot 5^n \wedge m + n > 0.$

Beweis Durch Regelinduktion mit $I = \{\, 3^m \cdot 5^n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m + n > 0 \,\}$. Da $\{3, 5\} \subseteq I$ bleibt nur zu zeigen, dass I eine Invariante von R ist. Sei also $(\{x, y\}, z) \in \mathit{Mul}$ und $\{x, y\} \subseteq I$. Wir müssen zeigen, dass $z \in I$. Aus $\{x, y\} \subseteq I$ folgt, dass $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ existieren mit $x = 3^{m_1} \cdot 5^{n_1}$, $m_1 + n_1 > 0$, $y = 3^{m_2} \cdot 5^{n_2}$ und $m_2 + n_2 > 0$. Also $z = x \cdot y = 3^{m_1} \cdot 5^{n_1} \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{n_2} = 3^{m_1+m_2} \cdot 5^{n_1+n_2} \in I$. ∎

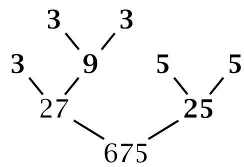
Die Korrektheit der Regelinduktion kann man sich anschaulich klar machen. Dazu betrachten wir den Ableitungsbaum



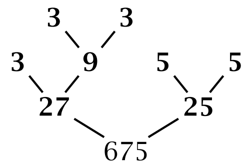
der zeigt, dass $675 \in C(\mathit{Mul})\{3, 5\}$ gilt. Sei $I = \{\, 3^m \cdot 5^n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m + n > 0 \,\}$. Da $3 \in I$ und $5 \in I$, wissen wir, dass alle Blätter des Ableitungsbaums in I liegen. Dieses Wissen markieren wir im Ableitungsbaum durch Fettdruck:



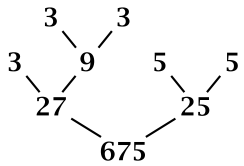
Da für jede Regel in *Mul* gilt, dass die Konklusion in I ist, wenn die Prämissen in I sind, folgt $9 \in I$ und $25 \in I$:



Da $3 \in I$ und $9 \in I$, folgt $27 \in I$:



Schließlich bekommen wir $675 \in I$:



Stellen Sie sich jetzt einen belieben Ableitungsbaum für ein $x \in CRA$ vor. Die Aussage $A \subseteq I$ liefert, dass alle Blätter in I sind, und die Aussage, dass I eine Invariante von R ist, erlaubt uns, ausgehend von den Blättern Schritt für Schritt zu beweisen, dass alle Knoten in I sind. Also folgt schließlich $x \in I$.

12.4 Abschlussoperatoren

Ein **Abschlussoperator für** X ist eine Funktion $f \in \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, sodass für alle $A, B \subseteq X$ gilt:

- *Expansivität:* $A \subseteq fA$
- *Monotonie:* $A \subseteq B \Longrightarrow fA \subseteq fB$.
- *Idempotenz:* $f(fA) = fA$.

Ein Abschlussoperator f für X heißt **kompakt**, wenn für alle $A \subseteq X$ und alle $x \in fA$ eine endliche Menge $A' \subseteq A$ mit $x \in fA'$ existiert.

Proposition 12.9 Sei R ein Regelsystem für X. Dann ist CR ein kompakter Abschlussoperator für X.

Beweis Die Expansivität folgt direkt aus der Definition von C. Die Monotonie und die Kompaktheit ergeben sich mit den Propositionen 12.5 und 12.3. Die Idempotenz folgt mit Satz 12.7 und Proposition 12.6. ∎

Aufgabe 12.10 Geben Sie eine Menge X und einen nicht kompakten Abschlussoperator für X an. ∎

Proposition 12.11 Sei f ein Abschlussoperator für X. Dann gilt für alle Teilmengen $A, B, C \subseteq X$:

a) $fA = f(A \cup B) \iff B \subseteq fA$

b) $f(A \cup B) = f(A \cup C) \iff B \subseteq f(A \cup C) \wedge C \subseteq f(A \cup B)$

c) $f(A \cup B) = f(fA \cup B)$

d) $fA = fB \Longrightarrow f(A \cup C) = f(B \cup C)$

Beweis (a) Sei $B \subseteq fA$. Dann folgt $f(A \cup B) \subseteq f(A \cup fA) = f(fA) = fA$ mit der Monotonie, Expansivität und Idempotenz von f. Außerdem folgt $fA \subseteq f(A \cup B)$ mit der Monotonie von f. Also $fA = f(A \cup B)$.

Sei umgekehrt $fA = f(A \cup B)$. Dann folgt $B \subseteq A \cup B \subseteq f(A \cup B) = fA$ mit der Expansivität von f.

(d) Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt mit der Monotonie und Expansivität von f. Die andere Richtung ergibt sich wie folgt. Sei $B \subseteq f(A \cup C)$ und $C \subseteq f(A \cup B)$. Dann folgt $f(B \cup A \cup C) = f(A \cup C)$ und $f(C \cup A \cup B) = f(A \cup B)$ mit (a). Also $f(A \cup C) = f(A \cup B)$.

(c) Mit der Expansivität von f folgt $A \cup B \subseteq fA \cup B \subseteq f(fA \cup B)$. Daraus folgt $f(A \cup B) = f(fA \cup B)$ mit (a) und der Idempotenz von f.

(d) Sei $fA = fB$. Dann $f(fA \cup C) = f(fB \cup C)$. Also folgt $f(A \cup C) = f(B \cup C)$ mit (c). ■