Prom. Nr. 3178

Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung

Von der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH
zur Erlangung
der Würde eines Doktors der
Mathematik
genehmigte
PROMOTIONSARBEIT

Vorgelegt von

JOSEF KUPPER
dipl. Math. ETH
von Luzern und Buttisholz (LU)

Referent: Herr Prof. Dr. W. Saxer
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Wyss

Gedruckt 1962 in Würzburg bei Konrad Triltsch

Leer - Vide - Empty

Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung

Die Schadenversicherung kann von zwei verschiedenen Warten aus betrachtet werden. Der eine, ältere Gesichtspunkt gründet auf dem Risiko des einzelnen Versicherten und ist unter dem Namen individuelle Risikotheorie bekannt. Seit *F. Lundberg* [50] *) hat die kollektive Betrachtungsweise immer mehr Einfluß auf die Versicherungstheorie gewonnen, was aus den zahlreichen Arbeiten über diesen Gegenstand (*Arfwedson, Cramér, Philipson, Segerdahl*; *Ammeter, Saxen, Campagne* u.a.) hervorgeht. Diese befaßt sich nicht mehr mit dem Risiko eines einzelnen Individuums, sondern untersucht das Verhalten einer versicherten Gruppe als Ganzes. Die individuelle Theorie geht beispielsweise davon aus, ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell herzuleiten, das darüber Auskunft erteilt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Versicherter in einer gewissen Zeitspanne r Schäden erleide; die kollektive Schau hingegen bemüht sich vorerst darum, dasselbe für einen ganzen Versicherungsbestand zu erfahren, ungeachtet dessen, was mit den individuellen Versicherungen in dieser Zeit geschieht. Da die beiden Anschauungen in ihrem methodischen Aufbau weitreichende Analogien aufweisen, soll in dieser Arbeit nicht starr an einem Gesichtspunkt festgehalten werden, sondern je nach den besonderen Absichten sei der eine oder andere mehr in den Vordergrund gerückt.

Die Schadenversicherung — wir denken, wenn von Schadenversicherung die Rede ist, hauptsächlich an den wichtigen Zweig der Unfallversicherung — basiert auf zwei stochastischen Größen, der Schadenzahl und der Schadenhöhe. Hierin tritt bereits ein fundamentaler Unterschied zur Lebensversicherung zutage, wo letztere in den weitaus meisten Fällen eine zum voraus festgelegte, feste Zahl darstellt. Die interessantere der beiden Variablen ist die Schadenzahl; ihre Verteilung wird im umfangreichen Kapitel I diskutiert. Wir beschränken uns dabei zum vornherein auf die Verteilung in einer bestimmten Zeitspanne (Zeiteinheit), gehen also nicht auf Fragen der zweidimensionalen Behandlung (= zwei Zeitperioden, siehe z.B. [9], [13]) ein.

Ausgangspunkt der Betrachtung bildet das klassische Modell des reinen Zufalls (§ 1), das unter sehr einschränkenden Bedingungen über den zu Grunde liegenden Prozeß erhalten wird. Insbesondere ist, worauf bereits *Greenwood* und *Yule* in ihrer bahnbrechenden Arbeit [38] hingewiesen haben, Homogenität des Bestandes und Unabhängigkeit der Ereignisse Voraussetzung.

Die Aufhebung des ersten Grundsatzes kommt als Gegenstand von § 2 zur Sprache. Seit *Greenwood/Yule* [38] und *Newbold* [53, 54] wird für die dabei auftretende Strukturfunktion (Verteilungsfunktion der verschiedenen Schadenanfälligkeit) fast ausschließlich eine Gamma-Verteilung verwendet. *Greenwoods* eigene Begründung [36] „Our only justification of the particular choice of $f(\lambda)$ was that it ranged from $\lambda = 0$ and led to a statistically useful form" sowie die Erklärung von *Bates* und *Neyman* [13] „is justified both by its flexibility as an interpolation formula and by the tradition established by *Greenwood, Yule* and *Newbold*" sind nicht so überzeugend, um nicht auch Raum für Versuche mit anderen Strukturfunktionen durchzuführen. Als wichtiges Hilfsmittel erweisen sich hierbei die konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Schließlich wird auch die Möglichkeit der Binomialverteilung als Grundverteilung samt den daraus sich ergebenden Erweiterungen einer kurzen Analyse unterzogen.

---

*) Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Das Gebot der Unabhängigkeit der Ereignisse kann nach zwei Richtungen hin gelockert werden. Das Kollektivschadenmodell (§ 3) nimmt an, daß ein Ereignis Ursache mehrerer Schäden sein könne. Es werden zwei allgemeine Darstellungen für das Kumulrisiko und verschiedene instruktive Beispiele gegeben. § 4 ist dem Ansteckungsmodell gewidmet, dem die Voraussetzung zu Grunde liegt, daß das Eintreffen (bzw. Nichteintreffen) eines Schadenereignisses den weiteren Schadenverlauf maßgeblich beeinflußt. Wir gehen von einem ganz allgemeinen Schema aus, das jedoch in Spezialfällen bekannte Modelle (*Eggenberger/Pólya* [26, 27], *Rutherford* [63]) enthält.
In einem letzten Paragraphen sind schließlich einige gemischte Modelle (Überlagerung der zuvor besprochenen Eigenschaften) diskutiert.
Kapitel II befaßt sich mit der Verteilung der Schadenhöhe. Verschiedene Anregungen zur Behandlung dieser Frage werden unterbreitet und an Hand zahlreicher Beispiele beleuchtet.
Endlich hat Kapitel III die Zusammenfassung von Schadenzahl und Schadenhöhe zum Totalschaden als Thema. Dabei wird an der Unabhängigkeit der beiden stochastischen Grundvariablen festgehalten. Während in § 1 die übliche Methode zur Darstellung gelangt, erläutern die folgenden Paragraphen einen etwas anderen Aspekt des Problems. An die Stelle der Schadenzahl tritt die Schadenhäufigkeit als Grundvariable. Da diese ihrer Definition nach besser durch eine stetige Verteilung wiedergegeben wird (Normalverteilung!), erhebt sich die Frage einer Anpassung des Totalschadenmodells. Zwei Lösungswege werden vorgeschlagen, die Einführung der stetigen Faltung (§ 3) und die Zuhilfenahme der Produktverteilung (§ 4).
Zwecks Klarlegung der Begriffe und Bezeichnungsweisen sowie im Interesse einer flüssigen Arbeitsweise sind in einem Anhang die wichtigsten, überall in die Rechnung eingehenden Funktionen und Verteilungen mit ihren Eigenschaften im Sinne einer protokollarischen Übersicht aufgezeichnet.

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel I

Die Verteilung der Schadenzahl

Das Problem, womit sich dieses Kapitel beschäftigt, ist bereits in der Einleitung unter den beiden möglichen Aspekten (individuell und kollektiv) beschrieben worden. Es handelt sich darum, die Wahrscheinlichkeit dafür anzugeben, daß sich in der betrachteten Zeitspanne (Zeiteinheit, Jahr) für einen einzelnen Versicherten bzw. für den gegebenen Versicherungsbestand r Schäden (Unfälle) einstellen. Im folgenden gehen wir mehrheitlich von der individuellen Betrachtungsweise aus, verweisen jedoch stets bei Gelegenheit auch auf den kollektiven Standpunkt.

1.1 Das Modell der reinen Zufallsverteilung

Ausgang unserer Betrachtungen bildet das klassische Urnenschema von *Bernoulli.* Eine Urne enthalte je eine bestimmte Anzahl weißer und schwarzer Kugeln. Aus ihr werden n Züge vorgenommen, wobei nach jedem Zug die eben gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird. Bezeichne p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des „schwarzen Ereignisses", q die Gegenwahrscheinlichkeit, dann ist allgemein bekannt, daß die Wahrscheinlichkeit für r derartige Ereignisse (Schadenfälle) in n Versuchen durch die Verteilung (30) *)

$$P_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

wiedergegeben wird.

Es liegt in der Natur der Begebenheiten, daß ein kontinuierliches Ziehen (an Stelle des Parameters n) den wirklichen Sachverhalt besser ausdrücken würde. Des weiteren hat sich herausgestellt, daß eine Seltenheitsannahme für die Schadenereignisse den praktischen Erfahrungen zumeist gut entspricht. Der entsprechende Grenzübergang $n \to \infty$, $p \to o$, wobei $np = \lambda$ konstant gehalten wird, führt zur Poisson-Verteilung (P-Verteilung) (33)

$$P_r = e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!},$$

die seit dem Beginn solcher Untersuchungen in der Theorie eine tragende Rolle spielt.

Statt die P-Verteilung auf diese Weise als Approximation der Binomialverteilung zu interpretieren, läßt sich das Wesen des kontinuierlichen Zuges wohl noch einleuchtender mit Hilfe des der P-Verteilung zu Grunde liegenden stochastischen Prozesses erläutern. Die Voraussetzungen

a) im Intervall $[t, t + \Delta t]$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Schadenereignis genau einmal eintritt, von der Form $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$;

b) daselbst betrage die Wahrscheinlichkeit für mehr als einen Unfall $o(\Delta t)$;

führen bekanntlich auf das Differenzen-Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} P_r'(t) &= -\lambda[P_r(t) - P_{r-1}(t)] \qquad \text{(I 1)} \\ P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) \end{aligned}$$

*) Formeln aus den einzelnen Kapiteln sind durch vorangestellte römische Ziffern I, II oder III gekennzeichnet. Fehlt diese, wie z. B. hier, soll damit auf die entsprechende Formel im Anhang hingewiesen werden.

bzw. auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial t} = \lambda(z-1)\,E(z,t)\,, \quad E(z,o) = 1\,,$$

woraus für die Verteilung in [0,1] aus (34) sofort (33) folgt.
Unter welchen Umständen kann dieses Modell zur Anwendung gelangen?
Als erstes ist zu bemerken, daß bei der Herleitung die mittlere Schadenintensität λ (bzw. das p im Binomialansatz) als zeitunabhängig vorausgesetzt wurde. Diese Annahme bildet keine wesentliche Einschränkung. Setzt man in (I 1) statt des konstanten λ eine Funktion der Zeit $\lambda(t)$ ein, so erscheint in der P-Verteilung als einziger Unterschied ein Parameter

$$\lambda^* = \int_0^1 \lambda(\tau)\,d\tau\,,$$

also ein gemittelter Wert über die betrachtete Einheitszeitspanne. Daraus geht hervor, daß systematische zeitliche Veränderungen keinen wesentlichen Einfluß auf die Hypothese ausüben (andererseits vergleiche man auch 1. 4. 2).

Zwei Annahmen sind jedoch von grundlegender Bedeutung:

(A) Der betrachtete Risikoverband ist zu Beginn der Untersuchung vollständig homogen, d.h. jedes Individuum besitzt genau die gleiche Anfälligkeit (gleiche Umgebung, gleiche persönliche Eigenschaften), einen Unfall zu erleiden.

(B) Ein eingetretener Unfall beeinflußt die Wahrscheinlichkeit für weitere Unfälle nicht im geringsten, d.h. die Schadenereignisse sind stochastisch unabhängig.

Die Schadenereignisse treten so unabhängig von Person und Vorgeschichte rein zufällig auf („uncomplicated chance distribution" nach *Greenwood/Yule* in [38]), die Versicherungsgemeinschaft ist und bleibt homogen.
Umgekehrt muß man etwelche Vorsicht walten lassen, wenn man von einer näherungsweise P-verteilten Stichprobe auf eine immer homogene Grundgesamtheit schließen will. Neben der Sorgfalt, mit der das Angleichungskriterium behandelt werden muß, ist es nämlich nicht notwendig, daß eine P-verteilte Gesamtheit die obige Homogenitätshypothese zur Grundlage hat. Andere Hypothesen können sie ebenfalls als Modell erzeugen [47]. Im allgemeinen nimmt man bei guter Annäherung durch eine P-Verteilung die Homogenitätsbedingung als eine plausible Erklärung an. In § 2 dieses Kapitels werden wir uns eingehend mit der Vernachlässigung von Annahme (A) beschäftigen, in § 3 und § 4 wird die Mißachtung von (B) zur Diskussion stehen. Schließlich hat § 5 einige gemischte Modelle zum Thema.

1.2 Das Modell des heterogenen Bestandes

1.2.1 Allgemeine Theorie

In der Praxis wird die Homogenitätsbedingung (A) kaum je erfüllt sein. Die Annahme, daß alle Individuen dieselbe mittlere Unfallzahl besitzen, idealisiert die tatsächlichen Verhältnisse allzusehr. In Wirklichkeit liegen sie viel komplizierter, und mannigfache Einflüsse können auf die Unfallanfälligkeit eines Individuums einwirken. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, kann man so vorgehen, daß man den gegebenen Bestand in Untergruppen, sog. Gefahrenklassen, aufteilt, innerhalb deren gleiche Anfälligkeit (also Homogenität) herrschen soll.

Seien die Klassen $K_1, K_2 \ldots K_m$ gebildet und werde die Verteilung in K_j für den Moment mit $P_r(\theta_j)$ bezeichnet, dann wird die Schadenverteilung im Gesamtbestand (d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiges Individuum in der betrachteten Zeitspanne r Schäden erleidet) lauten

$$W_r = \sum_{j=1}^{m} p_j P_r(\theta_j), \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \tag{I 2}$$

wobei p_j den Anteil der Gruppe K_j, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines Individuums zu K_j zu gehören, definiert.

Für $P_r(\theta_j) = P_r(\lambda_j) = e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^r}{r!}$ ergibt sich

$$W_r = \frac{1}{r!} \sum_{j=1}^{m} p_j e^{-\lambda_j} \lambda_j^r$$

Die doppelte P-Verteilung (2 Klassen)

$$W_r = p_1 e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^r}{r!} + p_2 e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^r}{r!}$$

wurde von *Lundberg* [51] einer näheren Untersuchung unterzogen.
Die Unterteilung in eine endliche Zahl von Untergruppen befriedigt nicht ganz. Man wird die Aufspaltung nach den wichtigsten Unterscheidungsgründen vornehmen, doch kann auf diese Weise nie eine vollständige Homogenisierung erreicht werden, da sich stets Effekte finden lassen, die unberücksichtigt blieben. Um diesen Übelstand zu beheben, geht man einen Schritt weiter, indem man annimmt, der Parameter θ variiere stetig innerhalb des Bestandes gemäß einer wohldefinierten Verteilungsfunktion (Vf) $S(\theta)$. Diese muß notwendigerweise unilateral sein, sonst wird über sie nichts vorausgesetzt. Bezeichne $s(\theta)$ die Dichte, B_θ den Existenzbereich dieser Vf, so lautet die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W_r = \int_{B_\theta} P_r(\theta) s(\theta) d\theta$$

oder in allgemeinerer, auch (I 2) enthaltender Darstellung

$$W_r = \int_{B_\theta} P_r(\theta) dS(\theta) \tag{I 3}$$

$S(\theta)$ wird Strukturfunktion, $P_r(\theta)$ Grundverteilung genannt.
Die Momente der Verteilung $\{W_r\}$ sind*)

$${}_W\alpha_k = \int_{B_\theta} {}_P\alpha_k(\theta) dS(\theta) \quad \text{mit} \quad {}_P\alpha_k(\theta) = \sum_r r^k P_r(\theta), \tag{I 4}$$

und dieselbe Formel gilt für die faktoriellen Momente (nicht aber für die Zentralmomente!).
Erzeugende Funktion (eF):

$$E_W(z) = \int_{B_\theta} E_P(z, \theta) dS(\theta) \quad \text{mit} \quad E_P(z, \theta) = \sum_r z^r P_r(\theta) \tag{I 5}$$

---

*) Es wurde die im allgemeinen übliche Bezeichnungsweise verwendet, genaue Auskunft hierüber vermittelt der Anhang. Die Indizes W, P, S nehmen Bezug auf die entsprechende Vf.

Wenn die Grundverteilung den Mittelwert μ_P hatte, wird oft verlangt, daß die neue Verteilung sich darin nicht ändere. Diese Forderung liefert eine Beziehung zwischen den Parametern der Strukturfunktion

$$\mu_P = \int_{B_\theta} \mu_P(\theta)\, dS(\theta) \tag{I 6}$$

Statt den Parameter θ der Grundverteilung zu variieren, kann man auch von diesem zu einem neuen θq übergehen, θ konstant lassen und q als stochastische Variable auffassen. Der Effekt ist im Grunde derselbe, wie an Hand von 1. 2. 2 noch näher ausgeführt wird.

In der kollektiven Risikotheorie ist dasselbe Vorgehen üblich. Man argumentiert dort, daß die mittlere Unfallzahl eines Versicherungsbestandes keine feste Konstante sein könne, sondern in einem bestimmten Bereich schwanke. Das führt zu (I 3) als Verteilung der Anzahl Schäden des ganzen Bestandes [3, 4].

1.2.2 Die Poisson-Verteilung als Grundverteilung

Setzt man in (I 3) für $P_r(\theta)$ die P-Verteilung ein, so nimmt W_r die Gestalt

$$W_r = \int_{B\lambda} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}\, dS(\lambda) \tag{I 7}$$

an, eine Klasse von Verteilungen, die unter dem Namen „Zusammengesetzte P-Verteilungen" bekannt ist [44, 51].

Formel (I 4) für die faktoriellen Momente liefert mit Hilfe von (35) die wichtige Beziehung

$$_W\alpha_{[k]} = {}_S\alpha_k \tag{I 8}$$

zwischen den Momenten der neuen und der Strukturverteilung. Insbesondere ist nach (I 8) und (24)

$$\begin{aligned} \mu_W &= \mu_S \\ \sigma_W^2 &= \sigma_S^2 + \mu_S > \mu_W \\ {}_W\mu_3 &= {}_S\mu_3 + 3\,\sigma_S^2 + \mu_S \\ {}_W\mu_4 &= {}_S\mu_4 + 6\,{}_S\mu_3 + \sigma_S^2(6\,\mu_S + 7) + 3\,\mu_S^2 + \mu_S \end{aligned} \tag{I 9}$$

Die zugehörige eF wird mit (I 5) und (34)

$$E_W(z) = \int_{B\lambda} e^{\lambda(z-1)}\, dS(\lambda) = \varphi_S\,[(z-1)/i]\,, \tag{I 10}$$

während in Übereinstimmung mit (I 8)

$$M_W[z] = \int_{B\lambda} e^{\lambda z} dS(\lambda) = M_S(z)$$

gilt.

Wie in 1. 2. 1 ausgeführt, kann man auch λ fest halten und statt dessen die Größe q in λq stochastisch variieren lassen. Statt (I 7) erhält man so

$$W_r = \int_{B_q} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^r}{r!}\, dS(q)$$

Da in diesem Fall $\mu_W = \mu_S \lambda$ ist, sagt Bedingung (I 6) über den Mittelwert der Strukturfunktion aus:

$$\mu_S = \int_{B_q} q \, dS(q) = 1$$

Auf diese Weise gelingt es, den Parameter der Grundverteilung auch in der neuen Verteilung zu benutzen, wo er wieder den Mittelwert interpretiert.
Die Hauptfrage, welche sich nun stellt, ist die Wahl der Strukturfunktion $S(\lambda)$. Diese ist unbekannt und kann auch nicht aus empirischen Daten gewonnen werden, da ja nur die Schadenzahlen (nicht aber die Anfälligkeit) der einzelnen Individuen meßbar sind. Nur wenn man weiß, daß die in 1.2 formulierte Hypothese richtig ist, liefert die empirische Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{W_r\}$ Informationen über die Strukturfunktion. Die Willkür wird durch den in der Einleitung zitierten Ausspruch *Greenwoods* unterstrichen.
Plausibel scheint die Annahme, für $s(\lambda)$ eine unimodale Funktion zu wählen. Weiter wird der Einfachheit halber meist als Existenzintervall $0 < \lambda < \infty$ vorausgesetzt; doch ist es sehr wohl möglich, daß ein endlicher Schwankungsbereich bessere Resultate ergeben kann. Nach oben wird in praktischen Fällen die Schwankung sicher beschränkt sein, allerdings dürfte dem auch eine rasch abfallende Verteilungsdichte (Vd) gerecht werden. Anderseits kann es auch vorkommen, daß λ eine gewisse untere Schranke λ_0 zum vornherein nicht unterschreiten kann, daß man also weiß oder zu wissen glaubt, die mittlere Unfallzahl müsse mindestens λ_0 betragen. Es ist daher nicht abwegig, als Strukturfunktionen auch solche Vf zuzulassen, die nur für $\lambda > \lambda_0 > 0$ definiert sind.
Im folgenden Abschnitt werden verschiedene unimodale Vd auf ihre Eignung hin geprüft. Für einen anderen Weg, das Problem an die Hand zu nehmen, sei auf [43] verwiesen.

1.2.3 Verschiedene Strukturfunktionen

A. Die Γ-Verteilung.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, wird die Γ-Verteilung seit Beginn der Untersuchungen und fast ausschließlich als Strukturfunktion verwendet. Die Einfachheit der entstehenden Wahrscheinlichkeitsverteilung rechtfertigt diese Wahl. Führt man (53) in (I 7) ein, so entsteht die negative Binomialverteilung (41)

$$W_r = \binom{\alpha + r - 1}{r} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\alpha} \frac{1}{(a+1)^r},$$

deren Eigenschaften im Anhang eingehend beschrieben sind.
Wird in Übereinstimmung mit Forderung (I 6) $\mu_W = \alpha/a = \lambda$ gesetzt, so lautet die entsprechende Verteilung

$$W_r = \binom{\alpha + r - 1}{r} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^{\alpha} \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^{r},$$

wo λ nun wiederum die mittlere Unfallzahl ausdrückt, während der Parameter α das Ausmaß der Schwankungen registriert. Für $\alpha \to \infty$ nähert sich die Verteilung der ursprünglichen P-Verteilung.
Die negative Binomialverteilung wird uns noch unter ganz anderen Umständen begegnen. Die mannigfachen Deutungsmöglichkeiten erklären die Beliebtheit der Verteilung. Anderseits liegt ein oft gerügter Nachteil gerade darin, daß sie von ganz verschiedenen Modellen erzeugt werden kann, so daß allein aus ihrem Vorhandensein noch kein endgültiger Schluß über die zu Grunde liegende Hypothese möglich ist.

Die verallgemeinerte Γ-Verteilung

$$\gamma_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-a(\lambda-\lambda_0)} (\lambda - \lambda_0)^{\alpha-1}, \quad \lambda > \lambda_0 \tag{I 11}$$

wurde kürzlich von *Delaporte* [25] für Belange der Motorfahrzeugversicherung vorgeschlagen. Mit den früher bereitgestellten Hilfsmitteln läßt sich der Einfluß einer solchen Verschiebung recht einfach diskutieren. Größen mit dem Index λ_0 beziehen sich auf obige Verteilung, während für die gewöhnliche Γ-Verteilung auf einen Index verzichtet wird. Vorerst erhält man für die Momente von γ_{λ_0}

$$_{\lambda_0}\alpha_k = \frac{a^{-k}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{\alpha-1} (\lambda + a\lambda_0)^k \, d\lambda = \frac{\lambda_0^k}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (a\lambda_0)^{-j} \Gamma(\alpha + j)$$

oder unter Benützung der Relation (54)

$$_{\lambda_0}\alpha_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_0^{k-j} \alpha_j$$

Insbesondere ist also

$$\mu_{\lambda_0} = \lambda_0 + \mu = \lambda_0 + (\alpha/a)$$

Die Zentralmomente ändern bei einer linearen Verschiebung ihren Wert natürlich nicht. In der charakteristischen Funktion (cF) bewirkt die Transformation eine Multiplikation mit dem Faktor $e^{i\lambda_0 t}$.

Das Verhalten der Funktion (I 11) als Dichte einer Strukturfunktion ist an Hand der eF $_{\lambda_0}E_W(z)$ sofort zu erkennen. Nach (I 10) und (42) ist

$$_{\lambda_0}E_W(z) = \left(1 + \frac{1-z}{a}\right)^{-\alpha} e^{\lambda_0(z-1)} = E_W(z)\, e^{\lambda_0(z-1)} \tag{I 12}$$

Es ergibt sich also als eF ein Produkt aus den eF der ursprünglichen Verteilung und einer P-Verteilung mit Parameter λ_0. Daraus schließt man, daß sich W_r als Faltung der negativen Binomialverteilung (Parameter a, α) mit der P-Verteilung (Parameter λ_0) darstellen läßt.

$$W_r = \sum_{j=0}^{r} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^{r-j}}{(r-j)!} \binom{j+\alpha-1}{j} \left(\frac{a}{a+1}\right)^\alpha \frac{1}{(a+1)^j}$$

oder nach einigen Umformungen

$$W_r = \left(\frac{a}{a+1}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^r}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} [(a+1)\lambda_0]^{-j} \Gamma(\alpha + j) \tag{I 13}$$

Es ist bekannt, daß sich die Momente einer solchen Summenvariablen für die drei niedrigsten Ordnungen durch einfache Addition der Momente der Einzelvariablen ergeben. Da für die P-Verteilung $\mu = \sigma^2 = \mu_3 = \lambda$ gilt, ist also

$$\mu_W = \frac{\alpha}{a} + \lambda_0$$

$$\sigma_W^2 = \frac{\alpha}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \lambda_0$$

$$_W\mu_3 = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{3}{a} + 1\right) + \lambda_0$$

B. Die Beta-Verteilung 1. Art.

Wir gehen von der Vd (50) aus, die nur im Intervall $0 < \lambda < 1$ definiert ist. Es bleibt allerdings stets fraglich, ob eine Variation der mittleren Unfallzahl in diesem Bereich den Erfordernissen Genüge leistet. Setzt man β_1 in (I 7) ein und beachtet die Integraldarstellung (15), so erhält man

$$W_r = \frac{1}{B(p,q)} \frac{1}{r!} \int_0^1 e^{-\lambda} \lambda^{r+p-1} (1-\lambda)^{q-1} d\lambda = \frac{1}{r!} \frac{B(r+p,q)}{B(p,q)} {}_1F_1(r+p; r+p+q; -1) \tag{I 14}$$

Für die eF entsteht in gleicher Weise die übersichtliche Form

$$E_W(z) = {}_1F_1(p; p+q; z-1) \tag{I 15}$$

Nach (I 9) und (51) lauten die ersten beiden Momente

$$\mu_W = \frac{p}{p+q}, \quad \sigma_W^2 = \frac{p}{(p+q)^2(p+q+1)} [(p+q)(p+q+1)+q]$$

Man könnte wieder Bedingung (I 6) erfüllen, doch soll in Zukunft darauf verzichtet werden.

Allgemeiner kann man eine Beta-Verteilung ansetzen, die im Intervall $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ definiert ist,

$$\beta_{\lambda_0,\lambda_1}(\lambda) = \frac{1}{B(p,q)} (\lambda_1-\lambda_0)^{1-p-q} (\lambda-\lambda_0)^{p-1} (\lambda_1-\lambda)^{q-1}, \tag{I 16}$$

und die Momente

$$\alpha_k = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}[\lambda_0+(\lambda_1-\lambda_0)v]^k dv = \frac{\lambda_0^k}{B(p,q)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_0}\right)^j B(p+j,q)$$

oder mit (12)

$$\alpha_k = \lambda_0^k F[-k, p; p+q; (\lambda_0-\lambda_1)/\lambda_0] \tag{I 17}$$

besitzt.

Die transformierte cF lautet

$$\varphi(t) = e^{it\lambda_0} {}_1F_1[p; p+q; it(\lambda_1-\lambda_0)]$$

Mit Hilfe dieser Verteilung lassen sich die Formeln (I 14) und folgende verallgemeinern

$$\begin{aligned} W_r &= \frac{1}{B(p,q)} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^r}{r!} \int_0^1 e^{-v(\lambda_1-\lambda_0)} v^{p-1} (1-v)^{q-1} \left(1+v\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_0}\right)^r dv \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^r}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \left(\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_0}\right)^j \frac{\Gamma(p+j)}{\Gamma(p+q+j)} {}_1F_1(p+j; p+q+j; \lambda_0-\lambda_1) \end{aligned} \tag{I 18}$$

$$E_W(z) = e^{\lambda_0(z-1)} {}_1F_1[p; p+q; (\lambda_1-\lambda_0)(z-1)] \tag{I 19}$$

und schließlich

$$\mu_W = \lambda_0 + (\lambda_1-\lambda_0)\frac{p}{p+q}, \quad \sigma_W^2 = (\lambda_1-\lambda_0)^2 \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} + \lambda_0 + (\lambda_1-\lambda_0)\frac{p}{p+q}$$

Einfacher werden die Ausdrücke im Spezialfall $\lambda_0 = 0$, den *Quinkert* [60] im Rahmen der kollektiven Risikotheorie näher untersucht hat. Hier ist

$$W_r = \frac{\lambda_1^r}{r!} \frac{B(p+r, q)}{B(p, q)} \, {}_1F_1(r + p; r + p + q; -\lambda_1) \tag{I 20}$$

und

$$E_W(z) = {}_1F_1[p; p + q; \lambda_1(z - 1)] \tag{I 21}$$

Ersetzt man in (I 16) den Parameter q durch $\lambda_1 q$ und läßt hernach $\lambda_1 \to \infty$ streben, so geht (I 16) in (I 11) über:

$$\beta_{\lambda_0, \lambda_1}(p, \lambda_1 q; \lambda) \xrightarrow[\lambda_1 \to \infty]{} \gamma_{\lambda_0}(p, q; \lambda) \tag{I 22}$$

Derselbe Grenzübergang läßt sich für die Wahrscheinlichkeiten W_r vollziehen, (I 18) strebt nach (I 13). Man kann das auch direkt zeigen, z. B. bedeutet es für $\lambda_0 = 0$

$$\lim_{\lambda_1 \to \infty} {}_1F_1[p; p + q\lambda_1; \lambda_1(z - 1)] = \lim_{\lambda_1 \to \infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p + q\lambda_1)}{\Gamma(p + q\lambda_1 + r)} \frac{[\lambda_1(z-1)]^r}{r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)} \frac{1}{r!} \left[\frac{1}{q}(z - 1)\right]^r = \left[1 + \frac{1}{q}(1 - z)\right]^{-p} \tag{I 23}$$

C. Die Beta-Verteilung 2. Art.

Die Vd (60) erweist sich für unseren Zweck als wenig geeignet. Wir verzichten daher darauf, außer dem üblichen Definitionsintervall $0 < x < \infty$ beschränkte Intervalle zu prüfen. Es sei immerhin darauf hingewiesen, daß die Vd auch dreiparametrig

$$\beta_2(x) = \frac{r^q}{B(p, q)} \frac{x^{p-1}}{(x + r)^{p+q}}, \quad 0 < x < \infty \tag{I 24}$$

gegeben werden kann.
Die allgemeine Formel (I 7) geht mit (60) in

$$W_r = \frac{1}{r!} \frac{1}{B(p, q)} \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^{p+r-1}}{(\lambda + 1)^{p+q}} \, d\lambda$$

über. Das Integral ist nicht elementar lösbar, doch kann zur Darstellung der Lösung die Integralformel (18) verwendet werden. Man findet so

$$W_r = e^{1/2} \frac{1}{r!} \frac{\Gamma(p+r)}{B(p, q)} W_{(1-2p-q-r)/2,\, (r-q)/2}(1) \tag{I 25}$$

$$E_W(z) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} e^{(1-z)/2} (1 - z)^{(q-1)/2} W_{(1-2p-q)/2,\, -q/2}(1 - z), \quad |z| < 1$$

$$\mu_W = \frac{p}{q-1}, \quad \sigma_W^2 = \frac{p}{(q-1)^2(q-2)} [(q - 1)^2 + p + 1] \tag{I 26}$$

D. Die Typ V-Verteilung.

Einfach ist hingegen die Vd (58) zu handhaben, sofern man sich Formel (23) merkt.

$$W_r = \frac{1}{r!} \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda - (a/\lambda)} \lambda^{r-\alpha-1} \, d\lambda = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \frac{a^{(r+\alpha)/2}}{r!} K_{\alpha-r}(2\sqrt{a}) \tag{I 27}$$

und

$$E_W(z) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} [a(1-z)]^{\alpha/2} K_\alpha[2\sqrt{a(1-z)}], \quad |z| < 1$$

Auf die Momente von $\{W_r\}$ überträgt sich, wie übrigens auch auf (I 26), derselbe Vorbehalt, der in (59) geäußert wird. Der Mittelwert existiert also nur bei $\alpha > 1$, die Streuung bei $\alpha > 2$ usw. Darin liegt ein Nachteil der Verwendung dieser Funktionen.

$$\mu_W = \frac{a}{\alpha - 1}, \quad \sigma_W^2 = \frac{a}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} [a + (\alpha-1)(\alpha-2)] \tag{I 28}$$

Die verschobene Dichte

$$f_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\lambda - \lambda_0)^{-(\alpha+1)} e^{-a/(\lambda-\lambda_0)}, \quad \lambda > \lambda_0 \tag{I 29}$$

kann ganz analog zu (I 11) behandelt werden. An die Stelle von (I 27) tritt schließlich eine endliche Summe von Besselfunktionen:

$$W_r = 2\frac{a^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^r}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (\sqrt{a}/\lambda_0)^j K_{\alpha-j}(2\sqrt{a})$$

Zu den Momenten (I 28) kommt neu der Summand λ_0 hinzu.

E. Die logarithmische Normalverteilung.

Die Anwendung der Verteilung (47) bzw. der verschobenen Form

$$l_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{1}{\sigma_N\sqrt{2\pi}(\lambda-\lambda_0)} e^{-[\log(\lambda-\lambda_0)-\mu_N]^2/2\sigma_N^2}, \quad \lambda > \lambda_0 \tag{I 30}$$

$$\left[\text{Momente: } \alpha_k = \lambda_0^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{\delta}{\lambda_0}\right)^j \theta^{j^2}\right]$$

als Strukturdichte hat den Nachteil, daß die daraus hervorgehende Schadenverteilung

$$W_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta^r}{r!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta e^{\sigma_N u} + r\sigma_N u - (u^2/2)} du$$

zu einem nur schwer verwertbaren Integral führt. Es soll daher nicht weiter darauf eingegangen werden. Momente sind natürlich wieder leicht ableitbar.

F. Die gestutzte Normalverteilung.

Alle bisher in $0 < \lambda < \infty$ definierten Strukturfunktionen hatten in ihrer allgemeinen Form die Eigenschaft, daß mit $\lambda \to 0$ auch $s(\lambda) \to 0$ strebte. Es mag nun in gewissen Fällen wünschenswert sein, eine Vd zu benützen, der diese Besonderheit abgeht. Eine Möglichkeit wäre implizit schon in A. enthalten, wo man speziell statt $\gamma(\lambda)$ die Vd (57) verwenden könnte. Diese Form ist aber nurmehr einparametrig und zudem monoton fallend. Zweckmäßigere Dienste scheint die im Nullpunkt gestutzte Normalverteilung (62) zu leisten (übrigens könnte man auch hier eine Stutzung im Punkt λ_0 ins Auge fassen), nicht zuletzt deswegen, weil über die Schätzung ihrer Parameter genaue Kenntnis herrscht [43].

Mit (62) ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W_r = \frac{1}{1-N(0)} \frac{1}{r!\,\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^r e^{-1/2\left(\frac{\lambda-\mu}{\sigma}\right)^2} d\lambda$$

oder nach einigen einfachen Umformungen

$$W_r = \frac{\sigma^r}{r!} \frac{e^{-\mu+1/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}[1-N(0)]} \int_A^\infty (u-A)^r e^{-1/2 u^2} du, \qquad \text{(I 31)}$$

wobei zur Abkürzung $-(\mu/\sigma)+\sigma = A$ gesetzt wurde.
Für das Integral

$$I_r = \int_A^\infty (u-A)^r e^{-1/2 u^2} du = \int_0^\infty u^r e^{-1/2(u+A)^2} du$$

läßt sich durch partielle Integration die Rekursionsformel

$$I_r = -A\,I_{r-1} + (r-1)\,I_{r-2}, \qquad r = 2, 3 \ldots$$

mit

$$I_0 = \sqrt{2\pi}[1-\Phi(A)], I_1 = e^{-1/2 A^2} - \sqrt{2\pi}\,A\,[1-\Phi(A)]$$

herleiten, woraus sich die Integrale und nach

$$\frac{W_{r+1}}{W_r} = \frac{\sigma}{r+1} \frac{I_{r+1}}{I_r}$$

auch die Wahrscheinlichkeiten rekursiv berechnen lassen.
Eine explizite Lösung ist durch Entwicklung von $(u-A)^r$ erhältlich:

$$I_r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-A)^{r-j} \int_A^\infty u^j e^{-1/2 u^2} du = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-A)^{r-j}\, 2^{(j-1)/2} \left[\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right) - \Gamma_{A^2/2}\left(\frac{j+1}{2}\right)\right]$$

Also ist

$$W_r = \frac{e^{-\mu+1/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}[1-N(0)]} \frac{\sigma^r}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-A)^{r-j}\, 2^{(j-1)/2} \left[\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right) - \Gamma_{A^2/2}\left(\frac{j+1}{2}\right)\right] \qquad \text{(I 32)}$$

Unter Zuhilfenahme von (I 10) und (64) ergibt sich für die eF

$$E_W(z) = \frac{1}{1-N(0)} e^{\mu(z-1)+1/2\sigma^2(z-1)^2} [1-\Phi(A-\sigma z)],$$

für die Momente

$$\mu_W = \mu + \sigma^2 \varkappa, \quad \sigma_W^2 = \sigma^2(1-\mu_W \varkappa) + \mu_W,$$

wobei $\varkappa$ in (63) definiert ist.
Besonders einfach gestaltet sich die Verteilung im Fall $A = 0$, d. h. $\mu = \sigma^2$, was allerdings die Parameteranzahl um 1 reduziert (gestutzte Normalverteilung mit Mittelwert = Streuung):

$$W_r = \frac{\varkappa}{2} (2\mu)^{(r+1)/2} \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{r!}$$

Rekursionsformel:

$$W_{r+1} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}\, 2^{r+1} \frac{[(r/2)!]^2}{(r+1)!} W_r$$

Momente:

$$\mu_W = (1+\varkappa)\mu\,, \quad \sigma_W^2 = \mu[1 + (1+\varkappa)(1-\mu\varkappa)]$$

Die Wahrscheinlichkeiten fallen für $\mu < \pi/2$ monoton, andernfalls ist die Kurve der W_r von glockenförmigem Typus. Im allgemeinen Fall ist kein so einfaches Kriterium aufstellbar.

1.2.4 Die Binomialverteilung als Grundverteilung

Wiewohl wenig üblich, kommt nach 1.1 auch die Binomialverteilung als Grundverteilung in Frage. Diese hat zwei Parameter, p und n. Eine stochastische Variation der ganzen Zahl n scheint im Vergleich zu p weniger sinnvoll zu sein, soll aber, da dadurch die mittlere Unfallzahl np beeinflußt wird, ebenfalls kurz untersucht werden.

A. Variation von p.

Da p nur im Einheitsintervall definiert ist, drängt sich als Strukturfunktion von vornherein die Vf mit der Dichte (50) auf. Auf Grund der Ausführungen im letzten Paragraphen könnte man zwar auch kleinere Intervalle in Betracht ziehen; es soll hier aber darauf verzichtet werden, auf solche Verallgemeinerungen einzugehen.
Die aus (I 3) hervorgehende allgemeine Formel

$$W_r = \binom{n}{r} \int_{B_p} p^r (1-p)^{n-r}\, dS(p) \tag{I 33}$$

kann man analog als zusammengesetzte Binomialverteilung bezeichnen. Ihre eF hat die Form

$$E_W(z) = \int_{B_p} [1 + p(z-1)]^n\, dS(p)\,, \tag{I 34}$$

während die (I 8) entsprechende Beziehung zwischen den Momenten der neuen und alten Verteilung sich hier mit Hilfe von (I 4) und (32) folgendermaßen schreiben läßt:

$$_W\alpha_{[k]} = n(n-1)\ldots(n-k+1)\, _S\alpha_k$$

$$\mu_W = n\mu_S\,, \quad \sigma_W^2 = n(n-1)\sigma_S^2 + n(\mu_S - \mu_S^2)$$

Führt man (50) in diese allgemeinen Resultate ein, wobei, um Verwechslungen zu vermeiden, die Parameter der Verteilung im folgenden mit P, Q bezeichnet seien, so ergibt sich

$$W_r = \binom{n}{r} \frac{B(r+P, n-r+Q)}{B(P,Q)}\,, \quad 0 \leqq r \leqq n \tag{I 35}$$

$$= \binom{P+Q-1}{P} \frac{P}{r+P} \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n+P+Q-1}{n-r+Q-1}}$$

Mittelwert und Streuung lauten

$$\mu_W = n\frac{P}{P+Q}, \quad \sigma_W^2 = \frac{nPQ(n+P+Q)}{(P+Q)^2(P+Q+1)},$$

während zur Herleitung der eF auf (11) verwiesen wird.

$$E_W(z) = F(-n, P; P+Q; 1-z) \tag{I 36}$$

Wir benützen die eF, um einige interessante Spezialfälle anzugeben; das ist hier besonders elegant möglich, doch kann man analoge Fälle ohne weiteres auch in 1.2.3 betrachten.

1. $P = Q = 1$, d. h. $S(p) \equiv 1$ Gleichverteilung

$$E_W(z) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{(z-1)^r}{r+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n+1}{r+1}(z-1)^r = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n} z^r$$

Diskrete Gleichverteilung mit $W_r = (n+1)^{-1}$, $0 \leqq r \leqq n$ (I 37)

2. $P \to \infty$: $E_W(z) = z^n$

$Q \to \infty$: $E_W(z) = 1$ degenerierte Verteilungen

3. $P \to \infty$ und $Q \to \infty$ mit $P/Q = p/q$

$$\frac{\Gamma(P+r)}{\Gamma(P)}\frac{\Gamma(P+Q)}{\Gamma(P+Q+r)} \to p^r \quad \text{nach (3)}$$

$$E_W(z) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[p(z-1)]^r = [1+p(z-1)]^n$$ Ausgangsverteilung ohne Schwankung

4. $n \to \infty$ und $Q \to \infty$ mit $n/Q = 1/a$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-r+1)}\frac{\Gamma(P+Q)}{\Gamma(P+Q+r)} \to (1/a)^r \quad \text{wieder nach (3)}$$

$$E_W(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(P+r)}{\Gamma(P)}\frac{1}{r!}\left(\frac{z-1}{a}\right)^r = \left[1-\frac{1}{a}(z-1)\right]^{-P}$$ negative Binomialverteilung

Das Entstehen einer negativen Binomialverteilung kann also auch auf diese Weise (siehe 1.2.3 A) interpretiert werden.

5. $n \to \infty$, $P \to \infty$ und $Q \to \infty$ mit $\begin{matrix} n/Q \to 0 \\ P/Q \to 0 \end{matrix}$ und $(P/Q)n = \lambda$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-r+1)}\frac{\Gamma(P+r)}{\Gamma(P)}\frac{\Gamma(P+Q)}{\Gamma(P+Q+r)} \to \lambda^r$$

$$E_W(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{[\lambda(z-1)]^r}{r!} = e^{\lambda(z-1)}$$ P-Verteilung

B. Variation von n (und p).

Zur Variation von n kommt natürlich nur eine diskrete Vf in Frage. (I 33) und (I 34) lassen sich dann so umschreiben:

$$W_r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} s_n \tag{I 38}$$

$$E_W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + p(z-1)]^n s_n,$$

wobei die s_n die Wahrscheinlichkeiten der diskreten Strukturfunktion ausdrücken.

$$\mu_W = p\mu_S, \quad \sigma_W^2 = p(p\sigma_S^2 + q\mu_S)$$

1. Beispiel: n P-verteilt.

$$E_W(z) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\lambda[1 + p(z-1)]\}^n}{n!} = e^{\lambda p(z-1)}, \quad \text{P-Verteilung mit Parameter } \lambda p \tag{I 39}$$

Eine P-Verteilung kann also auch durch *stochastische Variation von n entstehen.* Lassen wir nun noch p schwanken, so folgt nach 1.2.3 B

$$E_W(z) = {}_1F_1[P; P + Q; \lambda(z-1)], \tag{I 40}$$

was augenscheinlich mit (I 21) übereinstimmt, wenn dort die obere Schwankungsgrenze $\lambda_1 = \lambda$ gesetzt wird. In der Bezeichnungsweise von *Gurland* [41] läßt sich diese Tatsache durch

$$\text{Binomial} \underset{n}{\wedge} \text{Poisson} \underset{p}{\wedge} \text{Beta}_1 \sim \text{Poisson} \wedge \text{Beta}_\lambda$$

ausdrücken.

Eine Variation von λ in (I 39) ergibt gegenüber 1.2.3 nichts wesentlich Neues.

2. Beispiel: n geometrisch verteilt.

$$E_W(z) = \frac{1}{a+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{[1 + p(z-1)] \frac{a}{a+1}\right\}^n = \frac{1}{1 - ap(z-1)}, \quad \text{geom. Verteilung mit Parameter } ap \tag{I 41}$$

Da schon das erste Beispiel das gleiche Verhalten zeigte, scheint es angebracht, sich *nach der allgemeinen Bedingung dafür zu erkundigen.* Aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 + p(z-1)]^n s_n(C) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n s_n(Cp)$$

folgt durch Entwicklung von $[1 + p(z-1)]^n$ nach Potenzen von z und Vergleich der Potenzen k-ter Ordnung auf beiden Seiten:

$$p^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} (1-p)^n s_{k+n}(C) = s_k(Cp)$$

Beide Beispiele erfüllen diese Bedingung, sie gilt aber nicht allgemein.

Anderseits sei in (I 41) p gemäß β_1 variiert. Mit Hilfe der Integraldarstellung (11) erhält man in diesem Fall die dreiparametrige Verteilung

$$E_W(z) = F[1, P; P+Q; a(z-1)] \tag{I 42}$$

$$W_r = \lambda^r \frac{B(r+P, Q)}{B(P, Q)} F(r+1, r+P; r+P+Q; -a),$$

deren erste Momente [z. B. mit (10)]

$$\mu_W = \frac{P}{P+Q} a, \quad \sigma_W^2 = \frac{P}{P+Q} a \left[\frac{2a(P+1)}{P+Q+1} - \frac{Pa}{P+Q} + 1\right]$$

lauten.

Statt der Variation von p könnte man in (I 41) auch eine Variation von a vornehmen. Da a im allgemeinen Werte zwischen 0 und ∞ annimmt, sei ein Versuch mit der gewöhnlichen Γ-Verteilung unternommen. Allerdings muß dabei schon die recht komplizierte Funktion (17) zu Hilfe gezogen werden. (Zur besseren Unterscheidung sind die Parameter der Γ-Verteilung für den Moment mit A, α benannt.)

$$W_r = e^{A/2p} (A/p)^{\alpha/2} \frac{\Gamma(r+A)}{\Gamma(A)} W_{-r-(\alpha/2), (\alpha-1)/2} (A/p)$$

und

$$E_W(z) = e^{\frac{A}{2p(1-z)}} \left[\frac{A}{p(1-z)}\right]^{\alpha/2} W_{-\alpha/2, (\alpha-1)/2} \left[\frac{A}{p(1-z)}\right], \quad |z| < 1$$

Zum Schluß sei noch die Bemerkung erlaubt, daß die in beiden Beispielen durchgeführte Variation von n und p geradesogut in umgekehrter Reihenfolge hätte vorgenommen werden können. Der zweite Weg ist viel komplizierter. Es lassen sich auf diese Weise jedoch mit Hilfe der schon bekannten Formeln als Nebenprodukt verschiedene Reihendarstellungen hypergeometrischer Funktionen gewinnen.

Zum Beispiel aus (I 36) und (I 40)

$$e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} F(-n, P; P+Q; 1-z) \frac{\lambda^n}{n!} = {}_1F_1[P; P+Q; \lambda(z-1)]$$

oder aus (I 36) und (I 42)

$$\frac{1}{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} F(-n, P; P+Q; 1-z) \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n = F[1, P; P+Q; \lambda(z-1)]$$

1.3 Modelle für abhängige Ereignisse I: Kollektivschäden

Neben der Bedingung (A) von 1.1, deren Vernachlässigung in 1.2 eingehend untersucht wurde, ist die Bedingung (B) für das Vorhandensein einer reinen Zufallsverteilung von maßgebender Bedeutung. In diesem und dem nächsten Paragraphen werden zwei wichtige Möglichkeiten diskutiert, diese starke Einschränkung zu lockern. Die Einführung des sog. Kumulrisikos erzeugt das eine Modell. Das Problem sei am Beispiel der Unfallversicherung erläutert. Dabei nehmen wir in diesem Abschnitt die kollektive Betrachtungsweise an, der andere Gesichtspunkt ergibt für das folgende wenig Sinn.

Bei der Herleitung der reinen Zufallsverteilung unterscheidet man nicht zwischen den Begriffen Ereignis und Schadenfall. Jeder Schadenfall wird dort als unabhängiges Ereignis aufgefaßt. In der Praxis kommt es aber häufig vor, daß ein Ereignis nicht nur einen Schaden, sondern mehrere verursacht. Bei einem Unfall können 1, 2, 3 ... Personen verletzt werden. Diese Schadenfälle (Kollektivschäden) sind natürlich wesentlich voneinander abhängig. Trifft man für die ursächlichen Ereignisse die Annahme des reinen Zufalls, so stellt sich die Frage, ob die Verteilung der Schäden (bzw. im Beispiel die Verteilung der total verunfallten Personen) einem anderen Gesetz folge, und wenn ja, welchem. Überwiegen in der Statistik die „Einerunfälle" stark, so wird man vermuten, das Kumulrisiko sei vernachlässigbar, doch muß diese Behauptung von Fall zu Fall mit Hilfe eines Tests nachgeprüft werden. In speziellen Versicherungszweigen, besonders ausgeprägt in der Hagelversicherung, wird der Kollektivschaden das übliche Ereignis sein.
Im folgenden wird zuerst ein allgemeines Modell besprochen, das verschiedene Beispiele illustrieren. Im 3. Teil bildet das *Bernoulli*-Urnenschema den Ausgangspunkt der Betrachtung; Zusammenhänge mit 1. 3. 1 sind einfacher Natur.

1.3.1 Ein allgemeines Kollektivschadenmodell

Bei einem Unfall können, wie erwähnt, $j\,(j = 1, 2, 3 \ldots)$ Personen zu Schaden kommen. Man beachte, daß in diesem Sinne die Möglichkeit $j = o$ nicht als Unfall taxiert wird. Die Wahrscheinlichkeit eines „j-Unfalles" werde mit f_j bezeichnet. $\{f_j\}$ ist eine diskrete Verteilung, die für $j \geqq 1$ definiert ist, $f_0 = o$ nach Voraussetzung. Die Verteilung der Anzahl der Unfallereignisse sei wie in 1. 1 durch $\{P_r\}$ ausgedrückt, wobei für P_r Formel (30) oder (33) in Frage kommen. Aus $\{f_j\}$ und $\{P_r\}$ läßt sich, Unabhängigkeit der Variablen vorausgesetzt, die Verteilung der total eingetretenen Schadenfälle auf einfache Weise mit Hilfe des Faltungsbegriffes zusammensetzen. Dabei ist zu beachten, daß

$$W(k \text{ Schäden bei } n \text{ Unfällen}, k < n) = o, \tag{I 43}$$

da bei n Unfällen nach Voraussetzung mindestens n Schäden eintreten müssen. Bei s Unfällen lautet auf Grund der Definition von f_j die Formel für die Wahrscheinlichkeit von r sich ereignenden Schadenfällen

$$f_r^{*s} = \sum_{i+j=r} f_i^{*(s-1)} f_j,$$

wobei nach (I 43) $\qquad f_r^{*s} = o, \quad \text{sobald } s > r.$

(Die Summation erstreckt sich demgemäß in Wirklichkeit nur von s — 1 bis r — 1.)

Zudem gilt $\qquad f_r^{*1} = f_r \text{ und } f_r^{*r} = f_1^r$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung wird damit

$$W_r = \sum_{k=0}^{r} P_k f_r^{*k}\,, \tag{I 44}$$

wobei sinngemäß $f_r^{*o} = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \neq 0 \end{cases}$ zu setzen ist.
Man erhält so

$$
\begin{aligned}
W_0 &= P_0 \\
W_1 &= P_1 f_1 \\
W_2 &= P_1 f_2 + P_2 f_2^{*2} = P_1 f_2 + P_2 f_1^2 \\
W_3 &= P_1 f_3 + P_2 f_3^{*2} + P_3 f_3^{*3} = P_1 f_3 + 2 P_2 f_1 f_2 + P_3 f_1^3 \\
&\;\;\vdots \\
W_n &= P_1 f_n + P_2 f_n^{*2} + \ldots + P_n f_1^n
\end{aligned}
$$

Die ersten Momente der Verteilung sind

$$\mu_W = \mu_P \mu_f, \quad \sigma_W^2 = \mu_P \sigma_f^2 + \mu_f^2 \sigma_P^2, \tag{I 45}$$

während die eF durch

$$E_W(z) = E_P[E_f(z)] \tag{I 46}$$

dargestellt werden kann.
Einen allgemeinen Zusammenhang zwischen den Momenten der 3 Verteilungen liefert die Formel von *Faà de Bruno* für die n-te Ableitung der Funktion einer Funktion $f[g(x)]$:

$$\frac{d^n}{dx^n} f[g(x)] = \sum_{j=0}^{n} \sum_{(k_i)} \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \left[\frac{g'(x)}{1!}\right]^{k_1} \cdots \left[\frac{g^{(n)}(x)}{n!}\right]^{k_n} \frac{d^j f}{du^j}\bigg|_{u=g(x)}, \tag{I 47}$$

wobei die Summation (k_i) für alle Indizes mit

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = j \text{ und } \sum_{i=1}^{n} i\, k_i = n$$

gelten soll. Angewendet auf (I 46) ergibt sich

$${}_W\alpha_{[n]} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{(k_i)} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \left[\frac{{}_f\alpha_{[1]}}{1!}\right]^{k_1} \cdots \left[\frac{{}_f\alpha_{[n]}}{n!}\right]^{k_n} {}_P\alpha_{[j]} \tag{I 48}$$

Mit (33) entsteht eine sog. verallgemeinerte P-Verteilung, die durch

$$W_r = e^{-\lambda} \sum_k \frac{\lambda^k}{k!} f_r^{*k} \tag{I 49}$$

$$E_W(z) = e^{\lambda[E_f(z) - 1]} \tag{I 50}$$

$$\mu_W = \lambda \mu_f, \quad \sigma_W^2 = \lambda(\sigma_f^2 + \mu_f^2) = \lambda\, {}_f\alpha_2 \tag{I 51}$$

charakterisiert ist. Der Quotient

$${}_f\alpha_2 / \mu_f = \sigma_W^2 / \mu_W \tag{I 52}$$

gibt ein Maß für die Abweichung der Kollektivschadenverteilung von der gewöhnlichen P-Verteilung. Setzt man für P_k in (I 44) hingegen (30) ein, so lauten die entsprechenden Formeln

$$W_r = q^n \sum_k \binom{n}{k} (p/q)^k f_r^{*k}, \quad o \leqq r \leqq n \tag{I 53}$$

$$E_W(z) = [p\, E_f(z) + q]^n$$

$$\mu_W = n p \mu_f, \quad \sigma_W^2 = n p (\sigma_f^2 + q \mu_f^2)$$

1.3.2 Verschiedene Beispiele

Die empirische Verteilung der Schadenanzahl eines Unfallereignisses ist häufig so beschaffen, daß sie für $r = 1$ eine ausgeprägte Spitze aufweist und dann rasch absinkt. Diese Eigenschaft tritt umso deutlicher zutage, je mehr der Idealfall

$$f_r = \begin{cases} 1 & r = 1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases},$$

d.h. keine Kollektivschäden, erreicht wird. Einfache monoton fallende Verteilungen, die als Modelle Verwendung finden können, sind (A) die geometrische Verteilung (36) und (B) die logarithmische Verteilung (43). Die Poisson-Verteilung (C) ist je nach dem Wert des Parameters monoton fallend oder vom Glockentypus, also nicht an obige Eigenschaft gebunden. Es ist natürlich nicht zu übersehen, daß einparametrige Verteilungen der empirischen Statistik oft nicht in genügender Weise gerecht werden können. In (D), (E) werden mit der Binomial- und negativen Binomialverteilung zwei wichtige zweiparametrige Verteilungen vorgeschlagen, während (F) eine in die gleiche Richtung zielende Bemerkung enthält. Um im folgenden nicht zu weitschweifig zu werden, verzichten wir auf die Angabe der Formeln für die Verteilung (I 53) und beschränken uns auf die verallgemeinerte P-Verteilung.

A. $\{f_r\}$ geometrische Verteilung.

Die k-fache Faltung der geometrischen Verteilung mit sich selbst führt bekanntlich zur speziellen negativen Binomialverteilung

$$f_r^{*k} = (1 - A)^k A^{r-k} \binom{r-1}{k-1}, \quad r \geqq k$$

So erhält man

$$W_r = e^{-\lambda} A^r \sum_{k=0}^{r} \binom{r-1}{k-1} \frac{1}{k!} \left(\lambda \frac{1-A}{A}\right)^k \tag{I 54}$$

Die konfluente hypergeometrische Funktion (13) erlaubt eine zweite Darstellung. Für $r \geqq 1$ ist

$$W_r = e^{-\lambda} \lambda A^{r-1} (1 - A) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r-j)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(j+2)} \frac{1}{j!} \left(\lambda \frac{1-A}{A}\right)^j ,$$

somit

$$W_0 = e^{-\lambda}$$

$$W_r = W_0 \lambda (1 - A) A^{r-1} {}_1F_1[1 - r; 2; \lambda(1 - A)/A], \quad r \geqq 1$$

Auf Grund von [59] wird die Verteilung *Pólya/Aeppli*-Verteilung genannt. Ihre eF gewinnt man aus (I 50) und (37)

$$E_W(z) = e^{-\lambda(1-z)/(1-Az)} \tag{I 55}$$

Momente: $\mu_W = \lambda/(1 - A) = \lambda(a + 1)$

$$\sigma_W^2 = \lambda(A + 1)/(1 - A)^2 = \lambda(a + 1)(2a + 1), \tag{I 56}$$

wenn a nach (39) eingeführt wird.

Unter Benützung von (I 48), (35) und (38) läßt sich als allgemeine Momentenrelation

$$w\alpha_{[n]} = \left(\frac{A}{1-A}\right)^n \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{A}\right)^j \sum_{(k_i)} \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}, \quad n \geqq 1$$

aufstellen, die sich, wenn man bedenkt, daß der komplizierte Ausdruck $\sum\limits_{(k_i)} \frac{j!}{k_1!\ldots k_n!}$ nichts anderes als den Binomial-Koeffizienten $\binom{n-1}{j-1}$ darstellt *), einfacher durch

$$w\alpha_{[n]} = \left(\frac{A}{1-A}\right)^n n! \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} \frac{(\lambda/A)^j}{j!}, \quad n \geqq 1$$

ausdrückt.

B. $\{f_r\}$ logarithmische Verteilung.

Man geht hier besser direkt von der eF aus. (44) kann umgeformt werden in

$$E_f(z) = 1 + \frac{\log[(1-pz)/q]}{\log q},$$

so daß als Resultat

$$E_W(z) = [(1-pz)/q]^{\lambda/\log q} \tag{I 57}$$

herausschaut. Das ist die eF einer negativen Binomialverteilung, deren Parameter mit den üblichen in (41) durch die Beziehungen $a = q/p$ und $\alpha = \lambda/\log(1/q)$ verknüpft sind.

Dadurch ergibt sich für W_r und die Momente

$$W_r = e^{-\lambda} \binom{r + [\lambda/\log(1/q)] - 1}{r} p^r \tag{I 58}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_W &= \frac{\lambda p}{q} \frac{1}{\log(1/q)} = \frac{\lambda a}{\log(a+1)} \\ \sigma_W^2 &= \frac{\lambda p}{q}\left(\frac{p}{q}+1\right)\frac{1}{\log(1/q)} = \frac{\lambda a(a+1)}{\log(a+1)}, \end{aligned}\right. \tag{I 59}$$

wenn wieder ähnlich wie bei (39) $p = a/(a+1)$ gesetzt wird.

---

*) Beweis: Nach dem Polynomialtheorem, angewendet auf $x_1 = z, \quad x_2 = z^2, \quad \ldots, \quad x_n = z^n$, gilt die Beziehung

$$\sum_{\substack{k_1\ldots k_n \\ \text{mit } \sum k_i = j}} \frac{j!}{k_1!\ldots k_n!} z^{\sum i k_i} = (z + z^2 + \cdots + z^n)^j = z^j \left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)^j$$

Der Koeffizient von z^n genügt beiden Nebenbedingungen, d. h.

$$\sum_{(k_i)} \frac{j!}{k_1!\ldots k_n!} = \text{Koeff. von } z^n \text{ in } z^j \left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)^j = \text{Koeff. von } z^n \text{ in } \left(\frac{z}{1-z}\right)^j$$

Da aber $\left(\frac{z}{1-z}\right)^j = \sum\limits_{v=0}^{\infty} \binom{j+v-1}{j-1} z^{v+j}$, folgt unmittelbar die ausgesprochene Behauptung.

Die Tatsache, daß die negative Binomialverteilung auch auf diesem Wege in Erscheinung tritt, drückt sich in der *Gurland*schen Schreibweise [41] durch

$$\text{Poisson} \wedge \text{Gamma} \sim \text{Poisson} \vee \text{Logarithmisch} \tag{I 60}$$

aus.
Leitet man in (I 59) Zähler und Nenner getrennt nach dem Parameter a ab, so erhält man $\lambda(a + 1)$ bzw. $\lambda(a + 1)(2a + 1)$, d.h. formal dieselben Formeln wie in (I 56), was die Tatsache bestätigt, daß die beiden Verteilungen in A. und B. für kleine Parameterwerte nicht wesentlich voneinander abweichen.

C. $\{f_r\}$ P-Verteilung.

Da die Verteilung $\{f_r\}$ für $r = 1, 2 \ldots$ definiert sein soll, muß die P-Verteilung diesem Intervall angepaßt werden. Das ist auf zwei Arten möglich:

(1) durch Verschiebung $$f_r = e^{-c}\frac{c^{r-1}}{(r-1)!}, \quad r = 1, 2 \ldots \tag{I 61}$$

(2) durch Stutzung $$f_r = \frac{e^{-c}}{1-e^{-c}}\frac{c^r}{r!}, \quad r = 1, 2 \ldots \tag{I 62}$$

Aus (I 61) folgt sofort

$$f_r^{*k} = e^{-kc}\frac{(kc)^{r-k}}{(r-k)!}, \quad r \geqq k$$

und damit

$$W_r = e^{-\lambda}\frac{c^r}{r!}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}k^r\left(\frac{\lambda e^{-c}}{ck}\right)^k \tag{I 63}$$

Die eF dieser Verteilung geht über

$$E_f(z) = z\, e^{c(z-1)}$$

als

$$E_W(z) = e^{-\lambda[1-ze^{-c(1-z)}]} \tag{I 64}$$

hervor.

$$\text{Mittelwert } \mu_W = \lambda(1 + c)$$
$$\text{Streuung } \sigma_W^2 = \lambda(c^2 + 3c + 1)$$

Die Verteilung tritt, allerdings in ganz anderem Zusammenhang, wohl erstmals in [70] auf.
Eng verwandt mit Verteilung (I 63) ist die Verteilung, die auf Grund von (I 62) zur Sprache kommen soll. Die eF von $\{f_r\}$ lautet hier

$$E_f(z) = (e^{cz} - 1)/(e^c - 1)$$

Damit wird

$$E_W(z) = e^{-\frac{\lambda}{1-e^{-c}}[1-e^{-c(1-z)}]} \tag{I 65}$$

Das stellt eine *Neyman* Typ A-Verteilung' dar. Deren übliche Form entsteht dann, wenn in (I 49) die gewöhnliche P-Verteilung $f_r = e^{-c}c^r/r!$, $r = o, 1, 2 \ldots$ eingesetzt wird, was

$$E_W(z) = e^{-\lambda[1-e^{-c(1-z)}]}$$

zur Folge hat. An die Stelle des Parameters λ tritt in (I 65) also der Ausdruck $\lambda/(1-e^{-c})$.

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist demnach wie folgt definiert:

$$W_r = e^{-\lambda/(1-e^{-c})} \frac{c^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^r}{k!} \left(\frac{\lambda}{e^c - 1}\right)^k, \tag{I 66}$$

während die Momente

$$\mu_W = \lambda \frac{c}{1-e^{-c}}, \quad \sigma_W^2 = \lambda \frac{c(c+1)}{1-e^{-c}}$$

lauten.

D. $\{f_r\}$ Binomialverteilung.

Wie bei C. können wieder 2 Fälle unterschieden werden.

$$(1)\ f_r = \binom{n}{r-1} p^{r-1} q^{n-r+1}, \qquad r = 1, 2 \ldots n+1 \tag{I 67}$$

$$(2)\ f_r = \frac{1}{1-q^n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r}, \qquad r = 1, 2 \ldots n \tag{I 68}$$

Die verschobene Binomialverteilung (I 67) hat die eF

$$E_f(z) = z(pz+q)^n,$$

was für $\{W_r\}$ die eF

$$E_W(z) = e^{-\lambda[1-z(pz+q)^n]}$$

nach sich zieht. Deren Momente heißen

$$\mu_W = \lambda(np+1), \quad \sigma_W^2 = \lambda[1 + 3np + n(n-1)p^2]$$

Für die sog. positive Binomialverteilung (I 68) lauten die entsprechenden Formeln

$$E_f(z) = \frac{1}{1-q^n}[(pz+q)^n - q^n]$$

$$E_W(z) = e^{-\frac{\lambda}{1-q^n}[1-(pz+q)^n]}$$

in Analogie zu (I 65).

$$\mu_W = \lambda \frac{np}{1-q^n}, \quad \sigma_W^2 = \lambda \frac{np(np+q)}{1-q^n}$$

E. $\{f_r\}$ negative Binomialverteilung.

$$(1)\ \text{verschoben} \qquad f_r = \binom{\alpha+r-2}{r-1} p^\alpha q^{r-1}, \qquad r = 1, 2 \ldots$$

$$(2)\ \text{gestutzt} \qquad f_r = \frac{1}{1-p^\alpha} \binom{\alpha+r-1}{r} p^\alpha q^r, \quad r = 1, 2 \ldots$$

Genau wie in D. berechnen sich die eF zu

$$E_W(z) = e^{-\lambda\left[1-z\left(\frac{p}{1-qz}\right)^\alpha\right]} \tag{I 69}$$

bzw.

$$E_W(z) = e^{-\frac{\lambda}{1-p^\alpha}\left[1-\left(\frac{p}{1-qz}\right)^\alpha\right]} \tag{I 70}$$

Für $\alpha = 1$ gehen beide Ausdrücke in die eF der *Pólya/Aeppli*-Verteilung (I 55) über. Ihre Verteilungen sind daher mögliche Verallgemeinerungen der Verteilung (I 54). Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und Momente:

$$(1)\quad W_r = e^{-\lambda} q^r \sum_{k=0}^{r} \binom{\alpha k + r - k - 1}{\alpha k - 1} \frac{1}{k!} \left(\frac{p^\alpha \lambda}{q}\right)^k$$

$$\mu_W = \lambda\left(\alpha \frac{q}{p} + 1\right), \quad \sigma_W^2 = \lambda[1 + \alpha \frac{q}{p^2} (1 + \alpha q + 2p)]$$

$$(2)\quad W_r = e^{-\lambda/(1-p^\alpha)} q^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha k + r - 1}{r} \frac{1}{k!} \left(\frac{p^\alpha \lambda}{1 - p^\alpha}\right)^k$$

$$\mu_W = \lambda \frac{\alpha q}{p(1 - p^\alpha)}, \quad \sigma_W^2 = \lambda \frac{\alpha q(1 + \alpha q)}{p^2(1 - p^\alpha)}$$

F. Eine „gemischte“ Verteilung nach *Aitchison.*

Außer dem Übergang auf eine der üblichen zweiparametrigen Verteilungen ist noch eine andere Methode erwähnenswert, die ebenfalls einen zweiten Parameter zuzieht. Sie ist vor allem dann bequem, wenn die „Einerereignisse“ stark überwiegen, im folgenden jedoch ein normaler Abfall stattfindet, der sich gut durch eine einparametrige Vf ausdrücken ließe. Dieser Tatbestand dürfte für die Unfallversicherung nicht selten sein. Die Idee (siehe [1]) ist die folgende:

Es wird vorerst durch die Annahme

$$W(\xi = 1) = \theta$$
$$W(\xi > 1) = 1 - \theta$$

eine diskrete Wahrscheinlichkeit für den Punkt $r = 1$ ausgeschieden. Bezeichne weiter

$$W(\xi = r | \xi > 1) = g_r \ , \quad r = 2, 3 \ldots \ , \quad \sum_{r=2}^{\infty} g_r = 1,$$

die erwähnte einparametrige Wahrscheinlichkeitsverteilung, so kann f_r dargestellt werden als

$$f_r = \begin{cases} \theta & r = 1 \\ (1 - \theta) g_r & r = 2, 3 \ldots \end{cases} \tag{I 71}$$

Die Momente, anders als in [1], wo der Nullpunkt ausgezeichnet war, lauten hier

$$\mu_f = \theta + (1 - \theta) \mu_g, \sigma_f^2 = (1 - \theta) [\theta (\mu_g - 1)^2 + \sigma_g^2]$$

Die eF kann in der Form

$$E_f(z) = z\theta + (1 - \theta) E_g(z)$$

ausgedrückt werden.

Als Beispiel sei die P-Verteilung $g_r = e^{-c} \frac{c^{r-2}}{(r-2)!}$, $r = 2, 3 \ldots$ betrachtet.

$$E_f(z) = z\theta + (1 - \theta) z^2 e^{c(z-1)}$$

$$\mu_f = \theta + (1 - \theta)(c + 2), \quad \sigma_f^2 = (1 - \theta) [\theta (c + 1)^2 + c^2]$$

Setzt man diese Resultate in die allgemeinen Formeln (I 50) und (I 51) ein, so ergibt sich

$$E_W(z) = e^{-\lambda[1 - z\theta - (1-\theta) z^2 e^{c(z-1)}]} \tag{I 72}$$

$$\mu_W = \lambda[c + 2 - \theta(c+1)], \quad \sigma_W^2 = \lambda[1 + (1-\theta)(2c^2 + 4c + 3)]$$

1.3.3 Das verallgemeinerte Bernoulli-Schema für Kollektivschäden

Gegeben sei eine Urne mit $(k + 1)$ verschiedenfarbigen Kugeln bzw. Kugeln, die mit den Ziffern $0, 1, 2 \ldots k$ markiert sind. Deren Anzahlen werden mit N_j, $\sum\limits_{j=0}^{k} N_j = N$, bezeichnet.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in n Zügen (mit Zurücklegen) n_0, $n_1 \ldots n_k$ Kugeln mit den Ziffern $0, 1 \ldots k$ zu ziehen?

(Interpretation: „0-Kugel" = Kein Schadenereignis,
„1-Kugel" = Einerunfall
„2-Kugel" = Doppelunfall ...)

Die Lösung obiger Frage liefert die multinomiale Verteilung. Mit

$$q = N_0/N, \quad p_j = N_j/N, \quad j = 1, 2 \ldots k,$$

$$\text{wobei} \quad q + \sum_{j=1}^{k} p_j = 1, \quad \sum_{j=0}^{k} n_j = n, \quad \text{wird}$$

$$W_{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{\prod\limits_{j=0}^{k} n_j!} q^{n_0} \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j} \tag{I 73}$$

Die Wahrscheinlichkeit von total r Schadenfällen ist, falls höchstens Ereignisse k-facher Natur als möglich angenommen werden, gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der gezogenen Zahlen den Wert r erreicht, d.h.

$$W_r = \sum_{n_1 + 2n_2 + \ldots + kn_k = r} W_{n_1, \ldots, n_k} \tag{I 74}$$

Der analog zu $(30 \to 33)$ durchgeführte Grenzübergang für seltene Ereignisse $n \to \infty$, $p_j \to 0$ mit $np_j = \lambda_j$, $j = 1, 2 \ldots k$, führt (I 73) in

$$W_r = e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j} \sum_{n_1 + \ldots + kn_k = r} \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \ldots \lambda_k^{n_k}}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \tag{I 75}$$

über mit

$$\mu_W = \sum_{j=1}^{k} j \lambda_j$$

$$\sigma_W^2 = \sum_{j=1}^{k} j^2 \lambda_j > \mu_W, \text{ sobald } k > 1.$$

Im Sinne einer Vernachlässigung der oben ausgesprochenen Einschränkung sowie aus rechnerischen Gründen ist es bequemer, in (I 74) oder (I 75) $k \to \infty$ streben zu lassen. (I 75) und seine charakteristischen Größen gehen dann über in

$$W_r = e^{-\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j} \sum_{n_1+\ldots+rn_r=r} \frac{\lambda_1^{n_1}\ldots\lambda_r^{n_r}}{n_1!\ldots n_r!} \qquad \text{(I 76)}$$

$$\mu_W = \sum_{j=1}^{\infty} j\,\lambda_j \qquad \text{(als endlich vorausgesetzt)}$$

$$\sigma_W^2 = \sum_{j=1}^{\infty} j^2\,\lambda_j \qquad \text{(I 77)}$$

und $$E_W(z) = e^{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (z^j - 1)}$$

Das ist die multiple P-Verteilung [65]. Interessant ist, daß sie ohne Benützung einer Raritätsbedingung hergeleitet werden kann [45].
Die unendlich vielen Parameter der Verteilung (I 76) sind für die Praxis, wo diese aus den zur Verfügung stehenden Daten geschätzt werden müssen, ungeeignet. Man behilft sich damit, daß man sie spezifiziert. Als besonders wichtigen Spezialfall findet man hierbei

$$\lambda_j = \alpha\,p_j/j \qquad \text{(I 78)}$$

Diese Reduktion auf die beiden Parameter α und p führt, wie die eF

$$E_W(z) = e^{\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^j}{j}(z^j - 1)} = \left(\frac{1-p}{1-pz}\right)^{\alpha} \qquad \text{(I 79)}$$

zeigt, auf die negative Binomialverteilung. Ein Vergleich mit 1. 3. 2 B. läßt vermuten, daß die beiden Modelle in 1. 3. 1 und 1. 3. 3 unter bestimmten Bedingungen identisch sind. In der Tat gilt der Satz:
Werden die zum vornherein beliebig wählbaren Parameter der Verteilung (I 76) als stochastische Reihe $\lambda_j = \lambda f_j$ aufgefaßt, wobei $\{f_j\}$ das in 1. 3. 1 definierte Verteilungsgesetz bedeutet, so stimmen die beiden Modelle (I 44) und (I 76) miteinander überein.
Aus $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = 1$ folgt zudem, daß $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \lambda$ sein muß.
Der Beweis wird am einfachsten mit Hilfe der eF geführt.
Die Verteilungen in 1. 3. 2 sind daher alle auch in diesem Modell enthalten. Formel (I 76) ist allerdings wenig handlich; man benützt deshalb mit Vorteil das Instrument der eF.
Im Zusammenhang mit (I 76) und (I 78) ist noch zu erwähnen, daß das Modell von *Arfwedson* [11, 2. T.], das ebenfalls die Seltenheitsforderung fallen läßt, in diesem Gesichtspunkt aufgeht.
Statt (I 78) hat *Lüders* in seiner Dissertation [52] eine Reduktion auf drei Parameter mittels

$$\lambda_1 = p_1,\ \lambda_j = (p_2/j)\,p_3^{j-2}, \quad j = 2, 3 \ldots \qquad \text{(I 80)}$$

vorgeschlagen. Er gibt auch die Momente

$$\mu_W = p_1 + \frac{p_2}{1-p_3}, \quad \sigma_W^2 = p_1 + p_2\left[\frac{1}{1-p_3} + \frac{1}{(1-p_3)^2}\right]$$

an, nicht aber die explizite Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Diese kann mit Hilfe der eF sofort ermittelt werden.

$$E_W(z) = e^{p_1(z-1)+p_2 \sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{p_3^{j-2}}{j}(z^j-1)} = e^{p_1(z-1)+(p_2/p_3^2)[-\log(1-p_3z)-p_3z+\log(1-p_3)+p_3]}$$

$$E_W(z) = e^{[p_1-(p_2/p_3)](z-1)} \left(\frac{1-p_3}{1-p_3z}\right)^{p_2/p_3^2} \tag{I 81}$$

Die eF entpuppt sich als Produkt aus der eF einer P-Verteilung mit Parameter $p_1 - (p_2/p_3)$ und der eF einer negativen Binomialverteilung mit den Parametern [nach der Darstellung (41)] $(1 - p_3)/p_3$ und p_2/p_3^2. Die zugehörige Verteilung hat als Faltung dieser beiden Verteilungen die Form

$$W_r = e^{-p_1+(p_2/p_3)}(1-p_3)^{p_2/p_3^2} \sum_{i+j=r} \frac{[p_1-(p_2/p_3)]^i}{i!} \binom{j+(p_2/p_3^2)-1}{j} p_3^j$$

Setzt man an Stelle von *Lüders* Ansatz (I 80)

$$\lambda_1 = p_1, \quad \lambda_j = p_2 p_3^{j-2}, \quad j = 2, 3 \ldots,$$

so folgt in analoger Weise

$$E_W(z) = e^{[p_1-(p_2/p_3)](z-1)} e^{-\frac{p_2}{p_3(1-p_3)} \frac{1-z}{1-p_3 z}},$$

wie auf Grund von (I 81) zu erwarten war. W_r bildet sich durch Faltung einer P-Verteilung und einer *Pólya/Aeppli*-Verteilung.

$$\mu_W = p_1 + \frac{p_2(2-p_3)}{(1-p_3)^2}, \quad \sigma_W^2 = p_1 + \frac{p_2(1+p_3)(4-p_3)}{(1-p_3)^3}$$

Durch entsprechende Spezialisierung der λ_j ist es auf diese Weise möglich, die verschiedensten Modelle zusammenzustellen.

1.4 Modelle für abhängige Ereignisse II: Ansteckung

Mehr als das Kumulrisiko hat seit den Anfängen einer Theorie der Begriff der Ansteckung das Interesse verschiedener Autoren wachgerufen. Ohne vollständig sein zu können, sind in diesem Zusammenhang als Verfasser grundlegender Beiträge vor allem *Greenwood*, *Yule*, *Newbold*, *Eggenberger*, *Pólya*, *Neyman* und *Feller* zu nennen. Die Bezeichnung Ansteckung ist der Theorie der Krankenversicherung (ansteckende Krankheiten, Epidemien) entnommen und wurde zur Behandlung ähnlicher Phänomene auch auf andere Versicherungszweige übertragen. Wie im letzten Abschnitt seien die Grundzüge des Modells an Hand der Unfallversicherung erläutert.

(1) Individuelle Betrachtung.

Zu Beginn der Untersuchung sind die Unfallwahrscheinlichkeiten im Gegensatz zu 1. 2 für alle Individuen gleich groß. Erleidet eine Person einen Unfall, so soll ihre Anfälligkeit für einen weiteren Unfall entweder größer (Annahme: durch den Unfall hat sie ihre frühere Sicherheit eingebüßt, ist ängstlicher, nervöser geworden) oder kleiner (Annahme: der Unfall hat sie gelehrt, sorgfältiger zu werden und besser aufzupassen) werden. Die Kritik an diesem Modell hakt an zwei Punkten ein. Erstens kann man einwenden, die gleiche Behandlung aller Versicherten entspreche nicht den tatsächlichen Begebenheiten, wo des einen Anfälligkeit zunehmen, die eines anderen abnehmen würde, während sich die Fakten pro und contra bei einem dritten vielleicht gerade aufheben. Zweitens wird nach obiger Definition die Anfälligkeit des einzelnen Individuums nach jedem Unfall die gleiche Reaktion zeigen (zu- bzw. abnehmend), in Wirklichkeit dürfte dieses Verhalten je nach Zahl und Schwere der Unfälle variieren. Dieser Tatsache kann allerdings durch eine etwas detailliertere Modellannahme teilweise Rechnung getragen werden.

(2) Kollektive Betrachtung.

Ansteckung bedeutet hier, daß nach dem Eintreffen eines Unfalls die Wahrscheinlichkeit für einen weiteren Unfall des Kollektivs Veränderungen erfährt. Beispielsweise werden nach jedem Unfall geeignete Sicherheitsmaßnahmen (Aufklärung, Flugblätter, Schutzmittel) getroffen, die Anfälligkeit wird geringer; anderseits kann durch unbedachte, unpsychologische Äußerungen eine nervöse Atmosphäre geschaffen werden, die weitere Unfälle begünstigt. In analoger Weise wie oben können auch hier Einwände gegen den etwas mechanischen Aufbau des Modells vorgebracht werden, denen eine gewisse Berechtigung nicht abzusprechen ist.
Wir behandeln die Ansteckungshypothese in Form eines sehr allgemeinen Urnenschemas. Nach dem allgemeinen Teil werden in den folgenden Paragraphen die wichtigsten Spezialfälle untersucht.

1.4.1 Ein allgemeines Ansteckungsmodell

Gegeben sei eine Urne, die R rote und S schwarze Kugeln enthalten möge ($R + S = N$).
Nach Ausführung eines Zuges werde folgendes Verfahren angewendet:
War die Kugel rot, werden $1 + R_r$ rote und S_r schwarze Kugeln zurückgelegt; war die Kugel hingegen schwarz, sollen es R_s rote und $1 + S_s$ schwarze sein.
Dieses Vorgehen wird n-mal wiederholt, gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, in diesen n Zügen genau k rote Kugeln zu ziehen.
Man beachte, daß in diesem allgemeinen Modell im Gegensatz zu 1.4.3 (*Pólya/Eggenberger*) verschiedenen Reihenfolgen beim Zuge der k roten und n-k schwarzen Kugeln verschiedene Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Die Behandlung ist deshalb weit weniger einfach.
Es seien zwei stochastische Variablen eingeführt:

$$X_n = \text{Anzahl roter Kugeln nach n Zügen } (X_0 = R)$$

$$\xi_n = \begin{cases} 1, \text{ falls im n-ten Zug rot gezogen wird} \\ 0, \text{ falls im n-ten Zug schwarz gezogen wird} \end{cases}$$

Dann gilt die stochastische Rekursionsformel

$$X_{j+1} = X_j + (R_r - R_s)\xi_{j+1} + R_s, \quad j = 0, 1, 2 \ldots \tag{I 82}$$

Summiert man diese von 0 bis $n - 1$ auf und verwendet die neue Bezeichnung $\zeta_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, so lautet die lineare Beziehung zwischen X_n und ζ_n:

$$X_n = (R_r - R_s)\zeta_n + n R_s + R \tag{I 83}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist nun aber gerade durch $W(\zeta_n = k)$ gegeben, d. h. durch die Verteilung von ζ_n und damit X_n vollständig bestimmt. Definiere

$$e_n(z) = \sum_j z^j W(X_n = j)$$

deren eF, dann wird mit (I 82)

$$e_{n+1}(z) = \mathscr{E}(z^{X_{n+1}}) = z^{R_s} \sum_{j,l} z^{j+(R_r-R_s)l} W(X_n = j, \xi_{n+1} = l)$$

$$= z^{R_s} \sum_j z^j W(X_n = j) [W(\xi_{n+1} = 0 \mid X_n = j) + z^{R_r - R_s} W(\xi_{n+1} = 1 \mid X_n = j)] \tag{I 84}$$

Da aber

$$W(\xi_{n+1} = 1 \mid \zeta_n = j) = \frac{R + j R_r + (n-j) R_s}{N + j(R_r + S_r) + (n-j)(R_s + S_s)},$$

folgt mit Hilfe von (I 83)

$$W(\xi_{n+1} = 1 \mid X_n = j) = \frac{j}{N + n(R_s + S_s) + (j - R - n R_s)\left(1 - \dfrac{S_s - S_r}{R_r - R_s}\right)} \tag{I 85}$$

Die durch Einführung von (I 85) in (I 84) gewonnene, allgemein gültige Formel ist für die praktische Anwendung ungeeignet. Wir nehmen daher an, die Bedingung

$$(S_s - S_r)/(R_r - R_s) = 1 \tag{I 86}$$

sei erfüllt, was zur Folge hat, daß nurmehr drei Parameter frei wählbar sind. Es wird sich herausstellen, daß trotz dieser Beschränkung das Modell allgemein genug ist, um die interessanten Spezialfälle zu enthalten.
Mit (I 86) vereinfacht sich (I 84) wesentlich

$$e_{n+1}(z) = z^{R_s} \sum_j z^j W(X_n = j) \left[1 + \frac{z^{R_r - R_s} - 1}{N + n(R_s + S_s)} j\right]$$

oder, da

$$\sum_j j z^j W(X_n = j) = z e_n'(z),$$

$$e_{n+1}(z) = z^{R_s}\left[e_n(z) + \frac{z^{R_r - R_s} - 1}{N + n(R_s + S_s)} z e_n'(z)\right] \tag{I 87}$$

Diese Differenzen-Differentialgleichung soll unter der Anfangsbedingung

$$e_0(z) = z^R \tag{I 88}$$

gelöst werden.
Um in der Schreibweise nicht zu kompliziert zu werden, seien folgende Abkürzungen gewählt:

$A = R_s$	oder	$R_s = A$	$A/B = \alpha$
$B = R_r - R_s$		$R_r = A + B$	$C/B = \gamma$
$C = R_s + S_s$		$S_s = C - A$	
		$S_r = C - A - B$ nach (I 86)	

Damit wird

$$e_{n+1}(z) = z^A\left[e_n(z) + \frac{z^B - 1}{N + nC} z e_n'(z)\right] \tag{I 89}$$

Definiert man ($B \neq 0$ vorausgesetzt) eine neue Funktion $f_n(z)$

$$f_n(z) = (1 - z^B)^{(N+nC)/B} z^{-N-nC} e_n(z), \tag{I 90}$$

dann erhält man durch Einsetzen in (I 89) die einfachere Gleichung

$$f_{n+1}(z) = -\frac{z^{A-C+1}(1-z^B)^{\gamma+1}}{N+nC} f_n'(z) \tag{I 91}$$

mit der Anfangsbedingung [aus (I 88) und (I 90)]

$$f_0(z) = z^{-S}(1-z^B)^{N/B} \tag{I 92}$$

(I 91) und (I 92) bestimmen das Gleichungssystem vollständig, und man könnte daraus die Lösung rekursiv berechnen. Die Formeln werden jedoch schnell unübersichtlich, weshalb folgendes Verfahren vorzuziehen ist:
Eine neue Variable u werde derart eingeführt, daß

$$du = -\frac{dz}{z^{A-C+1}(1-z^B)^{\gamma+1}}$$

bzw. mit

$$z^{-B} = v \tag{I 93}$$

$$u = \frac{1}{B}\int \frac{v^\alpha}{(v-1)^{\gamma+1}}\,dv \tag{I 94}$$

In der Variablen u lautet das Differenzen-Differentialgleichungssystem für f

$$f_{n+1}(u) = \frac{1}{N+nC} f_n'(u) \quad [\,'\text{ bedeutet hier Ableitung nach u}]\ ,$$

und durch rekursive Auflösung findet man

$$f_n(u) = \frac{1}{[N+(n-1)C]\ldots(N+C)N} f_0^{(n)}(u) \tag{I 95}$$

Damit sind alle Hilfsmittel bereitgestellt. Der Lösungsweg kann folgendermaßen skizziert werden:

$$u \to z(u) \to f_0(u) \to f_0^{(n)}(u) \to f_n(u) \to f_n(z) \to e_n(z) \tag{I 96}$$

Schließlich erzeugt Gleichung (I 83), die nun

$$X_n = B\zeta_n + nA + R$$

lautet, die Beziehung zur eF von ζ_n, nämlich

$$E_n(z) = z^{-(nA+R)/B} e_n(z^{1/B})\,, \tag{I 97}$$

womit hinwiederum die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung eindeutig bestimmt ist.
Der in (I 96) angegebene Weg enthält zwei komplizierende Operationen, die Berechnung des Integrals (I 94) und die Bildung der n-ten Ableitung der Funktion $f_0(u)$. In Anbetracht der vielfältigen Umformungen, denen die Lösung von (I 94) ausgesetzt ist, beschränken wir uns zum vornherein auf jene Lösungen, die aus einem einzigen Term bestehen, verzichten also auf jede Art von Zusammensetzungen. Die beiden Fälle, die dieser Forderung entsprechen, sind

(I) $\alpha = 0$: Verschwinden des Zählers.

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad &\text{bedeutet} \quad A = R_s = 0 \\ &\text{und damit} \quad B = R_r,\ C = S_s,\ S_r = C - B \end{aligned} \tag{I 98}$$

Aus (I 94) folgt

$$u = \frac{1}{B}\int \frac{dv}{(v-1)^{\gamma+1}} = \frac{1}{B}\begin{cases} -\frac{1}{\gamma(v-1)^{\gamma}}, & \text{falls } \gamma \neq 0 \quad \text{siehe 1.4.3} \\ \log(v-1), & \text{falls } \gamma = 0 \quad \text{siehe 1.4.4} \end{cases}$$

(II) $\gamma = -1$: Verschwinden des Nenners.

$$\gamma = -1 \text{ bedeutet } \quad B = -C \text{ oder } S_s = -R_r \qquad \text{(I 99)}$$

$$S_r = 2C - A = R_s - 2R_r$$

$$u = \frac{1}{B}\int v^{\alpha} dv = \frac{1}{B}\begin{cases} \frac{v^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \text{falls } \alpha \neq -1 \quad \text{siehe 1.4.5} \\ \log v, & \text{falls } \alpha = -1 \quad \text{siehe 1.4.6} \end{cases}$$

In 1.4.2 nehmen wir den bei obiger Herleitung ausgeschlossenen Fall $B = 0$ vorweg.

1.4.2 Die schematische Ansteckung

Ist $B = 0$, dann hat man $R_r = R_s$ $(S_r = S_s)$.
Nach (I 89) folgt ferner

$$e_{n+1}(z) = z^{A} e_n(z)$$

$$e_n(z) = z^{nA} e_0(z) = z^{R+nA}$$

Man schließt hieraus, daß die Anzahl roter Kugeln nach n Zügen mit Sicherheit $R + nA$ sein muß. Bei jedem Zug (gleichgültig, ob rot oder schwarz gezogen wurde) werden A rote Kugeln hinzugefügt. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, ändert sich zwar, aber die Änderung geht in schematischer Weise vor sich, ohne sich vom jeweiligen Ergebnis beeinflussen zu lassen. Die Wahrscheinlichkeiten sind für $j = 1, 2 \ldots n$ zum vornherein bekannt, nämlich

$$p_j = \frac{R + (j-1)A}{N + (j-1)C} \qquad j = 1, 2 \ldots n$$

Die eF hat die Form

$$E_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(q_j + p_j z), \quad q_j = 1 - p_j,$$

und man weiß, daß für

$$p_j \to 0 \ (j = 1, 2 \ldots n), \ n \to \infty \text{ mit } \sum_{j=1}^{n} p_j = \lambda \qquad \text{(I 100)}$$

$$E_n(z) \to e^{\lambda(z-1)}$$

strebt, sich also wie im Fall $A = C = 0$ (Binomialfall) im Grenzübergang seltener Ereignisse eine P-Verteilung einstellt.

1.4.3 Das Modell von Pólya/Eggenberger

Unter der Annahme $\gamma \neq 0$ in (I 98) stellt man fest, daß

$$u = -\frac{1}{C}\frac{1}{(z^{-B}-1)^{\gamma}} \quad \text{oder } z = \left[1 + \left(-\frac{1}{Cu}\right)^{1/\gamma}\right]^{-1/B}$$

$$f_0(u) = \left[1 + \left(-\frac{1}{Cu}\right)^{1/\gamma}\right]^{-R/B}\left(-\frac{1}{Cu}\right)^{N/C} = [1 + (-Cu)^{1/\gamma}]^{-R/B}(-Cu)^{-S/C} \qquad \text{(I 101)}$$

Die n-te Ableitung dieses Produktes bildet formal keine Schwierigkeiten, wird aber insofern unhandlich, als zur Ableitung des Faktors links die Formel (I 47) benötigt wird. Eine andere Möglichkeit besteht zwar darin, den Ausdruck vor der Differentiation in eine Binomialreihe zu entwickeln, doch hat dieses Verfahren andere Nachteile, wie aus späteren Ausführungen hervorgehen wird. Zur Vornahme des *Pólya*schen Grenzübergangs (seltene Ereignisse und schwache Ansteckung) ist es jedoch unter Umständen recht nützlich.
Die Formel für $f_0^{(n)}(u)$ wird übersichtlich, falls $\gamma = \pm 1$ ist. Der Fall $\gamma = -1$ ist in diesem Zusammenhang wenig interessant — die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne nimmt ständig ab ($S_s = -R_r$, $S_r = -2R_r$) — und soll nicht weiter verfolgt werden.

Der Fall $\gamma = 1$.

Im Fall $\gamma = 1$, d. h. $B = C$, folgt aus (I 98)

$$R_s = S_r = 0\,,\; R_r = S_s = \Delta \tag{I 102}$$

Das entspricht genau dem Modell von *Pólya/Eggenberger* [26,27].

$$f_0(u) = (1 - u\Delta)^{-R/\Delta}(-u\Delta)^{-S/\Delta}$$

Nach der *Leibniz*schen Produktregel ergibt sich hieraus

$$f_0^{(n)}(u) = \Delta^n(-u\Delta)^{-(S/\Delta)-n}(1-u\Delta)^{-R/\Delta}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\frac{\Gamma\left(\frac{R}{\Delta}+v\right)\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}+n-v\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{\Delta}\right)\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}\right)}\left(\frac{u\Delta}{u\Delta-1}\right)^v$$

und weiter

$$f_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\Delta}+n\right)} z^{-S}(1-z^{\Delta})^{(N/\Delta)+n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\frac{\Gamma\left(\frac{R}{\Delta}+v\right)\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}+n-v\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{\Delta}\right)\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}\right)} z^{\Delta(v-n)}$$

$$\begin{aligned} e_n(z) &= z^{N+n\Delta}(1-z^{\Delta})^{-[(N/\Delta)+n]} f_n(z) \\ &= z^R\frac{\Gamma\left(\frac{N}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\Delta}+n\right)}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\frac{\Gamma\left(\frac{R}{\Delta}+v\right)\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}+n-v\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{\Delta}\right)\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}\right)} z^{\Delta v}\end{aligned}$$

Die eF der gesuchten Verteilung lautet demnach (I 97)

$$E_n(z) = \frac{1}{B\left(\frac{R}{\Delta}, \frac{S}{\Delta}\right)}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v} B\left(\frac{R}{\Delta}+v, \frac{S}{\Delta}+n-v\right) z^v, \tag{I 103}$$

woraus sich definitionsgemäß für die Wahrscheinlichkeiten

$$W_k = \binom{n}{k}\frac{B\left(\frac{R}{\Delta}+k, \frac{S}{\Delta}+n-k\right)}{B\left(\frac{R}{\Delta}, \frac{S}{\Delta}\right)}, \quad 0 \leqq k \leqq n \tag{I 104}$$

ableiten läßt. Ein Vergleich mit (I 35) deckt die Übereinstimmung der auf ganz verschiedenen Wegen hergeleiteten Ergebnisse auf. Durch Einführung der Definitionsgleichung (5) für $B\left(\frac{R}{\Delta}+v, \frac{S}{\Delta}+n-v\right)$ in (I 103) kann die eF auch hier auf die Form

$$E_n(z) = F\left(-n, \frac{R}{\Delta}; \frac{N}{\Delta}; 1-z\right) \tag{I 105}$$

gebracht werden. Die Momente der Verteilung lauten

$$w\alpha_{[k]} = n(n-1)\ldots(n-k+1)\frac{B\left(\frac{R}{\Delta}+k, \frac{S}{\Delta}\right)}{B\left(\frac{R}{\Delta}, \frac{S}{\Delta}\right)}$$

$$\mu_W = n\frac{R}{N}, \quad \sigma_W^2 = n\frac{N+n\Delta}{N+\Delta}\frac{RS}{N^2}$$

Analog zur Limesbetrachtung 4, S. 16, läßt sich der *Pólya*sche Grenzübergang

$$\begin{array}{lll} R/N = \varrho & n \to \infty & \\ & \varrho \to 0 & \text{mit } n\varrho = h,\ n\delta = d \\ \Delta/N = \delta & \delta \to 0 & \end{array} \tag{I 106}$$

durchführen. Er erzeugt die negative Binomialverteilung mit eF

$$[1 + d(1-z)]^{-h/d},$$

$$\text{d. h. } W_k = \binom{\frac{h}{d}+k-1}{k}\left(\frac{d}{1+d}\right)^k \frac{1}{(1+d)^{h/d}} \tag{I 107}$$

$$\text{mit } \mu_W = h, \quad \sigma_W^2 = h(1+d) \tag{I 108}$$

Der Parameter d nennt sich in diesem Zusammenhang Ansteckungsparameter. $d = 0$, keine Ansteckung, führt zur P-Verteilung.
Im Anschluß an die Bemerkung auf der letzten Seite ist auch folgendes Vorgehen möglich:
Man entwickle

$$(1-u\Delta)^{-R/\Delta} = \sum_{v=0}^{\infty}\binom{-R/\Delta}{v}(-u\Delta)^v, \quad |u| < 1/\Delta$$

In denselben Schritten wie zuvor gelangt man zu

$$E_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\Delta}+n\right)}(1-z)^{-R/\Delta}\sum_{v=0}^{\infty}\binom{-R/\Delta}{v}\frac{\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}+n-v\right)}{\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}-v\right)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^v, \quad z < 1/2,$$

einer Funktion, die im Bereich $z < 1/2$ mit der eF (I 103) übereinstimmt. Die Darstellung ist aber so zur Herleitung der Wahrscheinlichkeitsverteilung ungeeignet. Da

$$\frac{\Gamma\left(\frac{N}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}-v\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{S}{\Delta}+n-v\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\Delta}+n\right)} \underset{(3)}{\sim} \left(\frac{S}{\Delta}\right)^{(R/\Delta)+v}\left(\frac{S}{\Delta}+n\right)^{-(R/\Delta)-v} \to \frac{1}{(1+d)^{(h/d)+v}}, \tag{I 109}$$

erkennt man jedoch sofort, daß

$$E_n(z) \to [1 + d(1 - z)]^{-h/d}$$

Das *Pólya/Eggenberger*-Modell beruht auf der Annahme, das Eintreffen eines Unfallereignisses bzw. dessen Nichteintreffen erhöhe die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, und zwar auf gleiche Art und Weise. Insbesondere in der Unfallversicherung ist aber auch die entgegengesetzte Möglichkeit sehr zu beachten, d. h. nach einem Unfall nimmt die Nichtunfallwahrscheinlichkeit zu und umgekehrt. Diesen Vorgang könnte man so darstellen, daß in obigem Modell $\varDelta$ negativ gewählt wird. Dann verringert sich jedoch die Gesamtkugelzahl, d. h. der Prozeß ist nicht unbeschränkt fortsetzbar. Ein Modell, dem dieser Nachteil nicht anhaftet, soll in 1.4.6 zur Sprache kommen.

Eine Verallgemeinerung des Modells.

Diskutabel ist auch, daß bei Unfall und Nichtunfall die gleiche Maßnahme getroffen wird. Um dies zu vermeiden, kann man dazu übergehen, statt (I 102) die Voraussetzung

$$R_s = S_r = 0\,,\ R_r = \varDelta_1\,,\ S_s = \varDelta_2 \tag{I 110}$$

anzunehmen (siehe z. B. [14]). Diese verletzt indessen unsere Bedingung (I 86) — mit $R_r = \varDelta_1$, $S_s = \varDelta_2$ muß dort notwendigerweise $S_r = \varDelta_2 - \varDelta_1 \neq 0$ sein — fällt also nicht unter das allgemeine Modell von 1.4.1. Wir zeigen jedoch im folgenden, daß wenigstens im Grenzübergang unser allgemeines Modell auch dieses verallgemeinerte *Pólya/Eggenberger*-Modell enthält.
Ausgehend von (I 101) entwickle man wie zuvor die eckige Klammer

$$[1 + (-u\varDelta_2)^{1/\gamma}]^{-R/\varDelta_1} = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{-R/\varDelta_1}{v} (-u\varDelta_2)^{v/\gamma}, \quad |u| < 1/\varDelta_2,$$

um daraus $E_n(z)$ zu berechnen. Das Ergebnis lautet hier

$$E_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{\varDelta_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\varDelta_2} + n\right)} (1 - z)^{-R/\varDelta_1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{-R/\varDelta_1}{v} \frac{\Gamma\left(\frac{S}{\varDelta_2} + n - \frac{v}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{S}{\varDelta_2} - \frac{v}{\gamma}\right)} \left(\frac{z}{1-z}\right)^v, \quad z < 1/2$$

Der *Pólya*sche Grenzübergang fordert

$$\begin{array}{llll} n \to \infty & & & \\ R/N = \varrho \to 0 & & n\varrho & = h \\ \varDelta_1/N = \delta_1 \to 0 & \text{mit} & n\delta_1 & = d_1 \\ \varDelta_2/N = \delta_2 \to 0 & & n\delta_2 & = d_2 \end{array}$$

Entsprechend zu (I 109) sei erst das Verhalten von

$$\frac{\Gamma\left(\frac{N}{\varDelta_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{S}{\varDelta_2} - \frac{v}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{S}{\varDelta_2} + n - \frac{v}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\varDelta_2} + n\right)} \sim \left(\frac{S}{\varDelta_2}\right)^{\frac{R}{\varDelta_2} + v\frac{\varDelta_1}{\varDelta_2}} \left(\frac{S}{\varDelta_2} + n\right)^{-\frac{R}{\varDelta_2} - v\frac{\varDelta_1}{\varDelta_2}}$$

$$\to \frac{1}{(1 + d_2)^{(h/d_2) + v(d_1/d_2)}}$$

untersucht. Unter Benützung dieses Resultats erhält man

$$E_n(z) \to \frac{(1-z)^{-h/d_1}}{(1+d_2)^{h/d_2}} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{-h/d_1}{v} \left[\frac{z}{1-z} \frac{1}{(1+d_2)^{d_1/d_2}}\right]^v$$

oder

$$E(z) = [z + (1+d_2)^{d_1/d_2}(1-z)]^{-h/d_1} \tag{I 111}$$

Diese eF entspricht wiederum einer negativen Binomialverteilung; die Form (41) wird durch die Parametertransformation

$$\alpha = h/d_1, \quad a = [(1+d_2)^{d_1/d_2} - 1]^{-1}$$

erreicht, so daß also

$$W_k = \binom{\frac{h}{d_1} + k - 1}{k} (1+d_2)^{-(h/d_2) - k(d_1/d_2)} [(1+d_2)^{d_1/d_2} - 1]^k, \tag{I 112}$$

was die auf der letzten Seite aufgestellte Behauptung beweist (siehe [78]). Setzt man die beiden Ansteckungsparameter d_1 und d_2 einander gleich, so ergibt sich wieder (I 107).

Ein Spezialfall von (I 110) ist die Möglichkeit

$$R_s = S_r = S_s = 0, \ R_r = \Delta_1, \tag{I 113}$$

der trotz ihrer Einfachheit eine gewisse Plausibilität nicht abzusprechen ist. Durch Limesbildung $d_2 \to 0$ in (I 112) entsteht

$$W_k = \binom{\frac{h}{d_1} + k - 1}{k} e^{-h} (1 - e^{-d_1})^k$$

Betrachtet man die Momente

$$\mu_W = \frac{h}{d_1}(e^{d_1} - 1), \quad \sigma_W^2 = \frac{h}{d_1} e^{d_1}(e^{d_1} - 1), \tag{I 114}$$

so bemerkt man, daß im Gegensatz zu (I 108) in diesem einfachen Modell bereits im Mittelwert der Ansteckungsparameter d_1 steckt.

1.4.4 Das Modell von Woodbury/Rutherford

Der Fall $\gamma = 0$.

$\gamma = 0$ bedeutet, daß zusätzlich noch $C = 0$, anders ausgedrückt

$$R_s = S_s = 0, \ S_r = -R_r \tag{I 115}$$

Beim Zug einer schwarzen Kugel geschieht also nichts; wird hingegen rot gezogen, so sollen R_r schwarze Kugeln durch ebensoviele rote ersetzt werden. Gegenüber (I 102) wird damit der Ansteckungseffekt verstärkt. Bemerkenswert ist ferner, daß bei diesem Verfahren die Gesamtzahl der Kugeln immer gleich groß bleibt.

Da die Wahrscheinlichkeit, schwarz zu ziehen, in jedem Fall positiv sein soll, muß verlangt werden, daß

$$n < S/R_r \tag{I 116}$$

Das vorstehend beschriebene Modell ist von *Rutherford* [63] in Anlehnung an eine Arbeit von *Woodbury* [76] (siehe später) untersucht worden.
Aus (I 93) folgt zunächst

$$z = (e^{uB} + 1)^{-1/B} \quad \text{und} \quad f_0(u) = (e^{uB} + 1)^{-R/B} e^{Nu} \tag{I 117}$$

Die k-te Ableitung einer Funktion $(1 + e^{uB})^a$ kann am einfachsten in der Form

$$B^k \sum_{j=0}^{k} c_j^k e^{uBj} \frac{d^j}{dv^j} (v + 1)^a \Big|_{v=e^{uB}} \tag{I 118}$$

geschrieben werden, wobei die Koeffizienten c_j^k in (25) definiert sind. Besonders zu beachten ist, daß voraussetzungsgemäß $c_0^k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k=0 \end{cases}$ sein soll.

Für $f_0^{(n)}(u)$ ergibt sich mit Hilfe von (I 118) daher

$$f_0^{(n)}(u) = B^n e^{Nu} (e^{uB} + 1)^{-R/B} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \left(\frac{N}{B}\right)^{n-v} \sum_{j=0}^{v} c_j^v (-1)^j \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)} \left(\frac{e^{uB}}{e^{uB} + 1}\right)^j$$

$$f_n(z) = (1 - z^B)^{N/B} z^{-S} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \left(\frac{N}{B}\right)^{-v} \sum_{j=0}^{v} c_j^v (-1)^j \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)} (1 - z^B)^j$$

$$e_n(z) = z^N (1 - z^B)^{-N/B} f_n(z)$$

$$E_n(z) = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \left(\frac{B}{N}\right)^v \sum_{j=0}^{v} c_j^v \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)} (z - 1)^j \tag{I 119}$$

Eine Entwicklung dieser Doppelsumme nach Potenzen von z liefert für den Koeffizienten von z^k:

$$W_k = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{B}{N}\right)^j \sum_{v=k}^{j} \binom{v}{k} (-1)^{k+v} c_v^j \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B} + v\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)}, \quad 0 \leqq k \leqq n \tag{I 120}$$

Bequemer ist es, sich mit den faktoriellen Momenten der Verteilung zu befassen. Da

$$M_n[u] = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \left(\frac{B}{N}\right)^v \sum_{j=0}^{v} c_j^v \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)} u^j,$$

folgt durch Koeffizientenvergleich sofort

$$w\alpha_{[k]} = k! \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)} \sum_{j=k}^{n} c_k^j \binom{n}{j} \left(\frac{B}{N}\right)^j, \tag{I 121}$$

insbesondere also [mit $c_2^j = 2^{j-1} - 1$]

$$\mu_W = \frac{R}{B}\left[\left(\frac{B}{N}+1\right)^n - 1\right]$$

$$w\alpha_{[2]} = 2!\,\frac{R}{B}\left(\frac{R}{B}+1\right)\left[\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{2B}{N}\right)^j - \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{B}{N}\right)^j\right]$$

$$= \frac{R}{B}\left(\frac{R}{B}+1\right)\left[\left(\frac{2B}{N}+1\right)^n - 2\left(\frac{B}{N}+1\right)^n + 1\right]$$

$$\sigma_W^2 = \left(\frac{R}{B}\right)^2\left[\left(\frac{2B}{N}+1\right)^n - \left(\frac{B}{N}+1\right)^{2n}\right] + \frac{R}{B}\left[\left(\frac{2B}{N}+1\right)^n - \left(\frac{B}{N}+1\right)^n\right]$$

Die Ergebnisse für $w\alpha_{[1]}$ und $w\alpha_{[2]}$ lassen die Vermutung aufkommen, daß (I 121) auch als

$$w\alpha_{[k]} = \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\left(\frac{B}{N}j+1\right)^n \qquad \text{(I 122)}$$

geschrieben werden kann. Das ist in der Tat so; wenn man bedenkt, daß

$$c_k^0 = (-1)^{k+1}/k! \quad \text{und} \quad c_k^j = 0 \text{ für } 0 < j < k\,,$$

kann Formel (I 121) in

$$w\alpha_{[k]} = \left[(-1)^k + k!\sum_{j=0}^{n} c_k^j\binom{n}{j}\left(\frac{B}{N}\right)^j\right]\frac{\Gamma\left(\frac{R}{B}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)}$$

umgeformt werden. Setzt man hier die Definition von c_k^j ein, so ergibt sich

$$w\alpha_{[k]} = \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)}\left\{\sum_{j=0}^{n}\left[\binom{n}{j}\left(\frac{B}{N}k\right)^j - \binom{n}{j}\binom{k}{1}\left(\frac{B}{N}(k-1)\right)^j + \ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots + (-1)^{k-1}\binom{n}{j}\binom{k}{k-1}\left(\frac{B}{N}\right)^j\right] + (-1)^k\right\}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)}\left[\left(1+k\frac{B}{N}\right)^n - \binom{k}{1}\left(1+(k-1)\frac{B}{N}\right)^n + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\left(1+\frac{B}{N}\right)^n + (-1)^k\right],$$

was offensichtlich mit (I 122) identisch ist.

Die Formeln für die ersten faktoriellen Momente (mit $R/N = p$, $B/N = c$) findet man auch in [63].

Der *Pólya*sche Grenzübergang.

Wie in (I 106) werde auch hier der Grenzübergang für seltene Ereignisse und schwache Ansteckung

$$\begin{aligned} & n \to \infty \\ & R/N = \varrho \to 0 \ \text{ mit } n\varrho = h,\ n\beta = b \\ & B/N = \beta \to 0 \end{aligned}$$

vorgenommen. Ausgehend von

$$M_n[u] = \sum_{k=0}^{\infty} w\alpha_{[k]} \frac{u^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{R}{B}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{B}\right)} u^k \sum_{j=k}^{n} c_k^j \binom{n}{j} \left(\frac{B}{N}\right)^j,$$

schließt man

$$M_n[u] \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{h}{b}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{b}\right)} u^k \sum_{j=k}^{\infty} c_k^j \frac{b^j}{j!} = M[u],$$

und da, wie man sich leicht überzeugt,

$$k! \sum_{j=k}^{\infty} c_k^j \frac{b^j}{j!} = (e^b - 1)^k,$$

folgt weiter

$$M[u] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{h}{b}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{b}\right)} \frac{[u(e^b-1)]^k}{k!} = [1 + u(1-e^b)]^{-h/b} \tag{I 123}$$

$$\text{mit } w\alpha_{[k]} = \frac{\Gamma\left(\frac{h}{b}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{b}\right)} (e^b - 1)^k$$

Es ist also wieder eine negative Binomialverteilung entstanden mit

$$W_k = \binom{\frac{h}{b}+k-1}{k} e^{-h}(1-e^b)^k \tag{I 124}$$

Die beiden sonst wesentlich verschiedenen Modelle (I 113) und (I 115) stimmen also im Grenzfall völlig überein.

Der Vorteil des S. 36 durchgeführten Verfahrens zur Bestimmung der Grenzverteilung wird hier besonders augenfällig. Es ergibt sich nämlich

$$E_n(z) = z^{-R/B} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{-R/B}{v} \left(\frac{Bv+N}{N}\right)^n \left(\frac{1-z}{z}\right)^v, \quad z > 1/2$$

Da $[1 + (B/N)\,v]^n \to e^{bv}$ strebt, folgt unmittelbar $E_n(z) \to [z - (z-1)\,e^b]^{-h/b}$

Auch *Sousselier/Ramel* [69] gehen vom gleichen Schema aus, benützen jedoch eine weitere vereinfachende Annahme. Ihr Grenzfall

$$W_k = \binom{\frac{H}{d} + k - 1}{k} (de^{-d})^k (1 - de^{-d})^{H/d}$$

unterscheidet sich aber nur in den Parametern von (I 124) [$h/b \sim H/d$, $1 - e^b \sim de^{-d}$].

Die Momente

$$\mu_W = H/(1-d)\,, \quad \sigma_W^2 = H/(1-d)^2$$

sind etwas einfacher zu handhaben als (I 114).

Verallgemeinerung des Modells.

Wie schon bemerkt, hat *Rutherford* bei seiner Herleitung das allgemeine Modell von *Woodbury* [76] als Grundlage benutzt, das zwar im Rahmen unserer Betrachtung nicht enthalten ist, hier aber doch interessehalber erwähnt werden muß. Während im *Rutherford*-Modell nach jedem Zug B Kugeln ausgewechselt werden, d.h. die Wahrscheinlichkeit, rot zu ziehen, mit der Anzahl der „roten Ereignisse" linear anwächst, kann bei *Woodbury* die Anzahl B von Zug zu Zug variieren. Mit dieser Annahme kann einem wichtigen Argument gegen die Ansteckungsidee begegnet werden (siehe Seite 31).

Sei B_j, $j = 1, 2 \dots n$, die Anzahl der nach dem j-ten Erfolgszug ausgewechselten Kugeln und bezeichne

$$p_k = \frac{1}{N}\,(R + \sum_{j=1}^{k} B_j)\,, \quad p_0 = R/N$$

die Wahrscheinlichkeit, nach k bereits eingetroffenen Rotzügen neuerdings rot zu ziehen, dann hat die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{W_k\}$ nach *Woodbury* die Gestalt

$$W_k = p_0 p_1 \dots p_{k-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{(1-p_j)^n}{(p_0 - p_j) \dots (p_{j-1} - p_j)(p_{j+1} - p_j) \dots (p_k - p_j)}$$

Im *Pólya*schen Grenzfall

$$\begin{aligned} &n \to \infty \\ &R/N = p_0 \to 0 \quad \text{mit } n p_0 = \lambda_0\,, n\beta_j = b_j \text{ und } \lambda_k = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j\,,\ k \geqq 1 \\ &B_j/N = \beta_j \to 0 \end{aligned}$$

geht die Wahrscheinlichkeit über in

$$W_k = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_j}}{\prod\limits_{v \neq j} (\lambda_v - \lambda_j)}$$

Diese Gleichung ist seinerzeit bereits von *Lundberg* [51] als Lösung des zeithomogenen Prozesses (in der Einheitsperiode $t = 1$) hergeleitet worden.

Der etwas kompliziert erscheinende Summenterm läßt sich, gegebenfalls bis auf ein Vorzeichen, als Quotient zweier Determinanten interpretieren,

$$W_k = (-1)^k \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \frac{\Delta_k}{D_k}\,,$$

wobei D_k die *Vandermonde*sche Determinante

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^k \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^k \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \lambda_k & \dots & \lambda_k^k \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

bedeutet, Δ_k diese Determinante, wenn die letzte Kolonne durch die Werte $e^{-\lambda_j}$, $j = 0, 1 \dots k$, ersetzt wird.

Eine weniger weit reichende Verallgemeinerung des Modells wäre die Annahme, daß neben $S_r = - R_r$ auch $S_s = - R_s$ ($\neq 0$) gelten würde. Diese Möglichkeit soll jedoch nicht weiter erörtert werden.

1.4.5. Ein pessimistisches Modell

Aus (I 99) und (I 93) ergibt sich

$$u = \frac{1}{A+B} v^{\alpha+1} = \frac{1}{A+B} z^{-(A+B)},$$

und, wenn zur Abkürzung $A + B = R_r = Q$ gesetzt wird,

$$z = (Qu)^{-1/Q}$$

$$f_0(u) = (Qu)^{-R/Q}[(Qu)^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1]^{N/B} \qquad \text{(I 125)}$$

Was bereits in 1. 4. 3 zur entsprechenden Formel (I 101) gesagt wurde, gilt in gleicher Weise auch hier. (I 125) wird einfach in den beiden Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = -2$; $\alpha = 0$ soll, wie anläßlich der Untersuchung von (I 101) erwähnt, nicht weiter diskutiert werden.

Der Fall $\alpha = -2$.

$\alpha = -2$ bedeutet, daß neben $B = - C$ noch $A = - 2B$ gelten soll, d.h.

$$R_s = 2R_r, \quad S_s = -R_r, \quad S_r = 0 \qquad \text{(I 126)}$$

Wird rot gezogen, werden also zusätzlich R_r rote Kugeln zurückgelegt, bei einem schwarzen Zug hingegen doppelt so viele rote Kugeln, wobei zudem noch R_r schwarze herausgenommen werden. In beiden Fällen wird demnach das rote Element verstärkt, beim Zug einer schwarzen Kugel jedoch viel intensiver. Wird das Ziehen einer roten Kugel als Unfallereignis interpretiert, liefert dieses Schema das Modell für eine recht pessimistische Anschauung des Unfallgeschehens.

Wie beim Modell von *Pólya/Eggenberger* nimmt die Gesamtkugelzahl bei jedem Zug um R_r zu. Bedingung (I 116) aus 1. 4. 4 muß auch hier gefordert werden.

Für $\alpha = -2$ ist $Q = A + B = B(\alpha + 1) = C = R_r$, also

$$f_0(u) = (1 - Cu)^{-N/C}(Cu)^{S/C}$$

In gleicher Weise wie in 1. 4. 3 schließt man

$$f_0^{(n)}(u) = C^n (Cu)^{S/C} (1 - Cu)^{-(N/C)-n} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n - v\right) \Gamma\left(\frac{S}{C} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{C}\right) \Gamma\left(\frac{S}{C} - v + 1\right)} \left(\frac{1 - Cu}{Cu}\right)^v$$

$$f_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{C}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n\right)} z^{R+nC} (z^C - 1)^{-(N/C)-n} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n - v\right) \Gamma\left(\frac{S}{C} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{C}\right) \Gamma\left(\frac{S}{C} - v + 1\right)} (z^C - 1)^v$$

$$e_n(z) = (z^C - 1)^{(N/C)+n} f_n(z)$$

$$E_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{S}{C} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n\right)} z^n \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n - v\right)}{\Gamma\left(\frac{S}{C} - v + 1\right)} \left(\frac{1 - z}{z}\right)^v \qquad \text{(I 127)}$$

Entwickelt man die Funktion $\sum_{v=0}^{n} a_v (1 - z)^v z^{n-v}$ nach Potenzen von z, so zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung die Gestalt

$$W_k = \frac{\Gamma\left(\frac{S}{C} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n\right)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n - j}{n - k} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{C} + k - j\right)}{\Gamma\left(\frac{S}{C} + k - n - j + 1\right)}, \quad 0 \leqq k \leqq n, \qquad \text{(I 128)}$$

wobei die Beziehung $\binom{a}{b}\binom{c}{a} = \binom{c}{b}\binom{c - b}{a - b}$ Verwendung fand.

Probeweise sei W_0 berechnet

$$W_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{S}{C} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{S}{C} - n + 1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{C}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n\right)} = \frac{S}{N} \frac{S - C}{N + C} \cdots \frac{S - (n - 1) C}{N + (n - 1) C}$$

Die k-fache Ableitung der eF (I 127) führt auf den Ausdruck

$$w\alpha_{[k]} = n(n - 1) \dots (n - k + 1) \frac{\Gamma\left(\frac{S}{C} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n\right)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{C} + n - j\right)}{\Gamma\left(\frac{S}{C} - j + 1\right)}, \qquad \text{(I 129)}$$

woraus sich insbesondere

$$\mu_W = \frac{n}{N + C(n - 1)} [R + C(n - 1)]$$

$$\text{(I 130)}$$

$$w\alpha_{[2]} = \frac{n(n - 1)}{[N + C(n - 1)]\,[N + C(n - 2)]} [R^2 + CR(2n - 3) + C^2(n - 1)(n - 2)]$$

ableiten lassen.

Der modifizierte *Pólya*sche Grenzübergang.

Versucht man den zu 1. 4. 3 und 1. 4. 4 analogen Grenzübergang durchzuführen, wird man feststellen, daß der Limes nicht mehr existiert. Um dessen Existenz zu sichern, muß folgende Modifikation vorgenommen werden:

$$\begin{aligned}&n \to \infty\\ &R/N = \varrho \to 0 \text{ mit } n\varrho = h, \quad n\delta \to 0, \quad n^2\delta = d\\ &C/N = \delta \to 0\end{aligned} \qquad \text{(I 131)}$$

Behauptung: Unter diesen Voraussetzungen strebt die Verteilung (I 128) gegen eine P-Verteilung mit Parameter h + d.

Relativ einfach ist zu zeigen, daß

$$W_0 \to e^{-h-d},$$

denn nach (2) folgt

$$W_0 \sim \frac{\left(\frac{S}{C}\right)^{S/C}\left(\frac{N}{C}-1\right)^{(N/C)-1}}{\left(\frac{N}{C}+n-1\right)^{(N/C)+n-1}\left(\frac{S}{C}-n\right)^{(S/C)-n}} = \frac{(1-\varrho)^{\frac{1-\varrho}{\delta}}(1-\delta)^{\frac{1-\delta}{\delta}}}{(1-\delta+\delta n)^{\frac{1-\delta}{\delta}+n}(1-\varrho-\delta n)^{\frac{1-\varrho}{\delta}+n}}$$

$$= \frac{(1-\varrho)^n}{(1-\delta)^n}\,\frac{\left(1-\frac{n\delta}{1-\varrho}\right)^n}{\left(1+\frac{n\delta}{1-\delta}\right)^n}\left(1+\frac{n\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{\delta-1}{\delta}}\left(1-\frac{n\delta}{1-\varrho}\right)^{\frac{\varrho-1}{\delta}} \sim \frac{e^{-h}}{1}\,\frac{e^{-d}}{e^d}\,e^d = e^{-h-d}$$

Auch der Grenzübergang in (I 130)

$$\mu_W \to h + d$$
$$w\alpha_{[2]} \to (h+d)^2$$

stützt unsere Hypothese. Zu einem allgemeinen Beweis ist aber weder (I 127) noch (I 129) gut geeignet. Zu diesem Zweck greift man am besten auf die Differentialgleichung der eF zurück. (I 127) läßt sich, wie seinerzeit (I 103), mit Hilfe einer hypergeometrischen Funktion schreiben

$$E_n(z) = z^n F\left(-n, -\frac{S}{C}; -\frac{N}{C}-n+1; \frac{z-1}{z}\right) \qquad \text{(I 132)}$$

Nach (9) gehorcht $F\left(-n, -\frac{S}{C}; -\frac{N}{C}-n+1; \frac{z-1}{z}\right)$ der Differentialgleichung

$$(1-z)(2F' + z^3F'') + \left(\frac{R}{C}z + \frac{S}{C} + n - 1\right)z^2F' + n\frac{S}{C}zF = 0 \qquad \text{(I 133)}$$

Die Substitution $F = z^{-n}E$ führt (I 133) in die Differentialgleichung der eF über

$$(1-z)\{2(E'z - En) + z^2[E''z^2 - 2nzE' + n(n+1)E]\}$$
$$+\left(\frac{R}{C}z + \frac{S}{C} + n - 1\right)z^2(E'z - En) + n\frac{S}{C}z^2E = 0,$$

welche wir ordnen und durch n^2 dividieren

$$E''\left[\frac{(1-z)z^4}{n^2}\right] + E'\left[\frac{2z(1-z)}{n^2} - \frac{2z^3(1-z)}{n} + z^3\left(\frac{R}{Cn^2}z + \frac{S}{Cn^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$+ E\left[\frac{(1-z)(-2+z^2)+z^2}{n} - z^3\left(1+\frac{R}{Cn}\right)\right] = 0$$

Bei Durchführung des Grenzübergangs (I 131) nimmt diese komplizierte Gleichung die einfache Form

$$E'\frac{1}{d} - E\left(1 + \frac{h}{d}\right) = 0$$

an, als deren Lösung unter der Anfangsbedingung $E(1) = 1$ in der Tat die eF

$$E(z) = e^{(h+d)\,(z-1)} \tag{I 134}$$

erscheint.

1.4.6 Das inverse Pólya/Eggenberger-Modell

Der Fall $\alpha = -1$.

$\alpha = \gamma = -1$ heißt $A = C$ und $A + B = 0$, woraus

$$R_r = S_s = 0\,, \quad R_s = S_r = \nabla \tag{I 135}$$

folgt. Das ist genau der inverse Vorgang zum Schema von *Pólya/Eggenberger*, werden doch hier nach jedem Zug ∇ Kugeln der anderen Farbe zusätzlich zurückgelegt. Man vergleiche hierzu die Bemerkung S. 37.

Nach (I 99) ist

$$u = -\frac{1}{\nabla}\log v\,, \quad z = e^{-u}$$

$$f_0(u) = e^{uS}(1 - e^{u\nabla})^{-N/\nabla}$$

Analog wie bei (I 117) in 1.4.4 fortfahrend, gelangt man zu folgender Gleichung für die eF der Verteilung:

$$E_n(z) = \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\left(\frac{S}{\nabla}\right)^{n-v}\sum_{j=0}^{v} c_j^v \frac{\Gamma\left(\frac{N}{\nabla}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\nabla}+n\right)} z^j(1-z)^{n-j} \tag{I 136}$$

Durch Berechnung des Koeffizienten von z^k erhält man W_k,

$$W_k = \sum_{v=0}^{k}(-1)^{k-v}\binom{n-v}{k-v}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{\nabla}+v\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\nabla}+n\right)}\sum_{j=v}^{n} c_v^j\binom{n}{j}\left(\frac{S}{\nabla}\right)^{n-j} \tag{I 137}$$

Für W_0 errechnet man sofort

$$W_0 = \left(\frac{S}{\nabla}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{N}{\nabla}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\nabla}+n\right)} = \frac{S}{N}\,\frac{S}{N+\nabla}\cdots\frac{S}{[N+(n-1)\nabla]}\,,$$

wie es das Schema verlangt.

Die ersten Momente des inversen *Pólya-Eggenberger*-Modells lauten

$$\mu_W = \frac{n}{N+\nabla(n-1)}\left(R + \frac{n-1}{2}\nabla\right), \tag{I 138}$$

$$_W\alpha_{[2]} = \frac{n(n-1)}{[N+\nabla(n-1)][N+\nabla(n-2)]}\left[R^2 + R\nabla(n-2) + \frac{\nabla^2}{12}(n-2)(3n-5)\right]$$

Der Grenzübergang.

Das im Zusammenhang mit dem pessimistischen Modell Gesagte behält hier seine Gültigkeit bei. Wendet man den modifizierten Grenzübergang (I 131) an, so läßt sich zeigen, daß die Verteilung (I 137) gegen die P-Verteilung

$$e^{-[h+(d/2)]}\frac{[h+(d/2)]^k}{k!} \tag{I 139}$$

strebt. Das war zu erwarten, da eine Limesbetrachtung in (I 138)

$$\mu_W \to h + (d/2)$$
$$w\alpha_{[2]} \to [h + (d/2)]^2$$

liefert.

Die Modelle der ersten Gruppe ($\alpha = 0$) führen im Limes zu einer negativen Binomialverteilung, während diejenigen der zweiten Gruppe ($\gamma = -1$) im modifizierten Grenzübergang einer P-Verteilung zustreben.

1.5 Gemischte Modelle

Die in den letzten drei Abschnitten besprochenen Effekte sind, da sie teilweise zu denselben Verteilungen führen, in der Praxis schwer auseinanderzuhalten. Anderseits ist zu sagen, daß sie meist nicht einzeln sondern kombiniert auftreten werden. Es sei daher im folgenden versucht, einige gemischte Modelle darzustellen. Im allgemeinen entstehen durch eine derartige Verquickung komplizierte Verteilungen; die Untersuchung erstreckt sich auf diverse einfachere Fälle rund um die negative Binomialverteilung.

1.5.1 Gemischte Heterogenität

Die Voraussetzung von Kollektivität oder Ansteckung führt zu verschiedenen, in 1.3 und 1.4 behandelten Modellen, die die gewöhnliche Poisson- bzw. Binomialverteilung zu ersetzen haben. Wird unter dieser Annahme nun zusätzlich Heterogenität im Bestand gefordert, so muß notwendigerweise die allgemeine Formel (I 7) dem neuen Tatbestand angepaßt werden. Als besonders wichtiger Spezialfall sei das Verhalten der negativen Binomialverteilung als Grundverteilung einer näheren Untersuchung unterzogen. Dabei beschränken wir uns auf zwei Standardformen

$$\text{(I)}\ P_r = \binom{h+r-1}{r} p^h q^r, \quad 0 < q < 1$$

$$\text{(II)}\ P_r = \binom{h+r-1}{r} A^r (A+1)^{-h-r}, \quad A > 0,$$

worin q bzw. A als stochastisch variabel aufgefaßt werden sollen. (II) ist durch ihre eF $E(z) = [1 + A(1-z)]^{-h}$ zu Vergleichen mit 1.2.4 geeignet.

Die allgemeinen Formeln aus 1.2.2 zeigen folgendes Bild:

$$W_r = \binom{h+r-1}{r} \int_{B_q} q^r (1-q)^h \, dS(q), \quad W_r = \binom{h+r-1}{r} \int_{B_A} A^r (A+1)^{-h-r} \, dS(A)$$

$$E_W(z) = \int_{B_q} \left(\frac{1-qz}{1-q}\right)^{-h} dS(q), \quad E_W(z) = \int_{B_A} [1 + A(1-z)]^{-h} \, dS(A) \tag{I 140}$$

$$w\alpha_{[k]} = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h)} \int_{B_q} \left(\frac{q}{1-q}\right)^k dS(q), \quad w\alpha_{[k]} = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h)} \int_{B_A} A^k \, dS(A) = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h)} s\alpha_k$$

Die letzte Gleichung entspricht (I 8).

Neben der Variation von q bzw. A könnte auch eine solche von h in Betracht gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in diesem Fall weniger einfach, da h im Binomialkoeffizienten auftritt. Die eF läßt sich aber ohne weiteres angeben, z.B.

$$s(h) = \gamma_{a,\alpha}(h)$$

$$E_W(z) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{1-qz}{p}\right)^{-h} e^{-ah}\, h^{\alpha-1}\, dh = \left(1 + \frac{1}{a} \log \frac{1-qz}{p}\right)^{-\alpha} \qquad \text{(I 141)}$$

$$\text{mit } \mu_W = \frac{\alpha}{a}\frac{q}{p}, \quad \sigma_W^2 = \frac{\alpha}{a}\frac{q}{p}\left(\frac{a+1}{a}\frac{q}{p}+1\right)$$

Der Parameter q in (I) variiert im Einheitsintervall; als Strukturdichte kommt deshalb, wie in (I 33), wieder die Verteilung (50)

$$\beta_1(q) = \frac{1}{B(P,Q)}\, p^{P-1} q^{Q-1}$$

in Frage. Damit ergibt sich

$$W_r = \binom{h+r-1}{r} \frac{B(h+P, r+Q)}{B(P,Q)} \qquad \text{(I 142)}$$

Bei der Herleitung der eF verwendet man neuerdings (11)

$$E_W(z) = \frac{B(h+P,Q)}{B(P,Q)}\, F(h, Q; h+P+Q; z) \qquad \text{(I 143)}$$

Die Verwandtschaft zu (I 36) tritt auch bei den analogen Grenzfällen auf.

1. $P = Q = 1$

   $E_W(z) = h \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(h+r)(h+r+1)}\, z^r$, d.h. $W_r = \frac{h}{(h+r)(h+r+1)}$,

   nicht mehr konstant wie in (I 37)!

2. $Q \to \infty$ oder $h \to \infty$ $\quad E_W(z) \to 0$

   $P \to \infty$ $\quad E_W(z) \to 1$

3. $P \to \infty, Q \to \infty$ mit $P/Q = p/q$

   $E_W(z) \to [(1 - qz)/p]^{-h}$ Ausgangsverteilung

4. $P \to \infty, h \to \infty$ mit $P/h = 1/A$

   $E_W(z) \to [1 + A(1-z)]^{-Q}$ wieder negative Binomialverteilung

5. $P \to \infty, Q \to \infty, h \to \infty; h/P \to 0, Q/P \to 0$ mit $h\,Q/P = \lambda$

   $E_W(z) \to e^{\lambda(z-1)}$ P-Verteilung

Schließlich sind die Momente durch

$$w\alpha_{[k]} = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h)} \frac{B(P-k, Q+k)}{B(P,Q)}$$

$$\mu_W = h\frac{Q}{P-1}, \quad \sigma_W^2 = hP\frac{(P+Q-1)(h+P-1)}{(P-1)^2(P-2)}$$

definiert, ihre Existenz hängt also von der Größe von P ab.

Der Parameter A in (II) ist in $0 < A < \infty$ definiert. Ohne Vollständigkeit anzustreben, gehen wir einige der in 1.2.3 behandelten Strukturfunktionen durch.

Gamma-Verteilung.

$$E_W(z) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty [1 + A(1-z)]^{-h} e^{-aA} A^{\alpha-1} dA$$

$$= e^{\frac{a}{2}\frac{1}{1-z}} \left(\frac{a}{1-z}\right)^{\frac{\alpha+h-1}{2}} W_{(1-\alpha-h)/2, (\alpha-h)/2}\left(\frac{ah}{1-z}\right), \quad |z| < 1 \tag{I 144}$$

$$W_r = \binom{h+r-1}{r} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} e^{a/2} a^{\frac{\alpha+h-1}{2}} W_{(1-2r-\alpha-h)/2, (\alpha-h)/2}(a)$$

$$w\alpha_{[k]} = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h)} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{a^k}$$

$$\mu_W = h\frac{\alpha}{a}, \quad \sigma_W^2 = h\frac{\alpha}{a^2}(a+\alpha+h+1)$$

Beta-Verteilung nach (I 16).

$$E_W(z) = \frac{(A_1-A_0)^{1-P-Q}}{B(P,Q)} \int_{A_0}^{A_1} [1 + A(1-z)]^{-h} (A-A_0)^{P-1} (A_1-A)^{Q-1} dA$$

$$= [1 + A_0(1-z)]^{-h} F\left[h, P; P+Q; \frac{(A_0-A_1)(1-z)}{1+A_0(1-z)}\right] \tag{I 145}$$

$$W_r = \binom{h+r-1}{r} \frac{A_0^r(1+A_0)^{-h-r}}{B(P,Q)} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \left(\frac{A_1-A_0}{A_0}\right)^j \cdot$$

$$\cdot\ B(P+j, Q) F\left(h+r, P+j; P+Q+j; \frac{A_0-A_1}{1+A_0}\right) \tag{I 146}$$

Für $A_0 = 0$ vereinfachen sich die beiden Ausdrücke wesentlich

$$E_W(z) = F[h, P; P+Q; A_1(z-1)] \tag{I 147}$$

$$W_r = \binom{h+r-1}{r} A_1^r \frac{B(P+r, Q)}{B(P,Q)} F(h+r, P+r; P+Q+r; -A_1)$$

Wie es sein muß, geht für $A_1 = 1$ und Vorzeichenwechsel bei h und $z - 1$ Formel (I 147) in (I 36) über.

Mit Hilfe von (I 147) ergibt sich als Verallgemeinerung von Gleichung (I 23) der Grenzwert

$$\lim_{A_1 \to \infty} F[h, P; P + QA_1; A_1(z-1)] = e^{\frac{Q}{2}\frac{1}{1-z}} \left(\frac{Q}{1-z}\right)^{\frac{P+h-1}{2}} W_{(1-P-h)/2, (P-h)/2}\left(\frac{Qh}{1-z}\right)$$

Der Beweis liegt in (I 22) und (I 144).

Aus (I 17) und (I 140) kann sofort eine allgemeine Formel für die Momente von (I 146) aufgestellt werden. Insbesondere findet man

$$\mu_W = h\left[A_0 + (A_1 - A_0)\frac{P}{P+Q}\right]$$

$$\sigma_W^2 = h\,A_0(A_0+1) + h\,(A_1 - A_0)(2\,A_0 + 1)\frac{P}{P+Q}$$

$$+ h\,(A_1 - A_0)^2 \frac{P}{(P+Q)^2(P+Q+1)}[(P+1)(P+Q) + h\,Q]$$

Pearson Typ V.

Zur Darstellung muß wieder die *Whittaker*sche Funktion (17) verwendet werden.

1.5.2 Gemischte Kollektivität

Das allgemeine Kollektivschadenmodell in 1.3.1 kann mit einer entsprechenden Überlegung verallgemeinert werden. Statt wie dort die Unfallzahl P_r als Poisson-verteilt anzusehen, sei die Annahme getroffen, infolge Heterogenität oder Ansteckung sei eine andere Vf geeigneter. Wie in 1.5.1 sei als Beispiel die negative Binomialverteilung betrachtet, und zwar (aus Gründen der Vergleichsmöglichkeit mit 1.5.3) in der Form (I 107). Für die Verteilung der total eingetretenen Schadenfälle bedeutet das

$$W_r = \frac{1}{(d+1)^{h/d}} \sum_{j=0}^{r} \binom{\frac{h}{d}+j-1}{j} \left(\frac{d}{1+d}\right)^j f_r^{*j} \qquad \text{(I 148)}$$

$$E_W(z) = \{1 + [1 - E_f(z)]\,d\}^{-h/d}$$

$$\mu_W = h\,\mu_f, \quad \sigma_W^2 = h\,[\sigma_f^2 + (1+d)\,\mu_f^2]$$

$$\sigma_W^2/\mu_W = ({}_f\alpha_2/\mu_f) + d\mu_f \quad \text{als Analogon zu (I 52)}$$

Einige Beispiele gemäß 1.3.2:

A. $\{f_r\}$ geometrische Verteilung.

$$E_W(z) = \left(1 + d\,\frac{1-z}{1-Az}\right)^{-h/d} \qquad \text{(I 149)}$$

$$W_r = \frac{A^r}{(1+d)^{h/d}} \sum_{j=0}^{r} \binom{\frac{h}{d}+j-1}{j} \binom{r-1}{j-1} \left(\frac{d}{1+d}\;\frac{1-A}{A}\right)^j$$

$$\mu_W = \frac{h}{1-A}, \quad \sigma_W^2 = \frac{h}{(1-A)^2}(A+d+1)$$

Eine einfache, handliche Gestalt nimmt die Verteilung im Spezialfall h = d an, d. h. die Unfallzahl ist selbst geometrisch verteilt mit

$$P_r = \frac{1}{d+1}\left(\frac{d}{d+1}\right)^r, \quad r = 0, 1, 2 \ldots$$

Dann ist

$$r = 0: \qquad W_0 = \frac{1}{1+d}$$

$$r \geqq 1: \qquad W_r = \frac{A^r}{1+d} \sum_{j=1}^{r} \binom{r-1}{j-1} \left(\frac{d}{d+1} \frac{1-A}{A}\right)^j$$

$$= \frac{d}{(1+d)^2}(1-A)A^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} \left(\frac{d}{d+1} \frac{1-A}{A}\right)^j = \frac{d}{(1+d)^2}(1-A)\left(\frac{A+d}{1+d}\right)^{r-1}$$

Setzt man noch $(A + d)/(1 + d) = B$, dann lautet das Schlußergebnis

$$W_0 = \frac{1}{1+d}$$
$$W_r = \frac{d}{1+d}(1-B)B^{r-1}, \quad r = 1, 2 \ldots \tag{I 150}$$

Der Aufbau des Verteilungsgesetzes zeigt dasselbe Bild wie das in 1.3.2.F (I 71) besprochene Schema. Hier wird für den Punkt $r = 0$ eine diskrete Wahrscheinlichkeit ausgeschieden, der weitere Abfall erfolgt geometrisch.

Die eF (I 149) geht über in

$$E_W(z) = \frac{1-Az}{1-A} \frac{1-B}{1-Bz} = \frac{1}{d+1}\left[1 + d\frac{(1-B)z}{1-Bz}\right] \tag{I 151}$$

B. $\{f_r\}$ logarithmische Verteilung.

$$E_W(z) = \left[1 - \frac{d}{\log q} \log \frac{1-pz}{q}\right]^{-h/d} \tag{I 152}$$

Eine Verteilung von genau gleichem Charakter trat in (I 141) auf. Das drückt die Tatsache aus, daß in Verallgemeinerung der in (I 60) ausgesprochenen Äquivalenz gilt:

$$\text{Neg. Binomial} \underset{h}{\wedge} \text{Gamma} \sim \text{Neg. Binomial} \vee \text{logarithmisch}$$

$$\mu_W = \frac{hp}{q} \frac{1}{\log(1/q)}, \quad \sigma_W^2 = \frac{hp}{q^2} \frac{1}{\log(1/q)}\left[1 + \frac{pd}{\log(1/q)}\right]$$

C. $\{f_r\}$ P-Verteilung.

$$E_W(z) = [1 + d(1 - z e^{c(z-1)})]^{-h/d} \quad \text{(bei Verschiebung)} \tag{I 153}$$

$$E_W(z) = \left[1 + d\frac{1 - e^{c(z-1)}}{1 - e^{-c}}\right]^{-h/d} \quad \text{(bei Stutzung)}$$

Bei (I 153) z. B. lauten die weiteren charakteristischen Größen

$$W_r = \frac{c^r}{(1+d)^{h/d}} \sum_{j=0}^{r} \binom{\frac{h}{d}+j-1}{j} \frac{j^r}{(r-j)!} \left(\frac{d}{1+d} \frac{e^{-c}}{cj}\right)^j$$

$$\mu_W = h(1+c), \quad \sigma_W^2 = h[(c+1)^2(1+d) + c]$$

Eine weitere Möglichkeit, die Verallgemeinerung von Schema 1.3.3 im Sinne der Ansteckung, sei im nächsten Abschnitt behandelt.

1.5.3 Gemischte Ansteckung

Wir gehen von der in 1.3.3 beschriebenen Urne aus. Wird eine Kugel mit der Ziffer i ($i = 0, 1 \dots k$) gezogen, so sollen anschließend neben der gezogenen Kugel Z_{ij} Kugeln mit der Ziffer j ($j = 0, 1 \dots k$) zurückgelegt werden. Z_{ij} bezeichnet also die Anzahl der zurückgelegten j-Kugeln nach einem „i-Zug", Z_{ji} diejenige der i-Kugeln nach einem „j-Zug". Das auf diese Weise erhaltene allgemeine Schema ist nichts anderes als eine Verschmelzung der beiden Schemata 1.4.1 und 1.3.3 und für nicht näher spezifizierte Z_{ij} ziemlich kompliziert. Wir beschränken uns auf die Angabe einiger einfacher Beispiele.

A. Schematische Ansteckung.

Der Begriff der schematischen Ansteckung trat bereits in 1.4.2 auf. Im vorliegenden gemischten Modell bedeutet er, daß

$$Z_{ij} = \Delta_j\,,\ j = 0, 1 \dots k, \tag{I 154}$$

d. h. ganz unabhängig davon, was für ein Ergebnis der letzte Zug zeitigte, werden jeweils $\Delta_0, \Delta_1 \dots \Delta_k$ Kugeln der Ziffern $0, 1 \dots k$ in die Urne zurückgelegt. Bei diesem schematischen Vorgehen ist es wieder zum vornherein möglich, die sich ständig ändernde Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit der Ziffer j zu ziehen, anzugeben. Sie beträgt im v-ten Zug

$$p_j^{[v]} = \frac{N_j + (v-1)\Delta_j}{N + (v-1)\Delta} \text{ mit } \Delta = \sum_{j=0}^{k} \Delta_j\,, \quad v = 1, 2 \dots n$$

Der zu (I 100) analoge Grenzübergang für seltene Ereignisse und schwache Ansteckung

$$n \to \infty, \quad p_j^{[v]} \to 0 \text{ mit } \sum_{v=1}^{n} p_j^{[v]} = \lambda_j$$

führt, wie zu erwarten war, zu einer multiplen P-Verteilung, genau gleich wie sie aus dem Kollektivschadenmodell ohne Ansteckung hervorging [Formel (I 75) bzw. (I 76) für $k \to \infty$]. Eine schematische Veränderung des Urneninhalts ist also auch hier im Endergebnis ohne Einfluß.

Das Modell ist mit einem unwesentlich anderen Ansatz in [58] enthalten, wo auch der Grenzübergang streng durchgeführt wird.

B. Das erweiterte *Pólya/Eggenberger*-Modell.

Wie beim Modell 1.4.3 werde die Voraussetzung getroffen, daß stets Δ Kugeln von der Farbe der gezogenen Kugel zusätzlich zurückgelegt werden, d. h. es sei

$$Z_{ij} = \begin{cases} \Delta & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{I 155}$$

Wählt man das Verfahren von 1.3.3, um erst die Wahrscheinlichkeit, in n Zügen $n_0, n_1 \dots n_k$ Kugeln mit den Ziffern $0, 1 \dots k$ zu ziehen, zu berechnen, dann folgt

$$W_{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_0!\,n_1!\dots n_k!}\;\frac{N_0(N_0+\Delta)\dots[N_0+(n_0-1)\Delta]\,N_1(N_1+\Delta)\dots[N_k+(n_k-1)\Delta]}{N(N+\Delta)\dots[N+(n-1)\Delta]}$$

$$= \frac{1}{\binom{\frac{N}{\Delta}+n-1}{n}} \prod_{j=0}^{k} \binom{\frac{N_j}{\Delta}+n_j-1}{n_j}$$

$$W_r = \sum_{n_1+\dots+kn_k=r} W_{n_1,\dots,n_k}$$

Wir gehen sofort zum *Pólya*schen Grenzübergang über, setzen zu diesem Zwecke

$$N_0/N = q\,,\ N_j/N = p_j\,,\ j = 1\,,2\ldots k\,,\ \Delta/N = \delta \tag{I 156}$$

und verlangen

$$n \to \infty\,,\ p_j \to 0\,,\ \delta \to 0 \text{ mit } n\,p_j = h_j\,,\ n\,\delta = d \tag{I 157}$$

Einige einfache Umformungen lassen erkennen, daß

$$W_{n_1,\ldots,n_k} = \frac{\binom{\frac{q}{\delta}+n_0-1}{n_0}}{\binom{\frac{1}{\delta}+n-1}{n}} \prod_{j=1}^{k} \binom{\frac{p_j}{\delta}+n_j-1}{n_j}$$

$$\to \prod_{j=1}^{k} \binom{\frac{h_j}{d}+n_j-1}{n_j} \left(\frac{d}{d+1}\right)^{n_j} \frac{1}{(d+1)^{h_j/d}}\,, \tag{I 158}$$

d. h. wie bei 1.3.3 ein k-faches Produkt von P-Verteilungen, resultiert hier ein k-faches Produkt negativer Binomialverteilungen. Läßt man noch $k \to \infty$ streben, so ergibt sich als endgültige Grenzverteilung

$$W_r = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{\infty} h_j} \sum_{n_1+\cdots+r n_r = r} \binom{\frac{h_1}{d}+n_1-1}{n_1} \cdots \binom{\frac{h_r}{d}+n_r-1}{n_r} \left(\frac{d}{d+1}\right)^{\sum_{j=1}^{r} n_j}\,, \tag{I 159}$$

eine multiple negative Binomialverteilung.

$$\begin{aligned} W_0 &= \left(\frac{1}{d+1}\right)^{\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{\infty} h_j} \\ W_1 &= W_0 \frac{h_1}{d+1} \\ W_2 &= W_0 \left[\frac{h_2}{d+1} + \frac{1}{2}\,\frac{h_1(h_1+d)}{(d+1)^2}\right] \\ &\;\vdots \end{aligned} \tag{I 160}$$

Deren eF lautet

$$E_W(z) = \prod_{j=1}^{\infty} [1 + (1 - z^j)\,d]^{-h_j/d}\,, \tag{I 161}$$

Mittelwert und Streuung sind

$$\mu_W = \sum_{j=1}^{\infty} j\,h_j\,, \quad \sigma_W^2 = (1+d) \sum_{j=1}^{\infty} j^2\,h_j$$

Wie schon bei (I 77) läßt sich das am einfachsten aus der Tatsache herleiten, daß die zugehörige stochastische Variable ξ als Summe

$$\xi = \xi_1 + 2\,\xi_2 + \cdots + k\,\xi_k + \cdots$$

von negativ binomial verteilten stochastisch unabhängigen Variablen dargestellt werden kann. Die unendlich vielen Parameter der Verteilung (I 159) lassen sich wieder spezialisieren, beispielsweise führt

$$h_1 = h \neq 0\,,\; h_2 = h_3 = \cdots = 0$$

zum Ansteckungsmodell (I 107) ohne Kollektivität.

$$h_1\,,\; h_2 \neq 0\,, h_3 = h_4 = \cdots = 0$$

ergibt

$$W_r = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{\frac{1}{d}(h_1+h_2)} \sum_{n_1+2n_2=r} \binom{\frac{h_1}{d}+n_1-1}{n_1}\binom{\frac{h_2}{d}+n_2-1}{n_2}\left(\frac{d}{d+1}\right)^{n_1+n_2} \qquad \text{(I 162)}$$

Anderseits kann man die h_j wieder (wie die λ_j in 1.3.3) nach einem einfachen Gesetz abnehmen lassen. Die entstehenden Verteilungen sind allerdings nicht mehr so einfach wie beim gewöhnlichen Kollektivschadenmodell.

Beispiel:

$$h_j = \alpha p^j/j$$

$$E_W(z) = \prod_{j=1}^{\infty} [1 + d(1 - z^j)]^{-\frac{\alpha}{d}\frac{p^j}{j}}$$

$$\mu_W = \alpha \frac{p}{1-p}\,, \quad \sigma_W^2 = \alpha(1+d)\frac{p}{(1-p)^2}$$

Es wäre ein Irrtum zu glauben, daß in Analogie zu dem Seite 29 ausgesprochenen Satz zwischen den Modellen 1.5.2 und 1.5.3.B neuerdings ein einfacher Zusammenhang, etwa von der Form $h_j = hf_j$, bestände. Ein Blick auf die beiden eF verrät das Gegenteil. Um eine Identität zu erreichen, müßte

$$\prod_{j=1}^{\infty} [1 + d(1 - z^j)]^{-h_j/d} \equiv [1 + d(1 - \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^j)]^{-h/d}$$

oder

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j \log[1 + d(1 - z^j)] \equiv h \log[1 + d(1 - \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^j)]$$

sein. Nur für kleine d, falls die Entwicklung des Logarithmus nach dem 1. Glied abgebrochen werden kann, stimmen beide Seiten der Gleichung für $h_j = hf_j$ überein, andernfalls sind sie voneinander verschieden.

C. Ein neues, das Unfallgeschehen besser widerspiegelndes Schema.

Das erweiterte *Pólya/Eggenberger*-Modell beruht auf der Annahme, daß nach dem Zug einer j-Kugel $\Delta + 1$ Kugeln dieser Art zurückgelegt werden. Das mag für gewisse Interpretationsabsichten nützlich sein, im Falle des Unfallgeschehens scheint die Voraussetzung jedoch völlig unrealistisch. Es ist wohl kaum sinnvoll zu behaupten, daß z. B. ein Viererunfall (Ereignis mit vier Schadenfällen) die Wahrscheinlichkeit für Viererunfälle erhöhe. Um diesen offensichtlichen Mangel zu beseitigen, sei das Modell (I 155) folgendermaßen abgeändert:

Auch hinfort sollen beim Zug einer 0-Kugel (kein Schadenereignis) Δ 0-Kugeln zusätzlich zurückgelegt werden; hingegen werden beim Zug irgendeiner der restlichen Kugeln zwar ebenfalls total Δ Kugeln eingelegt, diese aber proportional zur Kugelanzahl N_j auf alle Sorten (außer 0) verteilt. Das hat zur Folge, daß beim Eintritt *irgendeines* Kollektivunfalls die Unfallwahrscheinlichkeit generell für alle Unfallmöglichkeiten etwas erhöht wird.

Das so in Worten beschriebene Schema läßt sich ausdrücken durch

$$Z_{ij} = \begin{cases} \Delta & i = 0,\, j = 0 \\ 0 & i = 0,\, j \neq 0 \text{ und } i \neq 0,\, j = 0 \\ N_j\, \Delta/(N - N_0) & i \neq 0,\, j \neq 0 \end{cases} \tag{I 163}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung leitet sich wie folgt ab (Summationen sind stets von 1 bis k zu erstrecken):

$$W_{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_0!\, n_1! \dots n_k!} \cdot$$

$$\cdot \frac{N_0 (N_0 + \Delta) \dots [N_0 + (n_0 - 1)\Delta]\, N_1^{n_1} N_2^{n_2} \dots N_k^{n_k} \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Sigma N_j}\right)\left(1 + \frac{2\Delta}{\Sigma N_j}\right) \dots \left(1 + \frac{\Sigma n_j - 1}{\Sigma N_j}\Delta\right)\right]}{N (N + \Delta) \cdots [N + (n-1)\Delta]}$$

$$= \frac{\binom{\frac{N_0}{\Delta} + n_0 - 1}{n_0}}{\binom{\frac{N}{\Delta} + n - 1}{n}} \frac{N_1^{n_1} \cdots N_k^{n_k}}{n_1! \cdots n_k!} \left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Sigma N_j}\right) \cdots \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{\Sigma n_j - 1}{\Sigma N_j}\right)\right]$$

$$= \frac{\binom{\frac{N_0}{\Delta} + n_0 - 1}{n_0}}{\binom{\frac{N}{\Delta} + n - 1}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\Delta} \Sigma N_j + \Sigma n_j\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\Delta} \Sigma N_j\right)} \prod_{v=1}^{k} \left(\frac{N_v}{\Sigma N_j}\right)^{n_v} \frac{1}{n_v!},$$

und mit den gleichen Maßnahmen wie in (I 156) und (I 157) ergibt sich

$$W_{n_1,\dots,n_k} = \frac{\binom{\frac{q}{\delta} + n_0 - 1}{n_0}}{\binom{\frac{1}{\delta} + n - 1}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\delta} \Sigma p_j + \Sigma n_j\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\delta} \Sigma p_j\right)} \prod_{v=1}^{k} \left(\frac{p_v}{\Sigma p_j}\right)^{n_v} \frac{1}{n_v!}$$

$$\to \frac{d^{\Sigma n_j}}{(d+1)^{\Sigma n_j + \frac{1}{d}\Sigma h_j}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{d} \Sigma h_j + \Sigma n_j\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{d} \Sigma h_j\right)} \prod_{v=1}^{k} \left(\frac{h_v}{\Sigma h_j}\right)^{n_v} \frac{1}{n_v!},$$

wobei der Grenzwert des ersten Quotienten bereits aus (I 158) hervorgeht. Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung hat somit die Form ($k \to \infty$)

$$W_r = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{\infty} h_j} \sum_{n_1 + \dots + r n_r = r} \binom{\frac{1}{d}\sum_1^r h_j + \sum_1^r n_j - 1}{\sum_1^r n_j} \left(\sum_1^r n_j\right)! \prod_{v=1}^{r} \left(\frac{d}{d+1} \frac{h_v}{\sum_1^r h_j}\right)^{n_v} \frac{1}{n_v!}, \tag{I 164}$$

ein Gebilde, das allerdings im Vergleich zu (I 159) reichlich kompliziert anmutet.

$$W_0 = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{\frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j}$$

$$W_1 = W_0 \frac{h_1}{d+1}$$

$$W_2 = W_0 \left[\frac{h_2}{d+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{d+1}\right)^2 \frac{\sum\limits_{j=1}^{2} h_j + d}{\sum\limits_{j=1}^{2} h_j}\right]$$

$$\vdots$$

Ein Blick auf (I 160) zeigt, daß die ersten beiden Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen. W_2 wird aber nur gleich, falls

$$\left(\frac{h_1}{d+1}\right)^2 \frac{h_1 + h_2 + d}{h_1 + h_2} = \frac{h_1(h_1 + d)}{(d+1)^2},$$

woraus notwendigerweise $h_2 = 0$ folgen muß. Desgleichen kann man aus den Gleichungen für W_3 das Verschwinden von h_3 folgern usw.

Umgekehrt ist sofort ersichtlich, daß für

$$h_1 = h, \; h_2 = h_3 = \ldots = 0$$

auch dieses Modell in die gewöhnliche negative Binomialverteilung

$$\binom{\frac{h}{d} + r - 1}{r} d^r (d+1)^{-r-(h/d)}$$

übergeht.

Notwendig und hinreichend für die Indentität der Modelle B und C ist folglich das Verschwinden sämtlicher Parameter, ausgenommen h_1.

Dem Fall (I 162) entspricht hier die Verteilung

$$W_r = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{\frac{1}{d}(h_1+h_2)} \sum_{n_1+2n_2=r} \binom{\frac{1}{d}(h_1+h_2) + n_1 + n_2 - 1}{n_1 + n_2} \left(\frac{d}{d+1}\,\frac{h_1}{h_1+h_2}\right)^{n_1+n_2} \frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!},$$

woraus die Verschiedenheit des Aufbaus besonders klar hervorgeht.

Kapitel II

Die Verteilung der Schadenhöhe

Die Untersuchung der Verteilung der Schadenhöhe bietet weniger interessante Aspekte als diejenige der im letzten Kapitel zur Behandlung gelangten Schadenfälle. Wir beschränken uns auf die Wiedergabe einiger allgemeiner Gedanken im ersten und diverser Beispiele im zweiten Abschnitt.

2.1 Allgemeine Betrachtungen

Jedes Schadenereignis zieht eine gewisse Schadensumme X nach sich, die je nach den Verpflichtungen ganz oder zum Teil durch die eingegangene Versicherung gedeckt wird. Die Schadenhöhe ist, von wenigen Ausnahmen abgesehen, ebenfalls eine stochastische Variable, deren Vf mit H(x) bezeichnet werde.
Ihrer Definition nach könnte die Variable X natürlich einer diskreten Verteilung folgen. Infolge der großen Spannweite der möglichen Werte ist es jedoch für eine repräsentative Statistik unumgänglich, mehr oder weniger umfassende, willkürliche Gruppierungen vorzunehmen. Dieser Tatsache paßt man sich am besten dadurch an, daß man zum vornherein von einer stetig verteilten Grundgesamtheit mit der Dichte h(x) ausgeht, wie es sich in der Literatur auch eingebürgert hat.
Was für Forderungen werden an die Vd h(x) gestellt? Da X nur positive Werte annehmen kann, soll die Verteilung unilateral sein. Des weiteren hat man, wie aus Statistiken hervorgeht, im allgemeinen mit einer großen Streuung und Schiefe zu rechnen [48]. Verteilungen mit verschwindender Schiefe sind zur Darstellung der Schadenhöhe in der Mehrzahl der Fälle ungeeignet. Aus praktischen Gründen wird vielfach die an und für sich unwesentliche Annahme getroffen, die mittlere Schadensumme sei gleich der Recheneinheit

$$\mu_H = \int_{B_H} x\, h(x)\, dx = 1\,,$$

was eine Bedingungsgleichung für die Parameter von h(x) ergibt.
Die weiteren Überlegungen zur Wahl der Funktion h(x) haben gewisse Parallelen zu den Gedanken, die in 1.2 in Bezug auf die Strukturfunktion geäußert worden sind; die Begründung ist jedoch verschieden.

A. Das übliche Verfahren.

Die übliche, einfachste Methode besteht darin, eine längs der ganzen positiven Achse definierte Dichte zu wählen. Dabei ergeben sich zwei Möglichkeiten:

$$(1)\quad h(0) = 0$$
$$(2)\quad h(0) \neq 0$$

Unter der Annahme, daß Unfallereignisse, welche der Gesellschaft keine Kosten verursachen, nicht eintreten bzw. nicht als Unfälle zählen, scheint (1) vernünftig zu sein. Da allerdings Unfälle mit geringen Kosten nicht allzu selten aufzutreten brauchen, wird daraus im allgemeinen ein steiler Anstieg der Funktion h(x) resultieren. Es ist daher von Fall zu Fall zu entscheiden, ob die Wirklichkeit nicht besser durch eine Dichte vom Typus (2) wiedergegeben wird, wo die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Schadenfall aus dem Kosteninterval [0, Δx] zu erhalten, von der Größenordnung Δx [statt o(Δx)] ist. Fall (2) ist vielfach (siehe Beispiele) als Spezialfall implizit bereits in (1) enthalten.

B. Nach oben begrenzte Schadenhöhen.

Das Versicherungsunternehmen hat ein Interesse daran, daß die Funktion h(x) vor allem für große Kosten ein möglichst getreues Bild der empirisch zu erwartenden Ergebnisse vermittelt. Eine Begrenzung der Schadenhöhe darf deshalb nicht willkürlich vorgenommen werden, sollen sich keine schwerwiegenden Fehler einstellen. Es gibt jedoch Versicherungsarten, bei denen zum vornherein bekannt ist, daß ein gewisser Schaden x_1 nicht überschritten werden kann, sei es weil das versicherte Objekt den Wert x_1 hat (z.B. Feuerversicherung, Totalschaden x_1 bei völliger Zerstörung des Objekts), sei es weil in der Versicherungspolice ein Maximalbetrag festgelegt ist (z. B. Reisegepäckversicherung, Diebstahlversicherung u. ä.). In solchen Fällen ist eine Stutzung der Verteilung nicht nur wünschenswert sondern angezeigt. Das kann auf zwei Arten geschehen:

(I) Eigentliche Stutzung im Punkt x_1.

Nach (61) kann die Verteilung h(x) auf das Intervall $0 \leqq x \leqq x_1$ reduziert werden:

$$\begin{aligned} h_I(x) &= \frac{h(x)}{\int_0^{x_1} h(x)\,dx} && 0 \leqq x \leqq x_1 \\ &= 0 && x > x_1 \end{aligned} \tag{II 1}$$

Dadurch wird die Wahrscheinlichkeitsmasse des Intervalls (x_1, ∞) gleichmäßig auf das verbleibende Intervall $[0, x_1]$ verteilt. Das scheint in der ersten der oben erwähnten Möglichkeiten ein plausibles Modell abzugeben, nicht hingegen für die zweite. Hier werden nämlich die Werte in $0 \leqq x < x_1$ in normaler Weise angenommen, der Maximalschaden x_1 jedoch überdurchschnittlich stark belastet, da ja für jeden Fall mit $X \geqq x_1$ der Betrag x_1 ausgeschüttet wird. Dieser Tatsache trägt (I) nicht Rechnung (am gleichen Übel würde übrigens auch eine in $[0, x_1]$ definierte ungestutzte Verteilung kranken), dagegen

(II) Konzentration auf den Punkt x_1.

An Stelle der gleichmäßigen Belegung des ganzen Restintervalls wie in (I) konzentriert man die Masse von (x_1, ∞) auf den Punkt x_1.

$$\begin{aligned} h_{II}(x) &= h(x) && 0 \leqq x < x_1 \\ &= \int_{x_1}^{\infty} h(x)\,dx && x = x_1 \\ &= 0 && x > x_1 \end{aligned} \tag{II 2}$$

Der rechnerische Nachteil eines solchen Modells liegt natürlich darin, daß die Verteilung $h_{II}(x)$ stetige und diskrete Elemente enthält.

C. Nach unten begrenzte Schadenhöhen.

Ähnliche Überlegungen lassen sich für die Region der kleinen x anstellen. Die Vernachlässigung der kleinen Schadensummen kann von zwei Ursachen herrühren.
Einmal wäre es möglich, daß eine Vertragsklausel die Auszahlung einer Summe erst von einem bestimmten Minimalbetrag x_0 an vorsieht. In diesem eher seltenen Fall wird man eine in (x_0, ∞) verschobene oder auf dieses Intervall gestutzte Vf zu Hilfe ziehen. Überwiegt, was zu erwarten ist, bei einer solchen Bestimmung der Schaden x_0, käme die Anwendung von B(II) in Betracht.

Der zweite Grund ist anderer Natur. Wie schon in B. angetönt, ist man vor allen Dingen an einer guten Angleichung im Intervall (x_0, ∞) interessiert. Es zeigt sich nun zumeist, daß sich damit in einem nicht allzu komplizierten Modell nicht auch eine gute Anpassung im Restbereich erzielen läßt. Die Miteinbeziehung dieser Werte verfälscht aber auch das Bild der Verteilung oft in unerwünschter Weise. Das kommt vor allem daher, daß bei kleinen Schadenbeträgen die Stichproben nicht repräsentativ genug sind, da die Erfahrung lehrt, daß verschiedene Schadenereignisse gar nicht zur Anzeige gebracht werden. (Man denke an die Motorfahrzeugversicherung und das damit verbundene Bonussystem für unfallfreies Fahren.) Da der Anteil dieser Ereignisse, am Gesamtschaden gemessen, aber gering ist, läßt man sie beiseite und begnügt sich mit einer im Punkte x_0 nach unten gestutzten Verteilung für den interessanten Teil.
Es wäre selbstverständlich auch möglich, für die Kleinschadenregion eine zweite, nach oben gestutzte Vf anzusetzen. In A. nimmt man die Ungenauigkeit der Anpassung im Bereich für kleine x in Kauf. Es versteht sich von selbst, daß für gewisse Belange eine Kombination von B. und C. am vorteilhaftesten ist.
Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß in manchen Versicherungszweigen außer der Schadenhöhe andere stochastische Maßzahlen dazu dienen können, die Unfallschwere zu charakterisieren. So wird in der Unfallversicherung häufig die Unfalldauer = Anzahl verlorener Arbeitstage [66] als maßgebliche Größe verwendet, welche natürlich mit der Schadensumme eng zusammenhängt. Kleine Dauer — kleine Kosten, große Dauer — große Kosten wird als allgemeiner Grundsatz gelten. Besonders angepaßt ist die Anwendung einer derartigen Maßzahl dort, wo im Prinzip eine zeitliche Länge des Schadenereignisses versichert ist, wie z. B. in der Krankentaggeldversicherung oder, um einen modernen Aspekt zu berühren, in der Schlechtwetter-Versicherung. Die oben skizzierten Punkte sind auch hier stets in Betracht zu ziehen.

2.2 Beispiele

Eine empirisch gegebene Schadensummenverteilung könnte immer beliebig genau angenähert werden, doch ist nicht nur wegen des zu erwartenden recht komplizierten Ausdrucks sondern mehr noch aus theoretischen Erwägungen davon abzuraten, allzu viele Parameter aus den Daten zu schätzen. Im Hinblick auf die im nächsten Kapitel mit h(x) vorzunehmenden Faltungsoperationen wird natürlich auch eine relative Einfachheit der Funktion nicht gering geachtet. Es sei im folgenden auf die wichtigsten Möglichkeiten hingewiesen.

2.2.1 *Feste Risikosummen*

Der einfachste Fall, der sich jedoch größtenteils auf die Belange der Lebensversicherung beschränkt, schreibt zum vornherein vor, daß bei Eintreffen des Schadenereignisses eine feste, bestimmte Summe ausbezahlt wird. Die Schadenhöhe ist also keine stochastische Variable mehr. Sind alle Risikosummen gleich groß (= 1), so lautet die Vf der Variablen X:

$$H(x) = \varepsilon(x-1) = \begin{cases} 1 & x \geqq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \qquad \text{(II 3)}$$

Sind verschiedene Summen $x_1, x_2 \dots$ möglich, deren Eintreffen durch die Wahrscheinlichkeiten $h_j = W(X = x_j)$ geregelt wird, so verallgemeinert sich (II 3) zu

$$H(x) = \sum_j h_j\, \varepsilon(x - x_j) \qquad \text{(II 4)}$$

Dieser diskrete Fall ist leicht überblickbar und soll nicht weiter diskutiert werden.

2.2.2 *Beispiele zum üblichen Verfahren*

Es liegt nicht im Sinn dieser Ausführungen, auf Vollständigkeit Anspruch zu erheben, doch gibt die folgende Zusammenstellung unter Beschränkung auf höchstens zweiparametrige Verteilungen wohl die meisten in Frage kommenden Modelle wieder. Ausgang unserer Betrachtung bilde die Erwähnung der

A. Gamma-Verteilung (53),

die bereits in [16] zur Darstellung der Schadenhöheverteilung Verwendung findet. Am selben Ort und in [48] ist von der guten Angleichung durch die

B. logarithmische Normalverteilung (47)

die Rede. Beide Verteilungen sind im Anhang charakterisiert. Sie weisen in ihrem Verlauf große Ähnlichkeit auf, so daß aus Gründen der leichteren rechnerischen Handhabung oft mit A. an Stelle von B. gearbeitet wird. Es soll hier immerhin auf zwei Wesensmerkmale hingewiesen werden, die Beachtung verdienen.

1. Bei gleichem Mittelwert und gleicher Streuung weist die logarithmische Normalverteilung stets die größere Schiefe auf.

Beweis: Aus (48) und (55) folgen die Gleichungen

$$\alpha/a = \delta\,\theta\,, \quad \alpha/a^2 = \delta^2\,\theta^2(\theta^2 - 1)$$

oder, aufgelöst nach δ und θ,

$$\delta = \frac{\alpha}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\,, \quad \theta = \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

Eingesetzt in (49) ergibt sich für die Schiefe der Verteilung (47)

$$_{LN}\gamma_1 = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} + 2\right)\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha} - 1} = \left(3 + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha}} > \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = {}_{\Gamma}\gamma_1 \qquad \text{(II 5)}$$

2. Bei der Γ-Verteilung liegen die Wendepunkte der Kurve symmetrisch zum Modalwert, nicht hingegen bei der logarithmischen Normalverteilung.

Beweis: Zweimalige Differentiation von (53) und Auflösung der gleich o gesetzten Gleichung nach x ergibt

$$x_{1,2} = \frac{1}{a}\left(\alpha - 1 \pm \sqrt{\alpha - 1}\right) = x_0 \pm \frac{x_0}{\sqrt{\alpha - 1}} \qquad (\alpha > 1)\,,$$

während bei (47) dasselbe Vorgehen in die Formel

$$x_{1,2} = \delta\,\theta^{-3 \pm \sqrt{1 + (2/\log\theta)}}$$

ausmündet.

Neben A. und B. verdient als nächste die

C. *Pearson* Typ V-Verteilung (58)

besonderes Interesse. Ein gewisser Nachteil liegt natürlich in der Existenzbedingung für die Momente, ansonst ist die Verteilung ebensogut anwendbar wie die anderen und besitzt auch einen ähnlichen Verlauf. Eigenschaft 2 gilt für C. ebenfalls, da (zur

Unterscheidung von den Parametern in A. schreiben wir hier $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$)

$$x_{1,2} = \frac{\bar{a}}{\bar{\alpha}+1}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}+2}}\right) = x_0 \pm \frac{x_0}{\sqrt{\bar{\alpha}+2}}$$

Setzt man zum Vergleich mit (II 5)

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\bar{a}}{\bar{\alpha}-1}, \quad \frac{\alpha}{a^2} = \frac{\bar{a}^2}{(\bar{\alpha}-1)^2(\bar{\alpha}-2)},$$

d.h. $\bar{a} = (\alpha/a)(\alpha+1)$, $\quad \bar{\alpha} = \alpha + 2$,

so ergibt sich als Schiefe ($\bar{\alpha} > 3$ oder $\alpha > 1$ vorausgesetzt)

$${}_{V}\gamma_1 = 4\frac{\sqrt{\bar{\alpha}-2}}{\bar{\alpha}-3} = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

Da jedoch, wie durch eine einfache Umformung hervorgeht, stets

$$\left(3+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{4\sqrt{\alpha}}{\alpha-1},$$

erhält man in Erweiterung von (II 5)

$${}_{\Gamma}\gamma_1 < {}_{LN}\gamma_1 < {}_{V}\gamma_1 \tag{II 6}$$

Die Verteilung (58) weist also von den drei betrachteten Verteilungen bei gleichem Mittelwert und gleicher Streuung die größte Schiefe auf.

Wie die Typ V-Verteilung hat auch die

D. *Pearson* Typ VI-Verteilung (60)

den Nachteil, daß die Existenz ihrer Momente nicht zum vornherein gesichert ist. Es lassen sich mit ihr analoge Überlegungen wie zuvor anstellen. Wir wollen nur erwähnen, *daß unter den gleichen Voraussetzungen* wie in B. und C. für die Schiefe der Ausdruck

$${}_{VI}\gamma_1 = 2(2p+q-1)\sqrt{\frac{q-2}{p(p+q-1)}} = 2(2\alpha+a)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

berechnet werden kann. Dieser hängt also von beiden Parametern ab, doch ist leicht zu sehen, daß für $\alpha > 2$, unabhängig von a, ${}_{VI}\gamma_1 > {}_{V}\gamma_1$ ist, wir also eine Verteilung von noch ausgeprägterer Schiefe vor uns haben.
Aus der Verteilung D. geht durch die Spezialisierung $p = 1$ ein wichtiges einparametriges Modell, eine Abart der

E. *Pareto*-Verteilung (67)

hervor. Dieses

$$h(x) = q(x+1)^{-q-1}$$

entsteht aus (67), indem man $x_0 = 1$ setzt sowie eine Verschiebung um 1 nach links vornimmt. Wir werden der Pareto-Verteilung nochmals im nächsten Paragraphen begegnen. Sie erweist sich in vielen Fällen für eine grobe Annäherung als recht brauchbar und benötigt keinen großen Rechenaufwand, ist jedoch, genau wie der aus A. folgende Spezialfall $\alpha = 1$, die

F. Exponentialverteilung (57),

mit nur einem Parameter wenig flexibel. Die Exponentialverteilung bietet wohl die einfachste Möglichkeit, die Schadenhöhen durch eine analytische Kurve darzustellen. Sie ist aus diesem Grunde (siehe auch nächstes Kapitel) sehr beliebt und findet sich in vielen Artikeln zitiert und angewendet [7, 24, 44, 68]. Ihre Eigenschaften lassen sich aus (53ff.) erkennen, insbesondere ist die Schiefe im Gegensatz zur Verteilung E. unabhängig vom Parameter (= 2).

Neben der Γ-Verteilung seien zwei weitere Verallgemeinerungsmöglichkeiten der Verteilung (57) vorgeschlagen. Die erste, ein Spezialfall der erweiterten Typ VI-Verteilung (I 24), kann gleichzeitig auch als Verallgemeinerung von E. aufgefaßt werden. Setzt man in (I 24) $p = 1$, so erhält man eine

G. zweiparametrige *Pareto*-Verteilung,

nämlich

$$h(x) = \frac{q}{r}\left(1 + \frac{x}{r}\right)^{-(q+1)}$$

oder mit

$$1/r = a\alpha, \quad 1/q = \alpha$$

$$h(x) = a(1 + a\alpha x)^{-[1+(1/\alpha)]}, \quad a > 0, \quad \alpha \geqq 0 \tag{II 7}$$

Für kleine α ($\alpha \to 0$) geht G. in F. über, während E. durch $\alpha = 1/a$ erreicht wird. Die Verteilung (II 7) ist vom gleichen monoton fallenden J-Typus wie E. und F., besitzt aber dank ihrer zwei Parameter einen nicht zu verachtenden Vorteil. Zur Existenz des k-ten Moments

$${}_{H}\alpha_k = (1/a)^k\, k!\, \frac{1}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha k)}$$

muß notwendigerweise $\alpha < 1/k$ sein, so daß, falls sich die Verteilung nicht stark von der Exponentialverteilung unterscheidet, die ersten Momente sicher definiert sind.

$$\mu_H = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\alpha}, \quad \sigma_H^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{(1-\alpha)^2(1-2\alpha)},$$

$${}_{H}\gamma_1 = 2\,\frac{\alpha+1}{1-3\alpha}\sqrt{1-2\alpha}$$

Vergleicht man die Schiefe mit derjenigen der üblichen Verallgemeinerung, der Γ-Verteilung, so sieht man, daß unter Gleichsetzung der beiden ersten Momente die Ungleichung

$${}_{\Gamma}\gamma_1 \leqq {}_{H}\gamma_1 \tag{II 8}$$

gilt. Das Gleichheitszeichen wird im Fall $\alpha_{(\Gamma)} = 1, \alpha = 0$ (d.h. Exponentialverteilung) angenommen.

Eine zweite Möglichkeit, die einparametrige Verteilung F. zu erweitern, bildet die

H. *Weibull*-Verteilung [73],

die andernorts, weil sie bei der Verteilung des extremalen Wertes einer Stichprobe auftritt, auch Extremwertverteilung genannt wird [40]. Wir benützen hier eine auf das

Intervall $(0, \infty)$ transformierte *Weibull*-Verteilung mit der Vf

$$H(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}(ax)^\alpha}, \quad a, \alpha > 0 \tag{II 9}$$

bzw. Dichte

$$h(x) = a(ax)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\alpha}(ax)^\alpha}$$

Für $\alpha = 1$ geht die Verteilung in die Exponentialverteilung über.

Die Verteilung (II 9) ist wie A. — D. im allgemeinen unimodal und besitzt, nebenbei gesagt, die seltene Eigenschaft, daß alle wichtigen Mittelmaße existieren, voneinander verschieden und explizit berechenbar sind.

Modalwert $\quad x_0 = \frac{1}{a}(\alpha - 1)^{1/\alpha}, \quad \text{für } \alpha > 1$

Mittelwert $\quad \mu_H = \frac{1}{a}\alpha^{1/\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$

Mediane $\quad \zeta_0 = \frac{1}{a}(\alpha \log 2)^{1/\alpha}$

Für die Nullpunktmomente ergibt sich allgemein

$$_H\alpha_k = \left(\frac{\alpha^{1/\alpha}}{a}\right)^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$$

und daher

$$\sigma_H^2 = \left(\frac{\alpha^{1/\alpha}}{a}\right)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

Es ist sehr wohl denkbar, daß die *Weibull*-Verteilung als verallgemeinerte Exponentialverteilung zur Darstellung von Schadenhöhen gute Dienste leisten kann.
In den Verteilungen E. — G. war, ohne daß speziell darauf hingewiesen worden wäre, die Voraussetzung (2) von S. 57 erfüllt. Alle diese Verteilungen sind jedoch monoton fallend; es soll daher zum Schluß noch auf die im Nullpunkt

I. gestutzte Normalverteilung (62)

hingewiesen werden, eine Verteilung vom Glockentypus mit der erwähnten Eigenschaft. Wesentliches über sie steht im Anhang; sie wird dann von Nutzen sein, wenn die empirische Statistik eine ausgeprägte Symmetrie um den Modalwert aufzeigt.

2.2.3 *Beispiele für begrenzte Schadenhöhen*

Nach den ausführlichen Darlegungen in 2.2.2 können wir uns hier kurz fassen.

Ist die Schadenhöhe nach oben beschränkt, können alle in A. — I. besprochenen Modelle zur Darstellung zu Hilfe gezogen werden, wenn man die entsprechenden Verteilungen in einem geeigneten Punkt x_1 nach (I) oder (II) enden läßt. Die dadurch entstehenden Veränderungen sind einfacher Natur, als Beispiel seien die Formeln für die Exponentialverteilung wiedergegeben.

Stutzung nach (II 1)

$$h_I(x) = \frac{a}{1 - e^{-ax_1}} e^{-ax} \qquad x \leqq x_1$$
$$= 0 \qquad x > x_1 \tag{II 10}$$

mit $\mu_{H_I} = \frac{1}{a} - \frac{x_1}{e^{ax_1} - 1}, \quad \sigma^2_{H_I} = \frac{1}{a^2} - \frac{x_1^2 e^{ax_1}}{(e^{ax_1} - 1)^2}$

Konzentration nach (II 2)

$$h_{II}(x) = a e^{-ax} \qquad x < x_1$$
$$= e^{-ax_1} \qquad x = x_1 \tag{II 11}$$
$$= 0 \qquad x > x_1$$

mit $\mu_{H_{II}} = \frac{1}{a} + x_1 e^{-ax_1}, \quad \sigma^2_{H_{II}} = \frac{1}{a^2} + x_1 e^{-ax_1}\left[x_1(1 - e^{-ax_1}) - \frac{2}{a}\right]$

Neu ist zusätzlich eine Beta-Verteilung 1. Art (I 16) mit den Endpunkten $(0, x_1)$ in Betracht zu ziehen.
Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang auch das Feuerversicherungsmodell, das in *Cramérs* Arbeit [24] Verwendung findet:

$$h(x) = A e^{-ax} + B(x + b)^{-\beta} \qquad x \leqq 500$$
$$= 0 \qquad x > 500$$

Wir sehen darin allerdings bereits 4 Parameter (die Größen A, B, α, β, b sind durch die Beziehung $\int_0^{500} h(x)\,dx = 1$ miteinander verknüpft), was, wie wir früher ausgeführt haben, nicht unbedingt immer von Vorteil ist. Das Modell ist deswegen interessant, weil darin zwei Verteilungen (im Prinzip E. und F. aus 2.2.2) superponiert werden. Diese Methode ist natürlich auch ohne Stutzung anwendbar und kann gute Resultate zeitigen. Die eigentliche Überlagerung von E. und F. liefert beispielsweise die dreiparametrige Verteilung

$$h(x) = A e^{-ax} + B(1 + x)^{-q-1} \tag{II 12}$$

mit der Nebenbedingung $A = \alpha\,[1 - (B/q)]$.
Die Begrenzung der Schadenhöhe nach unten ist durch Transformation bzw. Stutzung einer der Verteilungen A. — I. oder der Beta-Verteilung zu erzielen. Auch das bietet keinerlei Schwierigkeiten; einige der transformierten Verteilungen sind bereits in Kapitel I (I 11, I 16, I 29, I 30) zu finden, Stutzung erfolgt gemäß (61). Als Beispiele seien wieder die Exponentialverteilung

$$h(x) = a e^{-a(x - x_0)} \qquad x \geqq x_0$$
$$\mu_H = a^{-1} + x_0, \quad \sigma^2_H = a^{-2},$$

wo Transformation und Stutzung sich nicht unterscheiden, die Γ-Verteilung (68)

$$h(x) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha) - \Gamma_{ax_0}(\alpha)} e^{-ax} x^{\alpha-1} \qquad x \geqq x_0$$

$$\mu_H = \frac{1}{a} \frac{\Gamma(\alpha + 1) - \Gamma_{ax_0}(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha) - \Gamma_{ax_0}(\alpha)}, \quad {}_H\alpha_2 = \frac{1}{a^2} \frac{\Gamma(\alpha + 2) - \Gamma_{ax_0}(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha) - \Gamma_{ax_0}(\alpha)}$$

und die bei Stutzungsproblemen sehr brauchbare *Pareto*-Verteilung (67) speziell erwähnt. In [17] haben die Verfasser mit Hilfe einer gestutzten logarithmischen Normalverteilung eine recht befriedigende Angleichung an ihr Material erhalten.
Beispiele, bei denen B. und C. aus 2.1 erfüllt sind, lassen sich durch Kombination der beiden Möglichkeiten leicht konstruieren. Im allgemeinen werden die Modelle rasch kompliziert; es seien nur die beiden einfachsten, noch gut übersichtlichen Fälle dargestellt,

die beidseits gestutzte Exponentialverteilung

$$h(x) = \frac{a}{1 - e^{-a(x_1 - x_0)}}\, e^{-a(x - x_0)} \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1$$

und die *Pareto*-Verteilung mit Stutzung bzw. Konzentration im oberen Teil

$$h_I(x) = \frac{1}{1 - (x_0/x_1)^\alpha}\, \frac{\alpha}{x_0}\, (x_0/x)^{\alpha+1} \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1$$

$$h_{II}(x) = \frac{\alpha}{x_0}\, (x_0/x)^{\alpha+1} \qquad x_0 \leqq x < x_1$$

$$= (x_0/x_1)^\alpha \qquad x = x_1$$

Kapitel III

Die Verteilung des Totalschadens

Die Ausführungen der beiden ersten Kapitel bilden die Grundlage für die Totalschadenverteilung innerhalb der betrachteten Zeitspanne, die zumeist das Hauptinteresse des Versicherers beansprucht. Dabei gehen wir im allgemeinen von der fundamentalen Annahme aus, daß zwischen Schadenfallverteilung (Variable r) und Schadenhöheverteilung (Variable x) die Hypothese der stochastischen Unabhängigkeit erfüllt sei. Unter dieser vereinfachenden Voraussetzung wird im ersten Paragraphen die übliche Darstellung des Totalschadens einer kurzen Analyse unterzogen. Auf eine davon abweichende Behandlung, die auf dem Begriff der Schadenfallhäufigkeit (§ 2) fußt, gehen die letzten beiden Abschnitte der Arbeit näher ein. Es wird gezeigt, wie das Modell (III 2) mit der neuen Betrachtungsweise in Einklang gebracht werden kann.

3.1 Das übliche Faltungsmodell

3.1.1 *Allgemeine Theorie*

Bedeute W_r nach Kapitel I die Wahrscheinlichkeit, daß ein Versicherter (individuell) bzw. der Versicherungsbestand (kollektiv) r Schadenfälle erleide, und H(x) wie in Kapitel II die Wahrscheinlichkeit, daß die Schadenhöhe eines Ereignisses der Größe nach $\leqq$ x ausfalle. Auf Grund obiger Voraussetzung wird die Wahrscheinlichkeit, daß r Schadenfälle eine Summe $\leqq$ x besitzen, durch die r-malige Faltung von H(x) mit sich selbst

$$H^{*r}(x) = \int_{B_H} H^{*(r-1)}(x-u)\,dH(u) \tag{III 1}$$

mit

$$H^{*1}(x) = H(x) \quad \text{und} \quad H^{*0}(x) = \varepsilon(x)$$

wiedergegeben. Die Vf

$$T(x) = \sum_{r=0}^{\infty} W_r H^{*r}(x) \tag{III 2}$$

stellt, wenn der kollektive Standpunkt zu Grunde gelegt wird, bereits die gesuchte Funktion dar. Beim individuellen Verfahren bezeichnet (III 2) die Verteilung des Gesamtschadens eines Versicherten. Umfaßt der ganze Bestand N Versicherungen, dann muß zur Darstellung des Totalschadens (siehe [44]) noch die Operation

$$T^{*N}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} W_r^{*N} H^{*r}(x) = T_N(x) \tag{III 3}$$

vorgenommen werden. Man erkennt daraus einen nicht geringen Vorteil der kollektiven Betrachtungsweise.

Die Vf des Totalschadens — wir befassen uns vorläufig nur mit T(x) — ist durch die Verteilungen $\{W_r\}$ und H(x) eindeutig bestimmt; wie letztere definiert sie, wenn man die im letzten Kapitel niedergelegten Gedanken berücksichtigt, eine stetige unilaterale Verteilung. Ohne nähere Spezifizierung lassen sich leicht folgende Eigenschaften herleiten:

$$\text{cF:}\quad \varphi_T(t) = \int_{B_T} e^{itx}\,dT(x) = \varphi_W\left(\frac{\log \varphi_H(t)}{i}\right), \tag{III 4}$$

wobei $\varphi_H(t) = \int\limits_{B_H} e^{itu} dH(u)$ die cF von $H(x)$,

$\varphi_W(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} W_k e^{itk}$ die cF von W_r.

Natürlich muß $B_T = B_H$ sein.

Momente:

Die ersten Momente der Vf $T(x)$ lassen sich am einfachsten aus der Definitionsgleichung herleiten, da für $v = 1, 2, 3$ die Zentralmomente einer k-fach mit sich selbst gefalteten Verteilung $k\,\mu_v$ lauten. Anderseits gibt (I 47) ein Mittel zur Hand, eine allgemeine Beziehung zwischen den Momenten der 3 Verteilungen herzuleiten. Insbesondere ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mu_T &= \mu_H\,\mu_W \\ \sigma_T^2 &= \sigma_H^2\,\mu_W + \mu_H^2\,\sigma_W^2 \\ {}_T\mu_3 &= {}_H\mu_3\,\mu_W + 3\,\mu_H\,\sigma_H^2\,\sigma_W^2 + \mu_H^3\,{}_W\mu_3 \\ {}_T\mu_4 &= {}_H\mu_4\,\mu_W + 4\,\mu_H\,{}_H\mu_3\,\sigma_W^2 + 3\,\sigma_H^4(\sigma_W^2 + \mu_W^2 - \mu_W) + 6\,\mu_H^2\,\sigma_H^2({}_W\mu_3 + \sigma_W^2\,\mu_W) \\ &\quad + \mu_H^4\,{}_W\mu_4 \end{aligned} \qquad \text{(III 5)}$$

Die Formeln für μ_T und σ_T^2 müssen mit (I 45) übereinstimmen.

3.1.2 *Die wichtigsten Beispiele*

A. Die allgemeine, zusammengesetzte P-Verteilung.

Setzt man in (III 2) die in 1.2.2 untersuchte zusammengesetzte P-Verteilung ein, so entsteht eine allgemeine, zusammengesetzte P-Verteilung [65]

$$T(x) = \sum_r \frac{H^{*r}(x)}{r!} \int\limits_{B_\lambda} e^{-\lambda}\,\lambda^r\,dS(\lambda) \qquad \text{(III 6)}$$

mit der cF

$$\varphi_T(t) = \varphi_S\left[\frac{\varphi_H(t) - 1}{i}\right] \qquad \text{(III 7)}$$

und den Momenten

$$\mu_T = \mu_H\,\mu_S, \quad \sigma_T^2 = \sigma_H^2\,\mu_S + \mu_H^2(\sigma_S^2 + \mu_S)$$

Besondere Einfachheit zeichnet den Fall der gewöhnlichen P-Verteilung aus, wo analog zu (I 50) und (I 51) gilt:

$$\varphi_T(t) = e^{\lambda[\varphi_H(t) - 1]} \qquad \text{(III 8)}$$

$$\mu_T = \lambda\,\mu_H, \quad \sigma_T^2 = \lambda(\sigma_H^2 + \mu_H^2)$$

Die Untersuchung konkreter Modelle beweist, daß die Beliebtheit der Exponential- und Γ-Verteilung als Schadenhöheverteilungen ihre tiefere Ursache nicht zuletzt darin hat, daß sich diese Verteilungen im Gegensatz zu den anderen in 2.2 besprochenen Möglichkeiten sehr einfach falten lassen. So geht die Exponentialverteilung

$$h(x) = a\,e^{-ax},$$

wie aus der cF sofort hervorgeht, in die Γ-Verteilung

$$h^{*r}(x) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-ax}$$

über.

(1) P-Verteilung + Exponentialverteilung.
Man erhält für die Totalschadenverteilungsdichte

$$T'(x) = e^{-\lambda-ax} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} \frac{a^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} = \lambda a e^{-\lambda-ax} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda a x)^r}{r!(r+1)!}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda a}{x}}\, e^{-\lambda-ax} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\lambda a x})^{2r+1}}{r!(r+1)!}$$

$$T'(x) = \sqrt{\frac{\lambda a}{x}}\, e^{-\lambda-ax} I_1\left(2\sqrt{\lambda a x}\right) \tag{III 9}$$

Die Vd (III 9) ist in der Literatur mit dem Namen *Riebesells* [61] verknüpft.

cF: $\varphi_T(t) = e^{\lambda i t/(a-it)}$

Momente: $\mu_T = \lambda/a, \quad \sigma_T^2 = 2\lambda/a^2, \quad {}_T\gamma_1 = 3/\sqrt{2\lambda}$ (III 10)

Eine andere Darstellung ist mit Hilfe von (20) möglich und ergibt

$$T'(x) = \lambda a e^{-(\sqrt{\lambda}+\sqrt{ax})^2} {}_1F_1\left(3/2;\ 3;\ 4\sqrt{\lambda a x}\right),$$

woraus die Regularität der Funktion im Nullpunkt besser hervorgeht.

(2) Negative Binomialverteilung + Exponential- bzw. Γ-Verteilung.
Wählt man die Γ-Verteilung [mit $p = a/(a+1)$] als Strukturfunktion, so geht (III 7) in

$$\varphi_T(t) = \left[\frac{1 - q\varphi_H(t)}{p}\right]^{-\alpha}$$

über, und mit der Exponentialverteilung als $h(x)$ folgt, man vergleiche auch [44],

$$\varphi_T(t) = \left[\frac{pa - it}{p(a - it)}\right]^{-\alpha}$$

$$T'(x) = p^\alpha e^{-ax} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+\alpha-1}{r} (aq)^r \frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)}$$

$$= \alpha p^\alpha q a e^{-ax} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(r+2)} \frac{(aqx)^r}{r!} \tag{III 11}$$

$$T'(x) = \alpha q W_0 h(x)\, {}_1F_1(\alpha+1; 2; aqx) \tag{III 12}$$

$$\mu_T = \frac{q}{p}\frac{\alpha}{a}, \quad \sigma_T^2 = \frac{q}{p^2}\frac{\alpha}{a^2}(p+1)$$

Größere Schwierigkeiten bereitet die Γ-Verteilung (Parameter a, A), da in

$$T'(x) = \alpha q W_0 h(x) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(r+2)} [(ax)^A q]^r \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(Ar+A)},$$

was für $A = 1$ Gleichung (III 11) entspricht, der Ausdruck $\Gamma(Ar + A)$ sich einer eleganten Darstellung widersetzt.

$$\varphi_T(t) = \left[\frac{1 - q\left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-A}}{p}\right]^{-\alpha}$$

$$\mu_T = \frac{q}{p}\frac{\alpha}{a}A, \quad \sigma_T^2 = \frac{q}{p^2}\frac{\alpha}{a^2}A(A + p)$$

(3) Verteilung (I 18) + Exponentialverteilung.

Mit (I 19) ergibt sich allgemein als cF

$$\varphi_T(t) = e^{\lambda_0[\varphi_H(t)-1]}\, {}_1F_1[p; p + q; (\lambda_1 - \lambda_0)(\varphi_H(t) - 1)]$$

Speziell für $\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 1$

$$\varphi_T(t) = {}_1F_1[p; p + q; \varphi_H(t) - 1]$$

$$T'(x) = h(x)\frac{\Gamma(p + q)}{\Gamma(p)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(r + p + 1)}{\Gamma(r + p + q + 1)}\,{}_1F_1(r+p+1;\ r+p+q+1;\ -1)\frac{(ax)^r}{r!(r + 1)!}$$

(III 13)

$$\mu_T = \frac{1}{a}\frac{p}{p+q}, \quad \sigma_T^2 = \frac{1}{a^2}\frac{p}{p+q}\left[2 + \frac{q}{(p + q)(p + q + 1)}\right]$$

B. Die allgemeine, zusammengesetzte Binomialverteilung.

Mit Hilfe von 1.2.4 sei analog die allgemeine, zusammengesetzte Binomialverteilung definiert. Je nachdem ob (I 33) oder (I 38) zugrundegelegt wird, ergibt sich als Totalschadenverteilung

$$T(x) = \sum_r H^{*r}(x)\binom{n}{r}\int_{B_p} p^r(1 - p)^{n-r}\,dS(p)$$

(III 14)

bzw.

$$T(x) = \sum_r H^{*r}(x)\left(\frac{p}{q}\right)^r \sum_n \binom{n}{r}(1 - p)^n s_n$$

cF und erste Momente lauten

$$\varphi_T(t) = \int_{B_p}[1 + p(\varphi_H(t) - 1)]^n\,dS(p)$$

$$\mu_T = n\mu_H\mu_S, \quad \sigma_T^2 = n\mu_H^2[(n - 1)\sigma_S^2 + \mu_S - \mu_S^2] + n\sigma_H^2\mu_S$$

und

$$\varphi_T(t) = \sum_n[1 + p(\varphi_H(t) - 1)]^n s_n$$

$$\mu_T = p\mu_H\mu_S, \quad \sigma_T^2 = p\mu_H^2(p\sigma_S^2 + q\mu_S) + p\sigma_H^2\mu_S$$

Auch hier führt die gewöhnliche Binomialverteilung eine wesentliche Vereinfachung herbei:

$$\varphi_T(t) = [1 + p(\varphi_H(t) - 1)]^n \qquad \text{(III 15)}$$

$$\mu_T = np\mu_H, \quad \sigma_T^2 = np(\sigma_H^2 + q\mu_H^2)$$

(4) Binomialverteilung + Exponentialverteilung.

Der cF nach (III 15)

$$\varphi_T(t) = \left(1 + \frac{p\,i\,t}{a - i\,t}\right)^n$$

mit den Momenten

$$\mu_T = \frac{n\,p}{a}, \quad \sigma_T^2 = \frac{n\,p}{a^2}(1 + q), \quad {}_T\mu_3 = \frac{2\,n\,p}{a^3}(q^2 + q + 1)$$

entspricht die Vd

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{p}{q}\,a\,e^{-ax}\,q^n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r+1} \left(\frac{p\,a\,x}{q}\right)^r \frac{1}{r!} \\ &= n\,\frac{p}{q}\,W_0\,h(x)\,{}_1F_1\left(-n + 1; 2; -\frac{p}{q}\,a\,x\right) \end{aligned} \qquad \text{(III 16)}$$

Außer den angegebenen Möglichkeiten lassen sich mit Hilfe der Modelle von Kapitel I und II beliebig viele weitere Totalschadenverteilungen konstruieren, doch wollen wir es bei dem Gesagten bewenden lassen. Es sei nur noch vermerkt, daß die praktische Berechnung von $T'(x)$ in den weitaus meisten Fällen recht hohe Anforderungen stellt und oft nur mit Näherungsmethoden durchgeführt werden kann ([7, 24]).

3.2 Die Schadenfallhäufigkeit

Es sei uns gestattet, das Problem wiederum in den Termini technici der Unfallversicherung zu erläutern. Sinngemäß lassen sich die Fragen auch auf andere Versicherungsarten übertragen, obschon sie sich vielleicht dort weniger ausgeprägt stellen.
In den Ausführungen von Kapitel I wurde die Verteilung der Schadenfälle als diskrete, ganzzahlige Verteilung mit Wahrscheinlichkeiten W_r hergeleitet. Dies setzt, um vorläufig auf dem individuellen Standpunkt zu verharren, voraus, daß die Unfallstatistiken der einzelnen Versicherten dem Versicherer genau bekannt sind, da er nur so seine theoretischen Untersuchungen auf einer festen Grundlage aufbauen kann. In der Betriebsunfallversicherung ist dies zumeist nicht der Fall, da der versicherte Betrieb wohl die Unfälle anmeldet, den Versicherer über die Unfallzahlen der einzelnen Arbeiter jedoch im unklaren läßt. Die Größen, die dem Versicherungsunternehmen zur Verfügung stehen, sind die Totalzahl der Unfälle U in der betrachteten Zeitspanne sowie die versicherte Lohnsumme L des Betriebes. Aus letzterer wird mit Hilfe einer sorgfältigen Schätzung des mittleren Stundenlohnes l die sog. Vollarbeiterzahl N bestimmt [66].

$$N = \frac{L}{l}\,\frac{1}{2400}$$

Daraus ergibt sich als Schadenfallhäufigkeit für einen Betrieb mit den Größen U und N

$$\bar{u} = U/N$$

Die Unfallhäufigkeit $\bar{u}$ ist für jeden versicherten Betrieb zu berechnen und in einem Diagramm jedem $\bar{u}$ die entsprechende Anzahl Betriebe zuzuordnen.
Die eben durchgeführten Überlegungen machen es verständlich, daß man sich die Frage vorlegen kann, ob die Theorie der Schadenfallverteilung nicht besser auf der stochastischen Variablen $\bar{u}$ aufgebaut werde. Die Probleme, die mit dieser Frage zusammenhängen, sollen im folgenden dargestellt werden.

$\bar{u}$ kann definitionsgemäß die Werte 0, $1/N$, $2/N$ ... annehmen, sollte also weiterhin im Grunde einer diskreten Verteilung gehorchen. Natürlicher ist es in einem solchen Fall, insbesondere wenn N groß ist, eine stetige Verteilung zu Hilfe zu ziehen. Diese könnte auf Grund der empirischen Daten bestimmt werden, ohne auf irgendwelche Vorkenntnisse zu achten. Anderseits weiß man, daß die Variable $\bar{u}$ aus der Mittelwertbildung von N dem *gleichen Verteilungsgesetz gehorchenden Variablen* u_i (= Unfallzahl des i-ten Arbeiters, unbekannt laut unserer Annahme) hervorgeht. Es ist daher sicher nicht abwegig, an den Grundhypothesen für die diskrete Schadenfallverteilung festzuhalten und daraus die Schadenhäufigkeitsverteilung abzuleiten.

Die Verteilung eines Mittelwertes ist genau dann explizit darstellbar, wenn die Verteilung der Einzelkomponenten einem Additionstheorem gehorcht [23]. Diese Eigenschaft besitzen die drei wichtigsten, in Kapitel I zur Sprache gekommenen Modelle, nämlich

A. Poisson-Hypothese.

Verteilung von $\bar{u}$:
$$W\left(\bar{u} = \frac{k}{N}\right) = \frac{(N\lambda)^k}{k!} e^{-N\lambda} \qquad \text{(III 17)}$$

Als Vergleichsmöglichkeit sei eine Abschätzung für $W_1 = W(\bar{u} = 1)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß pro Arbeiter durchschnittlich ein Unfall eintritt, gegeben. Mit (2) wird
$$W_1 \sim \left(\frac{\lambda}{e^{\lambda-1}}\right)^N \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}$$

Für große N strebt die Verteilung von $\bar{u}$ nach dem zentralen Grenzwertsatz gegen die Normalverteilung
$$G(u) \sim \mathcal{N}(\lambda, \lambda/N) \qquad \text{(III 18)}$$

B. Binomial-Hypothese.

Verteilung von $\bar{u}$:
$$W\left(\bar{u} = \frac{k}{N}\right) = \binom{Nn}{k} p^k q^{Nn-k}$$

Für W_1 ergibt sich hier
$$W_1 \sim \left[(n-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^n p\, q^{n-1}\right]^N \sqrt{\frac{n}{2\pi N(n-1)}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

da man leicht zeigen kann, daß die Funktion in der eckigen Klammer stets $\leqq 1$ ist ($= 1$ für $p = 1/n$).

Die Grenzverteilung für $N \to \infty$ lautet
$$G(u) \sim \mathcal{N}(np, npq/N)$$

C. Negative Binomial-Hypothese.

Verteilung von $\bar{u}$:
$$W\left(\bar{u} = \frac{k}{N}\right) = \binom{k + N\alpha - 1}{k} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N\alpha} \frac{1}{(a+1)^k}$$

Wieder mit der *Stirling*schen Formel folgt
$$W_1 \sim \left[\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\,\frac{a}{a+1}\right)^\alpha \frac{\alpha+1}{a+1}\right]^N \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi N(\alpha+1)}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}},$$

denn der Ausdruck in [ ] erreicht sein Maximum, den Wert 1, im Punkt $\alpha = a$.
Zudem gilt natürlich

$$G(u) \sim \mathcal{N}\left[\frac{\alpha}{a}, \frac{1}{N}\frac{\alpha}{a}\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]$$

Für eine hinreichend große Vollarbeiterzahl ist es demnach durchaus vernünftig, für die Schadenhäufigkeit einen Normalverteilungsansatz

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/N)$$

zu postulieren. Man muß sich nur darüber im klaren sein, daß die Annahme einer Normalverteilung insofern den gegebenen Tatsachen nie ganz gerecht werden kann, als die stochastische Variable $\bar{u}$ zwar naturgegebenermaßen positiv ist, die Normalverteilung aber stets auch einen nichtverschwindenden negativen Wertebereich umfaßt. Dieser ist jedoch für genügend großes N von vernachlässigbar kleinem Einfluß, so daß sich eine Stutzung erübrigt. Die entsprechende Bedingung, wie sie in (65) aufgestellt wurde, lautet nämlich

$$\mu/\sigma > 1{,}67/\sqrt{N}, \quad (2{,}37/\sqrt{N}), \tag{III 19}$$

was obige Feststellung bestätigt.
Den bisherigen Ausführungen wurde die individuelle Betrachtungsweise zu Grunde gelegt; es erhebt sich daher die Frage, ob sich auch in der kollektiven Risikotheorie die Schadenfallhäufigkeit einführen lasse. In erster Linie ist zu sagen, daß die S. 70 genannte Begründung hier hinfällig wird, da vom kollektiven Standpunkt aus ja gerade die Unfallzahlen der einzelnen Versicherten nicht beachtet werden. Diese Forderung ist also bereits erfüllt. Der Gewinn der neuen Darstellung könnte höchstens darin bestehen, eine diskrete Verteilung durch eine ev. einfachere stetige zu ersetzen. Im Gegensatz z. B. zu (III 17) gilt hier

$$W\left(\bar{u} = \frac{k}{N}\right) = W(U = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!};$$

es würde sich also darum handeln, statt dieser in 0, 1/N, 2/N ... definierten Verteilung eine den Daten entsprechende stetige Vd zu suchen. Dabei darf die wesentliche Voraussetzung der kollektiven Betrachtung, die Unabhängigkeit der Vf von der Versichertenzahl N, nicht verloren gehen. Die Vf sei auch hier mit G(u) bezeichnet; es ist jedoch zu beachten, daß ein analoger Unterschied besteht wie zwischen den beiden W_r (individuell und kollektiv) im diskreten Fall.
Mit der Unfallhäufigkeit als Grundlage soll der Totalschaden (III 2) bzw. (III 3) neu dargestellt werden.

3.3 Das Modell der stetigen Faltung

Vor der Definition des Totalschadenmodells ist es nützlich, eine kleine Vorbetrachtung einzuschieben.

3.3.1 *Unbeschränkt teilbare Verteilungsgesetze*

Die übliche Definition der unbeschränkten Teilbarkeit eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes H(x) lautet [34, 35]:
Das Verteilungsgesetz H(x) wird unbeschränkt teilbar genannt, wenn sich die ihr gehorchende stochastische Variable ξ für jedes natürliche n als Summe von n unabhängigen Variablen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, jede mit derselben Vf $H_n(x)$, darstellen läßt.

Gleichbedeutend mit dieser Aussage ist die folgende:

Die cF eines unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetzes ist die n-te Potenz einer anderen cF, bzw. die n-te Wurzel aus der cF einer unbeschränkt teilbaren Vf ist wieder eine cF.

Daß hier n als natürlich vorausgesetzt wurde, ist unwesentlich. Aus der Tatsache, daß die rationalen Zahlen im R^1 dicht liegen, folgt nach obiger Definition, daß auch $\varphi^c(t)$ für ein beliebiges reelles $c > 0$ wieder eine cF ist. Die Umkehrung ist trivial.

Für eine unbeschränkt teilbare Vf existiert daher auch deren stetige Faltung $H^{*c}(x)$ für beliebiges reelles $c > 0$. Sie ist definiert als die zur cF $\varphi^c(t)$ gehörige Vf und hat als solche insbesondere die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &H^{*1}(x) = H(x) \\ &\lim_{c \to 0} H^{*c}(x) = \varepsilon(x) \\ &H^{*c_1}(x) * H^{*c_2}(x) = H^{*(c_1+c_2)}(x) \end{aligned} \qquad \text{(III 20)}$$

3.3.2 *Das Totalschadenmodell*

Die Schadensummenverteilung H(x) werde als unbeschränkt teilbar vorausgesetzt. Wenden wir uns erst der individuellen Betrachtungsweise zu, wo nun

$$g(u)\,du = W(\bar{u} \in [u, u + du])$$

gegeben sei. Erweitert man Formel (III 3) in Richtung auf eine stetige Schadenfallverteilung, so ergibt sich

$$T'_N(x) = \int_0^\infty g(u)\,h^{*Nu}(x)\,du \qquad \text{(III 21)}$$

Im Ausdruck $h^{*Nu}(x)$ tritt eine durch unsere Annahme definierte stetige Faltung auf. Für die cF erhält man

$$\varphi_{T_N}(t) = \varphi_G\left[\frac{N}{i}\log\varphi_H(t)\right], \qquad \text{(III 22)}$$

wobei $\varphi_G(t)$ die cF der stetigen Vf G(u) bedeutet. Die Momente bilden sich analog zu (III 5), also beispielsweise

$$\mu_{T_N} = N\,\mu_H\,\mu_G\,, \quad \sigma^2_{T_N} = N^2\,\sigma^2_G\,\mu^2_H + N\,\mu_G\,\sigma^2_H$$

Geht man in der kollektiven Betrachtung so vor, wie auf der letzten Seite ausgeführt wurde, dann stellt

$$g(u)\,du = W\left(\bar{u} \in \left[\frac{u}{N}, \frac{u}{N} + d\left(\frac{u}{N}\right)\right]\right)$$

dar. Die (III 2) entsprechende Formel lautet dann einfach

$$T'(x) = \int_0^\infty g(u)\,h^{*u}(x)\,du\,, \qquad \text{(III 23)}$$

und die Resultate für cF und Momente sind formal genau dieselben, sofern der Index W durch G ersetzt wird.

3.3.3 *Beispiele*

Wir geben zu (III 21) und (III 23) je ein Beispiel.

A. Sei $g(u) = n(\mu, \sigma^2/N)$

$h(x) = a\,e^{-ax}$

Mit Hilfe der bekannten Formeln für die cF dieser beiden Verteilungen geht (III 22) über in

$$\varphi_{T_N}(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-\mu N} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 N \log^2\left(1 - \frac{it}{a}\right)}$$

$$= \left[\left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \log\left(1 - \frac{it}{a}\right)}\right]^N \qquad \text{(III 24)}$$

Das kommt einer N-fachen Faltung der Vd (III 23) mit $g(u) = n(\mu, \sigma^2)$ gleich und macht einmal mehr den Unterschied der beiden Betrachtungsweisen deutlich.

$$\mu_{T_N} = N\mu/a\,, \quad \sigma^2_{T_N} = N(\sigma^2 + \mu)/a^2$$

Setzt man im Sinne von (III 18) $\mu = \sigma^2 = \lambda$, so erhält man speziell

$$\mu_{T_N} = N\lambda/a\,, \quad \sigma^2_{T_N} = 2N\lambda/a^2$$

Das sind natürlich dieselben Momente wie in (III 10), abgesehen vom Faktor N, der vom individuellen Standpunkt her verursacht wird.

Die Formel für die Dichte nimmt die Form

$$T'_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}\, e^{-ax} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{N\sigma^2}(u-\mu N)^2}\, \frac{a^u}{\Gamma(u)}\, x^{u-1}\, du$$

an und bietet keine Aussichten auf eine einfache Lösung.

B. In (III 23) werde $g(u) = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, u^{\alpha-1} e^{-cu}$ gewählt, $h(x)$ wie in A.

Dann ist

$$\varphi_T(t) = \left[1 + \frac{1}{c}\log\left(1 - \frac{it}{a}\right)\right]^{-\alpha} \qquad \text{(III 25)}$$

mit

$$\mu_T = \frac{\alpha}{c}\,\frac{1}{a}\,, \quad \sigma^2_T = \frac{\alpha}{c}\left(1 + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{a^2}\,,$$

während die Dichte

$$T'(x) = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{e^{-ax}}{x} \int_0^\infty e^{-cu}\, u^{\alpha-1}\, \frac{(ax)^u}{\Gamma(u)}\, du$$

wieder an ihrer Unhandlichkeit krankt.

3.4 Das Produktmodell

Eine zweite Möglichkeit, auf die im Rahmen dieses Kapitels hingewiesen werden soll, betrifft die Darstellung des Totalschadens als Produkt. Da in Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitstheorie über die Produktverteilung kaum Hinweise zu finden sind — erwähnenswert in Bezug auf diesen Gegenstand sind die beiden neuen Arbeiten [49] und [62] — seien in einem ersten Abschnitt die wichtigsten Resultate im Hinblick auf unsere Bedürfnisse wiedergegeben.

3.4.1 *Die Verteilung des Produkts zweier stochastischer Variablen*

Gegeben seien zwei stochastische Variablen ξ_1, ξ_2 mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x_1, x_2)$. Die Vf des Produkts $\eta = \xi_1 \xi_2$, welche mit $P(y)$ bezeichnet werde, ist definiert durch

$$P(y) = \iint\limits_{x_1 x_2 < y} p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \qquad \text{(III 26)}$$

Sind die beiden Variablen voneinander unabhängig, d. h. gilt

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)\, p_2(x_2), \qquad \text{(III 27)}$$

so läßt sich (III 26) wie folgt umformen:

$$P(y) = \int_0^\infty dx_1\, p_1(x_1) \int_{-\infty}^{y/x_1} p_2(x_2)\, dx_2 + \int_{-\infty}^{0} dx_1\, p_1(x_1) \int_{y/x_1}^{\infty} p_2(x_2)\, dx_2$$

$$= \int_0^\infty p_1(x_1)\, P_2\left(\frac{y}{x_1}\right) dx_1 + \int_{-\infty}^{0} p_1(x_1) \left[1 - P_2\left(\frac{y}{x_1}\right)\right] dx_1$$

Für die Vd $P'(y) = p(y)$ ergibt sich die Darstellung

$$p(y) = \left[\int_0^\infty - \int_{-\infty}^{0}\right] p_1(x_1)\, p_2\left(\frac{y}{x_1}\right) \frac{dx_1}{x_1} \qquad \text{(III 28)}$$

oder in etwas kompakterer Form

$$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x_1)\, p_2\left(\frac{y}{x_1}\right) \frac{dx_1}{|x_1|}$$

Die beiden Variablen sind selbstverständlich in ihrem Verhalten völlig gleichberechtigt, so daß sich stets durch Vertauschung der Ziffern 1 und 2 duale Formeln aufstellen lassen.

Für unilaterale Vf, die unser besonderes Interesse beanspruchen, verschwindet das zweite Integral in (III 28), so daß einfach

$$p(y) = \int_0^\infty p_1(x_1)\, p_2\left(\frac{y}{x_1}\right) \frac{dx_1}{x_1} \qquad \text{(III 29)}$$

gilt.

Sind $\varphi_{P_1}(t)$ und $\varphi_{P_2}(t)$ die cF der Variablen ξ_1, ξ_2, so erhält man für die cF der Produktvariablen

$$\varphi_P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{P_2}(t x_1)\, p_1(x_1)\, dx_1 = \varphi_{P_1}\left[\frac{\log \varphi_{P_2}(t x_1)}{i x_1}\right] \qquad \text{(III 30)}$$

Aus der Form der cF folgt sofort die Tatsache, daß Symmetrie der Verteilung eines Faktors (cF reell!) Symmetrie der Produktverteilung nach sich zieht. Die Umkehrung dieser Aussage gilt hingegen nicht [49].

Für die Nullpunktmomente der Verteilung (III 26) ist allgemein

$$_P\alpha_k = {}_{P_1}\alpha_k\, {}_{P_2}\alpha_k$$

richtig. Nützlich sind vor allem die Formeln für die ersten Momente

$$\begin{aligned}
\mu_{P} &= \mu_{P_1}\mu_{P_2} \\
\sigma_{P}^2 &= \sigma_{P_1}^2\sigma_{P_2}^2 + \mu_{P_1}^2\sigma_{P_2}^2 + \mu_{P_2}^2\sigma_{P_1}^2 \qquad \text{(III 31)} \\
{}_{P}\gamma_1 &= \frac{1}{\sigma_P^3}\left[{}_{P_1}\mu_3\,{}_{P_2}\mu_3 + {}_{P_1}\mu_3\,(\mu_{P_2}^2 + 3\,\sigma_{P_2}^2)\,\mu_{P_2} + {}_{P_2}\mu_3\,(\mu_{P_1}^2 + 3\,\sigma_{P_1}^2)\,\mu_{P_1} + 6\,\mu_{P_1}\,\mu_{P_2}\,\sigma_{P_1}^2\,\sigma_{P_2}^2\right]
\end{aligned}$$

Man bemerkt, daß die Mittelwertformel formal mit jener von Modell (III 23) übereinstimmt, die Streuungsgleichung — abgesehen vom Spezialfall ${}_{P_1}\alpha_2 = \mu_{P_1}$ — bereits davon abweicht.

Sind die beiden Variablen ξ_1, ξ_2 voneinander abhängig, gilt die Zerlegung (III 27) nicht mehr. (III 29) muß dann allgemeiner

$$p(y) = \int_0^\infty p\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right)\frac{dx_1}{x_1}$$

lauten, wobei die gemeinsame Dichte $p(x_1, x_2)$ nur durch

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)\,p_2(x_2 \mid x_1)$$

ersetzt werden darf.

3.4.2 *Anwendung der Produktverteilung zur Darstellung des Totalschadens*

Wir haben in 3.2 gezeigt, wie die Unfallhäufigkeit U/N als Maßzahl für das stochastische Verhalten der Unfallzahl eingeführt werden kann. Genau auf dieselbe Art kann mit der zweiten Grundvariablen, der Schadenhöhe bei einem Unfall, verfahren werden. Es bezeichne T den Totalschaden im betrachteten Betrieb; das dann analog zur Unfallhäufigkeit gebildete Mittel T/U gibt die sog. Belastungshäufigkeit wieder. Das Produkt dieser beiden Variablen führt zur Totalschadenhäufigkeit T/N.

An Stelle der Variablen T/U ist es häufig zweckmäßiger, die Variable $\frac{T}{U(L/N)}$, wobei L wie S. 70 die versicherte Lohnsumme bezeichnet, zu betrachten [66]. Der Totalschaden wird dann nicht an der Vollarbeiterzahl sondern an der versicherten Lohnsumme gemessen, als Produktvariable erscheint T/L.

Die Frage nach der Verteilung der Belastungshäufigkeit rührt ähnliche Gedanken an, wie sie bereits im zweiten Paragraphen dieses Kapitels geäußert worden sind. Eine Möglichkeit besteht darin, von der Verteilung H(x) (Kapitel II) auszugehen und diese nach der Theorie der Mittelbildung auszuwerten. Das würde bedeuten, für T/U eine Vf von der Form $H^{*U}(Ux)$ anzunehmen. Statt dessen kann man auch, falls die zu Grunde liegende Schadenhöheverteilung zweiparametrig ist, verlangen, daß Mittelwert und Streuung der transformierten Verteilung — (μ, σ^2) Momente der ursprünglichen Verteilung — die Gestalt $(\mu, \sigma^2/U)$ aufweisen. Ein Beispiel dieser Art gibt der Verfasser von [16], wo angenommen wird, die Schadenhöhe sei Γ-verteilt. Es ist zu beachten, daß in diesem Modell die beiden Grundvariablen nicht mehr unabhängig sind, was in der Anwendung der Formeln von 3.4.1 zu berücksichtigen ist. Es gilt zwar noch die Mittelwertbeziehung von (III 31), nicht aber die Streuungsgleichung am selben Ort. Infolge der mehrfachen Faltungen wird die Produktverteilung, analog zu 3.3.3, in der Regel recht kompliziert und stellt einer numerischen Auswertung Schwierigkeiten entgegen. Ob sich evtl. auch für T/U ein Normalverteilungsansatz rechtfertigen läßt, muß von Fall zu Fall überprüft werden.

In Übereinstimmung mit der Bemerkung S. 66 wollen wir uns nicht weiter mit diesem Standpunkt befassen. Am Schluß von 3.2.1 ist eine zweite Möglichkeit der Annahme einer Schadenhäufigkeitsverteilung in mehr kollektiver Schau gegeben. Dieses Vorgehen ist auch zur Bestimmung der die Belastungshäufigkeit wiedergebenden Verteilung möglich. Damit liegen zwei aus empirischen Daten gewonnene Verteilungen vor, deren Produkt unser Interesse beansprucht. Unter diesen Umständen ist es eher möglich, auf der vereinfachenden Annahme der Unabhängigkeit der beiden Grundvariablen zu beharren, was natürlich eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung zur Folge hat. Es wäre interessant, über diesen Punkt praktische Untersuchungen durchzuführen. *Wir geben zu diesem Zweck zum* Schluß eine Übersicht über die wichtigsten, einfachsten Beispiele von Produktverteilungen zweier unabhängiger *stochastischer* Variablen.

3.4.3 *Beispiele*

A. Als erstes Beispiel sei kurz das Produkt aus zwei Normalverteilungen $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ behandelt.

$$\mu_1/\sigma_1 = \lambda_1, \quad \mu_2/\sigma_2 = \lambda_2$$

Für die Momente ergibt sich nach (III 31)

$$\mu_P = \mu_1 \mu_2, \quad \sigma_P^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1), \quad {}_P\gamma_1 = \frac{6\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1)^{3/2}}$$

Als cF erhält man

$$\varphi_P(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma_1 \sigma_2 t)^2}} e^{\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\sigma_1\sigma_2 t)^2 - 2i\lambda_1\lambda_2(\sigma_1\sigma_2 t)}{1 + (\sigma_1\sigma_2 t)^2}}$$

Ein interessanter Spezialfall ist $\mu_1 = \mu_2 = 0$, wo

$$\varphi_P(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma_1 \sigma_2 t)^2}}$$

Da $\frac{1}{1 + (\sigma_1 \sigma_2 t)^2}$ bekanntlich die cF der *Laplace*-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2} e^{-|x|/\sigma_1\sigma_2}$$

ist, folgt die im ersten Moment überraschende Tatsache, daß die Summe von zwei unabhängigen Produktvariablen obiger Art *Laplace-verteilt ist.*

Für die Vd des Produkts gelangt man unter Einführung der Bezeichnung $\frac{z}{\sigma_1\sigma_2} = \gamma^2$ zum Integralausdruck

$$p(\sigma_1\sigma_2\gamma^2) = \frac{e^{-1/2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \gamma^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_0^\infty e^{-1/2\gamma^2\left(u + \frac{1}{u}\right)^2} \left[e^{\gamma\left(\lambda_1 u + \frac{\lambda_2}{u}\right)} + e^{-\gamma\left(\lambda_1 u + \frac{\lambda_2}{u}\right)}\right] \frac{du}{u} \quad \text{(III 32)}$$

Ist die Bedingung (III 19) erfüllt, kann man den 2. Summanden, der den Beitrag von $\int_{-\infty}^{0}$ liefert, vernachlässigen. Die Integrale sind durch eine Entwicklung von

$$(1/u)\, e^{\pm\gamma[\lambda_1 u + (\lambda_2/u)]}$$

in eine *Laurent*-Reihe allgemein lösbar [22]. Für große λ_1, λ_2 strebt die Verteilung gegen eine Normalverteilung [12].

Eine einfache Formel liefert der Fall $\mu_1 = \mu_2 = 0$:

$$p(\sigma_1 \sigma_2 \gamma^2) = \frac{e^{\gamma^2}}{\pi \sigma_1 \sigma_2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\gamma^2\left(u+\frac{1}{u}\right)^2} \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi \sigma_1 \sigma_2} \int_0^\infty e^{-\gamma^2 \operatorname{Ch} u} du$$

oder nach (22)

$$p(z) = \frac{1}{\pi \sigma_1 \sigma_2} K_0\left(\frac{z}{\sigma_1 \sigma_2}\right) \qquad \text{(III 33)}$$

Will man lieber von Anfang an zwei gestutzte Normalverteilungen verwenden, so lauten die (III 32) und (III 33) entsprechenden Ausdrücke

$$p(\sigma_1 \sigma_2 \gamma^2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\gamma^2}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \Phi(\lambda_1)\Phi(\lambda_2)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\gamma^2\left(u+\frac{1}{u}\right)^2 + \gamma\left(\lambda_1 u + \frac{\lambda_2}{u}\right)} \frac{du}{u}$$

und natürlich

$$p(z) = \frac{2}{\pi \sigma_1 \sigma_2} K_0\left(\frac{z}{\sigma_1 \sigma_2}\right)$$

Der Versuch, die Normalverteilung mit irgendeiner anderen Verteilung zu kombinieren, erweist sich als nicht sehr erfolgreich. Man erhält im besten Fall Integrale vom Typus (I 31). Auch die logarithmische Normalverteilung liefert in dieser Hinsicht keine befriedigenden Resultate.

B. Als recht anpassungsfähig zeigt sich neuerdings die Γ-Verteilung.

(1) Die Produktverteilung von zwei Γ-verteilten Variablen (Parameter a_1, α_1 bzw. a_2, α_2) führt auf das Integral

$$p(z) = \frac{(a_1 a_2)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} z^{\alpha_2 - 1} \int_0^\infty e^{-u-(a_1 a_2 z/u)} \frac{du}{u^{\alpha_2 - \alpha_1 + 1}},$$

das sich, wie bereits in [33] ausgeführt, nach (23) als

$$p(z) = 2\frac{(a_1 a_2)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} z^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-1} K_{\alpha_2-\alpha_1}\left(2\sqrt{a_1 a_2 z}\right) \qquad \text{(III 34)}$$

schreiben läßt. Die Momente nach (III 31) lauten

$$\mu_P = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2}, \quad \sigma_P^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(a_1 a_2)^2}(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)$$

$${}_P\gamma_1 = 2\left(\alpha_1 + \alpha_2 + 2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}\right) \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}}$$

Für zwei Exponentialverteilungen reduziert sich Formel (III 34) auf das einfache

$$p(z) = 2 a_1 a_2 K_0\left(2\sqrt{a_1 a_2 z}\right) \qquad \text{(III 35)}$$

Weitere Möglichkeiten, die wir nurmehr durch die jeweilige Vd charakterisieren wollen, sind:

(2) Gamma + *Pearson* Typ V (Parameter $\bar{a}, \bar{\alpha}$)

Ein besonders einfacher Fall, da sich herausstellt, daß

$$p(z) = \frac{(\bar{a}/a)^{\bar{\alpha}}}{B(\alpha, \bar{\alpha})} \frac{z^{\alpha-1}}{[z + (\bar{a}/a)]^{\alpha+\bar{\alpha}}},$$

was die Vd einer *Pearson* Typ VI-Verteilung ist. Man setze in (I 24) $p = \alpha$, $q = \bar{\alpha}$ und $r = \bar{a}/a$.

(3) Gamma + *Pearson* Typ VI

$$p(z) = \frac{\Gamma(\alpha+q)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{B(p,q)} (a z)^{\frac{p-\alpha-1}{2} - q} \frac{e^{az/2}}{z} W_{(1-\alpha-p-2q)/2,\,(\alpha-p)/2}(a z)$$

(4) Gamma + *Pareto* ($\bar{\alpha}$)

$$p(z) = \bar{\alpha} \left(\frac{x_0}{a}\right)^{\bar{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{z^{\bar{\alpha}+1}} \Gamma_{az/x_0}(\alpha + \bar{\alpha})$$

C. Den Abschluß mögen einige Fälle von Zusammensetzungen anderer Vd bilden.

(1) Typ V (a_1, α_1) + Typ V (a_2, α_2)

$$p(z) = 2 \frac{(a_1 a_2)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} z^{-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+1\right)} K_{\alpha_2-\alpha_1}\left(2\sqrt{\frac{a_1 a_2}{z}}\right)$$

(2) Typ V + Beta ($0 < x < x_1$)

$$p(z) = \frac{B(p+\alpha, q)}{B(p, q)} \frac{(a x_1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{z^{\alpha+1}} {}_1F_1\left(p+\alpha;\ p+q+\alpha;\ -\frac{a x_1}{z}\right)$$

(3) Typ VI (p_1, q_1) + Typ VI (p_2, q_2)

$$p(z) = \frac{B(p_2+q_1, p_1+q_2)}{B(p_1, q_1) B(p_2, q_2)} \frac{1}{z^{q_1+1}} F\left(p_1+q_1, p_2+q_1; p_1+p_2+q_1+q_2; \frac{z-1}{z}\right)$$

(4) *Pareto* (α_1, x_1) + *Pareto* (α_2, x_2)

$$p(z) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}}{z^{\alpha_2+1}} \left[\left(\frac{z}{x_2}\right)^{\alpha_2-\alpha_1} - x_1^{\alpha_2-\alpha_1}\right], \quad z > x_1 x_2$$

bzw. für den gleichen Stutzungspunkt $x_1 = x_2 = x_0$

$$p(z) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} x_0^{2\alpha_1} \frac{z^{\alpha_2-\alpha_1} - x_0^{2(\alpha_2-\alpha_1)}}{z^{\alpha_2+1}}, \quad z > x_0^2$$

Transzendente Funktionen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihre Bezeichnungsweise

Im Sinne einer flüssigen Gestaltung der Arbeit sind im folgenden Definitionen und Bezeichnungsweisen der wichtigsten auftretenden Funktionen und Verteilungen zusammengefaßt. Beweise werden keine angeführt, es wird dafür auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Höhere transzendente Funktionen

[2], [15], [28], [72], [74]

Im allgemeinen benötigen wir nur Funktionen reeller Argumente.

A. Die Gamma-Funktion.

Definition: $$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt, \quad x > 0 \tag{1}$$

Asymptotische Formeln: $$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}, \quad \textit{Stirling} \tag{2}$$

$$\frac{\Gamma(ax+b)}{\Gamma(ax+c)} \sim (ax)^{b-c} \tag{3}$$

Unvollständige Γ-Funktion: $$\Gamma_r(x) = \int_0^r e^{-t} t^{x-1}\,dt, \quad x > 0 \tag{4}$$

B. Die Beta-Funktion.

Definition: $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \tag{5}$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\,du, \quad x, y > 0 \tag{6}$$

Zusammenhang mit Γ-Funktion: $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{7}$$

C. Die hypergeometrische Funktion.

Definition: $$F(\alpha_1, \alpha_2; \beta; x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha_1+k)}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\Gamma(\alpha_2+k)}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+k)} \frac{x^k}{k!} \tag{8}$$

Die Funktion ist eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung von *Gauß*

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha_1+\alpha_2+1)x - \beta]\frac{dy}{dx} + \alpha_1\alpha_2 y = 0 \tag{9}$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig und absolut für $|x| < 1$, divergiert für $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ ist sie konvergent, falls $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta < 0$. Dies gilt für alle Parameterwerte $\alpha_1, \alpha_2, \beta$, ausgenommen für β negativ ganz oder 0.

$$\frac{d^n}{dx^n} F(\alpha_1, \alpha_2; \beta; x) = \frac{\Gamma(\alpha_1+n)}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\Gamma(\alpha_2+n)}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n)} F(\alpha_1+n, \alpha_2+n; \beta+n; x) \tag{10}$$

*Euler*sche Integraldarstellung mit Hilfe von (5)

$$F(\alpha_1, \alpha_2; \beta; x) = \frac{1}{B(\alpha_2, \beta - \alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_2 - 1} (1-t)^{\beta - \alpha_2 - 1} (1 - tx)^{-\alpha_1} dt, \quad \beta > \alpha_2 > 0 \qquad (11)$$

Für α_1 oder α_2 negativ ganz bricht die unendliche Reihe ab; die hypergeometrische Funktion artet in ein Polynom aus.

$$\alpha_1 = -n: \frac{\Gamma(\alpha_1 + k)}{\Gamma(\alpha_1)} = (\alpha_1 + k - 1) \dots (\alpha_1 + 1)\alpha_1 = (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1)$$

$$= (-1)^k \binom{n}{k} k!$$

$$F(-n, \alpha; \beta; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + k)} (-x)^k \qquad (12)$$

z. B.

$$F(-n, \alpha; \alpha; -x) = (1 + x)^n$$

D. Die konfluenten hypergeometrischen Funktionen.

(1) Die Funktion von *Kummer*.

$$\text{Definition:} \quad {}_1F_1(\alpha; \beta; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + k)} \frac{x^k}{k!} \qquad (13)$$

Die *Kummer*sche Differentialgleichung

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (\beta - x) \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0$$

besitzt ${}_1F_1$ als Lösung. Die Reihe konvergiert gleichmäßig und absolut für alle x und für alle Parameterwerte α, β, ausgenommen β negativ ganz oder 0.

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_1F_1(\alpha; \beta; x) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + n)} {}_1F_1(\alpha + n; \beta + n; x) \qquad (14)$$

Integraldarstellung [durch „Konfluenz" aus (11)]

$${}_1F_1(\alpha; \beta; x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\beta - \alpha - 1} e^{tx} dt, \quad \beta > \alpha > 0 \qquad (15)$$

*Kummer*sche Transformation:

$${}_1F_1(\alpha; \beta; x) = e^x {}_1F_1(\beta - \alpha; \beta; -x) \qquad (16)$$

$$\alpha = -n: \quad {}_1F_1(-n; \beta; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + k)} (-x)^k$$

In diesem Spezialfall bricht die Reihe wieder ab.

(2) Die Funktion von *E. T. Whittaker*.

Die Funktion von *Whittaker* ist Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\varkappa}{x} + \frac{(1/4) - \mu^2}{x^2}\right) y = 0,$$

die aus der *Kummer*schen durch die Substitution

$$y \to x^{-\beta/2} e^{x/2} y, \quad \alpha = \tfrac{1}{2} - \varkappa + \mu, \quad \beta = 2\mu + 1 \qquad \text{entsteht.}$$

Für β nicht ganz gilt

$$W_{\varkappa,\mu}(x) = e^{-x/2} x^{\beta/2} \left[\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \, {}_1F_1(\alpha;\beta;x) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\beta} \, {}_1F_1(\alpha-\beta+1;2-\beta;x) \right], \tag{17}$$

wobei α und β wie oben durch $\varkappa$ und μ auszudrücken sind.

Integraldarstellung

$$W_{\varkappa,\mu}(x) = \frac{e^{-x/2} x^{\mu+1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \varkappa + \mu)} \int_0^\infty t^{-1/2-\varkappa+\mu} (1+t)^{-1/2+\varkappa+\mu} e^{-xt} \, dt \tag{18}$$

$$1/2 - \varkappa + \mu > 0 \text{ und } x > 0$$

$$W_{\varkappa,\mu}(x) = W_{\varkappa,-\mu}(x)$$

(3) Spezielle Funktionen.

$$e^x = {}_1F_1(\alpha;\alpha;x)$$

$$\Gamma_r(x) = \frac{r^x}{x} e^{-r} \, {}_1F_1(1;x+1;r) = \frac{r^x}{x} \, {}_1F_1(x;x+1;-r) \qquad \text{[nach (4) und (16)]}$$

Für $\varkappa = 0$ oder $\beta = 2\alpha$ entstehen Besselfunktionen, z. B. in der üblichen Bezeichnung

$$J_v(x) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^v e^{-ix} \, {}_1F_1(1/2 + v; 1 + 2v; 2ix), \tag{19}$$

wobei i die imaginäre Einheit bedeutet.

$$I_v(x) = i^{-v} J_v(ix) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^v e^{-x} \, {}_1F_1(1/2 + v; 1 + 2v; 2x) \tag{20}$$

$$K_v(x) = \frac{i\pi}{2} e^{\,i\pi v/2} H_v^{(1)}(ix) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} W_{0,v}(2x) \tag{21}$$

Die modifizierte Besselfunktion 2. Art der Ordnung v, $K_v(x)$, hat andere wichtige Integraldarstellungen, von denen zwei erwähnt seien.

$$K_v(x) = \int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{Ch}\,t - vt} \, dt \tag{22}$$

$$K_v(2\sqrt{x}) = \frac{1}{2} x^{v/2} \int_0^\infty e^{-t-(x/t)} \frac{dt}{t^{v+1}} \tag{23}$$

Verteilungen

[23], [32], [34], [56], [65], [71]

Aus der nachfolgenden kurzen Zusammenstellung soll insbesondere die Bezeichnungsweise hervorgehen.

A. Verteilungsfunktionen und deren charakteristische Größen.

Eine stochastische Variable ξ besitze die Verteilungsfunktion (Vf) $F(x) = W(\xi \leqq x)$. Der stetige Fall soll durch die Verteilungsdichte (Vd) $F'(x) = f(x)$ definiert sein, im diskreten Fall charakterisieren die Wahrscheinlichkeiten $P_r(W_r)$ die zugehörige Vf.

Nullpunktmomente der Verteilung	$\alpha_k = \mathscr{E}(\xi^k)$
Zentralmomente der Verteilung	$\mu_k = \mathscr{E}[(\xi - \alpha_1)^k]$

Wichtig sind insbesondere Mittelwert μ, Streuung σ^2, Schiefe γ_1 und Exzeß γ_2.

Faktorielle Momente der Verteilung $\alpha_{[k]} = \mathscr{E}[\xi(\xi-1)\dots(\xi-k+1)]$

Viele diskrete Verteilungen werden bequemer durch faktorielle statt gewöhnliche Momente beschrieben, da in jenen allgemeine, einfache Formeln herleitbar sind.

Zusammenhang zwischen faktoriellen und gewöhnlichen Momenten:

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{k} c_j^k \alpha_{[j]}, \tag{24}$$

$$\text{wobei} \quad c_j^k = \frac{1}{j!} \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^h \binom{j}{h} (j-h)^k \tag{25}$$

Für die ersten Momente lautet die Formel

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_{[1]} \\
\alpha_2 &= \alpha_{[1]} + \alpha_{[2]} \\
\alpha_3 &= \alpha_{[1]} + 3\alpha_{[2]} + \alpha_{[3]} \\
\alpha_4 &= \alpha_{[1]} + 7\alpha_{[2]} + 6\alpha_{[3]} + \alpha_{[4]}
\end{aligned}$$

Erzeugende Funktionen (eF)

$$E(z) = \mathscr{E}(z^{\xi}) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r z^r \tag{26}$$

$$M(z) = \mathscr{E}(e^{z\xi}) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \frac{z^r}{r!} = E(e^z) \tag{27}$$

$$M[z] = \mathscr{E}[(z+1)^{\xi}] = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{[r]} \frac{z^r}{r!} = E(z+1) \tag{28}$$

Charakteristische Funktion (cF) $\varphi(t) = \mathscr{E}(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$ (29)

Wo Verwechslungen eintreten könnten, sind die Funktionen und Momente entsprechend indiziert. Zumeist befindet sich der Index rechts unten, also μ_W, σ_W^2, $\varphi_P(t)$, nur falls dies aus praktischen Gründen ratsam scheint, links unten, z.B. ${}_W\mu_3$, ${}_P\gamma_1$.

B. Häufige diskrete Verteilungen.

Binomialverteilung:

$$W_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \qquad r = 0, 1 \ldots n \tag{30}$$

$$0 < p < 1, q = 1 - p$$

$$E(z) = (pz + q)^n \tag{31}$$

$$\alpha_{[k]} = n(n-1)\ldots(n-k+1)\,p^k \tag{32}$$

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = npq < \mu$$

Poisson-Verteilung:

$$W_r = e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} \qquad r = 0, 1, 2 \ldots \tag{33}$$

$$\lambda > 0$$

$$E(z) = e^{\lambda(z-1)} \tag{34}$$

$$\alpha_{[k]} = \lambda^k \tag{35}$$

$$\mu = \sigma^2 = \lambda$$

Geometrische Verteilung:

$$W_r = (1 - A)\,A^{r-1} \qquad r = 1, 2 \ldots \tag{36}$$

$$0 < A < 1$$

$$E(z) = \frac{(1-A)z}{1 - Az} \tag{37}$$

$$\alpha_{[k]} = k!\,\frac{A^{k-1}}{(1-A)^k} \tag{38}$$

$$\mu = \frac{1}{1-A}, \quad \sigma^2 = \frac{A}{(1-A)^2} \gtreqless \mu \quad \text{je nach A}$$

Eine weitere häufig benützte Darstellungsform ist $\left(\frac{a}{a+1} = A\right)$

$$W_r = \frac{a^{r-1}}{(a+1)^r} \qquad a > 0 \tag{39}$$

Negative Binomialverteilung:

$$W_r = \binom{\alpha + r - 1}{r} p^\alpha q^r \qquad r = 0, 1, 2 \ldots \tag{40}$$

$$\alpha > 0, 0 < p < 1, q = 1 - p$$

oder wie oben mit $\frac{a}{a+1} = p$:

$$W_r = \binom{\alpha + r - 1}{r} \left(\frac{a}{a+1}\right)^\alpha \frac{1}{(a+1)^r} \qquad a, \alpha > 0 \tag{41}$$

Weitere Darstellungsarten kommen im Laufe der Arbeit zur Sprache. Die Verteilung spielt im 1. Kapitel eine dominierende Rolle, weshalb wir etwas eingehender auf ihre Eigenschaften Bezug nehmen.

$$E(z) = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{1-z}{a}\right)^{-\alpha} \tag{42}$$

$$\alpha_{[k]} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1) = \frac{1}{a^k}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)$$

$$\mu = \frac{1-p}{p}\alpha = \frac{\alpha}{a}, \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}\alpha = \frac{\alpha}{a}\left(1+\frac{1}{a}\right) > \mu$$

$$\gamma_1 = \frac{p+2q}{\sqrt{\alpha q}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\alpha q}(p^2 + 6q)$$

Rekursionsformel:

$$W_{r+1} = \frac{r+\alpha}{r+1}\,\frac{1}{a+1}\,W_r$$

Verlauf der Wahrscheinlichkeiten:

$\alpha < a+1$	$W_{r+1} < W_r$	für alle r	monoton fallend
$\alpha > a+1$	$W_{r+1} > W_r$	für $0 < r < \frac{\alpha - a - 1}{a}$	Glockentypus
	$< W_r$	für $\frac{\alpha - a - 1}{a} < r < \infty$	

$W_{max} = \left[\frac{\alpha - 1}{a}\right]$, wobei [.] die nächstkleinere ganze Zahl bedeutet.

Logarithmische Verteilung:

$$W_r = \frac{1}{\log(1/q)}\,\frac{p^r}{r} \qquad r = 1, 2\ldots \tag{43}$$

$$0 < p < 1, \quad p = 1 - q$$

$$E(z) = \frac{\log(1-pz)}{\log q} \tag{44}$$

$$\alpha_{[k]} = \frac{1}{\log(1/q)}(k-1)!\left(\frac{p}{q}\right)^k$$

$$\mu = \frac{1}{\log(1/q)}\,\frac{p}{q}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\log^2(1/q)}\,\frac{p}{q}[\log(1/q) - p]$$

C. Häufige stetige Verteilungen.

Normalverteilung:

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad : n(\mu, \sigma^2) \tag{45}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}\,du \qquad : N(\mu, \sigma^2)$$

standardisiert $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du \qquad : N(0, 1)$$

$$\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \tag{46}$$

Logarithmische Normalverteilung:

$$l(x) = \frac{1}{\sigma_N x \sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{\log x - \mu_N}{\sigma_N}\right)^2}, \quad x > 0 \tag{47}$$

$$\alpha_k = \delta^k \theta^{k^2} \quad \text{mit} \quad \delta = e^{\mu_N}, \quad \theta = e^{1/2\sigma^2_N}$$

$$\mu = \delta\theta, \quad \sigma^2 = (\delta\theta)^2 (\theta^2 - 1) \tag{48}$$

$$\gamma_1 = (\theta^2 + 2)\sqrt{\theta^2 - 1} = (\sigma/\mu)\,[(\sigma/\mu)^2 + 3]\,, \text{ nur abhängig von } \sigma_N \text{ bzw. } \sigma/\mu \tag{49}$$

$$\text{Modalwert } x_0 = \delta\theta^{-2} \quad \text{(unimodal)}$$

Beta-Verteilung 1. Art (*Pearson**) Typ I):

$$\beta_1(x) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad p > 0, q > 0 \quad 0 < x < 1 \tag{50}$$

$$\alpha_k = \frac{B(p+k,q)}{B(p,q)}$$

$$\mu = \frac{p}{p+q}, \quad \sigma^2 = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \tag{51}$$

$$\text{Für } p > 1, \quad q > 1 \text{ unimodal}, \quad x_0 = \frac{p-1}{p+q-2}$$

$$\varphi(t) = {}_1F_1(p; p+q; it) \quad \text{nach (15)} \tag{52}$$

Gamma-Verteilung (*Pearson* Typ III):

$$\gamma(x) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-ax} x^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \quad a > 0, \quad x > 0 \tag{53}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{a^k} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \tag{54}$$

$$\mu = \frac{\alpha}{a}, \quad \sigma^2 = \frac{\alpha}{a^2} \tag{55}$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \quad \gamma_2 = \frac{6}{\alpha}, \quad \text{d.h. } 3\gamma_1^2 = 2\gamma_2$$

$$\text{Für } \alpha > 1 \text{ unimodal}, \quad x_0 = \frac{\alpha - 1}{a}$$

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-\alpha} \tag{56}$$

Die Exponentialverteilung ist eine Gamma-Verteilung mit $\alpha = 1$:

$$e(x) = a\, e^{-ax} \tag{57}$$

Pearson Typ V:

$$f(x) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-a/x} x^{-(\alpha+1)}, \quad \alpha > 0, a > 0, \quad x > 0 \tag{58}$$

$$\alpha_k = a^k \frac{\Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)}$$

---

*) *Pearson* K. Phil. Transact. Roy. Soc. A 185 (1894).

Damit das k-te Moment existiert, muß $\alpha > k$ sein. (59)

$$\mu = \frac{a}{\alpha - 1}, \quad \sigma^2 = \frac{a^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}$$

$$\text{unimodal,} \quad x_0 = \frac{a}{\alpha + 1}$$

$$[20]: \varphi(t) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{it}{a}\right)^{\alpha/2} K_\alpha\left(2\sqrt{-\frac{it}{a}}\right)$$

Beta-Verteilung 2. Art (*Pearson* Typ VI):

$$\beta_2(x) = \frac{1}{B(p, q)} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}}, \quad q > 0, \quad p > 0, \quad x > 0, \text{ siehe (6)} \tag{60}$$

$$\alpha_k = \frac{B(p+k, q-k)}{B(p, q)}$$

k-tes Moment existiert nur, falls $q > k$.

$$\mu = \frac{p}{q-1}, \quad \sigma^2 = \frac{p(p+q-1)}{(q-1)^2 (q-2)}$$

Für $p > 1$ unimodal, $x_0 = \dfrac{p-1}{q+1}$

$$[20]: \varphi(t) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} (-it)^{(1-q)/2} e^{-it/2} W_{(1-2p-q)/2, -q/2}(-it)$$

Die obigen Verteilungen wurden für ihre Standardintervalle definiert; es ist jedoch den Gegebenheiten entsprechend möglich, auch andere Existenzintervalle zu wählen. Das führt natürlich zu einer Vermehrung der Anzahl der Parameter. Es wird davon von Fall zu Fall die Rede sein.

D. Gestutzte Verteilungen.

Die Stutzung einer Verteilung mit Dichte $f(x)$ auf das Intervall $[a, b]$ führt zur neuen Dichte

$$f_s(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\int_a^b f(t)dt} & a \leqq x \leqq b \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{61}$$

Gestutzte Normalverteilung:

Es sei die oft verwendete, im Nullpunkt (also nur nach links) gestutzte Normalverteilung betrachtet.

Nach (61) und (45) ist

$$n_s(x) = \frac{1}{1 - N(0)} n(x), \quad x \geqq 0 \tag{62}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mu_N^k}{1 - N(0)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{\sigma_N}{\mu_N}\right)^j I_j,$$

wobei I_j das durch partielle Integration leicht lösbare Integral $\int\limits_{-\mu_N/\sigma_N}^{\infty} u^j e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ bedeutet [siehe auch (I 31)].

Setzt man

$$\varkappa = \frac{n(0)}{1 - N(0)} = n_s(0), \tag{63}$$

so wird insbesondere

$$\mu = \mu_N + \varkappa\sigma_N^2, \quad \sigma^2 = \sigma_N^2(1 - \varkappa\mu_N - \varkappa^2\sigma_N^2) = \sigma_N^2(1 - \varkappa\mu)$$

$$\mu_3 = \varkappa\sigma_N(2\varkappa^2\sigma_N^4 + 3\varkappa\mu_N\sigma_N^2 - \sigma_N^2 + \mu_N^2) = \varkappa\sigma_N^2(\mu^2 - \sigma^2)$$

$$\varphi(t) = \frac{1 - N(-it\sigma_N^2)}{1 - N(0)}\varphi_N(t) \tag{64}$$

Man kann sich fragen, in welchen Fällen es sich überhaupt lohnt, eine Stutzung im Nullpunkt vorzunehmen. Ist der Flächenanteil im negativen Bereich genügend klein, dann unterscheiden sich die beiden Verteilungen beliebig wenig voneinander. Verlangt man als Toleranzschranke

$$n_s(x) = K\,n(x) \text{ mit } K \leqq 1{,}05 \ (1{,}01),$$

dann folgt daraus eine Bedingung für den Quotienten aus Erwartungswert und Standardabweichung der Normalverteilung

$$N(0) < 0{,}047 \ (0{,}009)$$

$$\Phi(\mu_N/\sigma_N) > 0{,}953 \ (0{,}991)$$

Nach Tabellen der Umkehrfunktion der Normalverteilung (z.B. [71]) heißt das

$$\mu_N/\sigma_N > 1{,}67 \ (2{,}37) \tag{65}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, kann der aus der Vernachlässigung der Stutzung sich ergebende Fehler toleriert werden.

Stutzung im Punkt x_0:

$$n_s(x) = \frac{1}{1 - N(x_0)}n(x) \tag{66}$$

$$\mu = \mu_N + \varkappa'\sigma_N^2, \quad \sigma^2 = \sigma_N^2[1 + \varkappa'(x_0 - \mu)], \quad \text{wobei } \varkappa' = \frac{n(x_0)}{1 - N(x_0)}$$

Pareto-Verteilung:

$$f_s(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} \qquad \alpha > 0 \tag{67}$$

$$\alpha_k = \frac{\alpha}{\alpha - k}x_0^k$$

k-tes Moment existiert nur dann, wenn $\alpha > k$.

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha - 1}x_0, \quad \sigma^2 = \frac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}x_0^2$$

Die gestutzte Exponentialverteilung hat die Form

$$e(x - x_0) = a\,e^{-a(x-x_0)},$$

hingegen ist $\gamma(x - x_0)$ keine gestutzte Verteilung, sondern fällt unter die Schlußbemerkung von C. Eine gestutzte Gamma-Verteilung sieht nach (61) und (4) so aus:

$$\gamma_s(x) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha) - \Gamma_{ax_0}(\alpha)}e^{-ax}x^{\alpha-1} \tag{68}$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Aitchison J.:* On the distribution of a positive random variable having a discrete probability mass at the origin. J. Amer. Stat. Assoc. 50 (1955).

[2] *Aitchison J.* and *Brown I. A. C.:* The lognormal distribution. Cambridge Univ. Press 1957.

[3] *Ammeter H.:* A generalisation of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities. SAT 3 (1948).

[4] — Die Elemente der kollektiven Risikotheorie von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten. MSVM 49 (1949).

[5] — Kollektive Risikotheorie und Sachversicherung. MSVM 54 (1954).

[6] — Anwendung der kollektiven Risikotheorie auf Probleme der Risikopolitik in der Sachversicherung. Transact. XVth intern. Congr. of Actuar., New York 1957.

[7] — Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungswesen auf risikotheoretischer Grundlage. MSVM 57 (1957).

[8] *Andersen E. S.:* On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims. Transact. XVth intern. Congr. of Actuar., New York 1957.

[9] *Arbous A. G.* and *Kerrich J. E.*: Accident statistics and the concept of accident-proneness. Biometrics 7 (1951).

[10] *Arfewdson G.:* Some problems in the collective theory of risk. SAT 33 (1950).

[11] — Research in collective risk theory. SAT 37 (1954) und 38 (1955).

[12] *Aroian* L. A.: The probability function of the product of two normally distributed variables. AMS 18 (1947).

[13] *Bates G. E.* and *Neyman J.:* Contributions to the theory of accident proneness I. An optimistic model of the correlation between light and severe accidents. Univ. of California Press 1952.

[14] — II. True or false contagion. ibidem.

[15] *Buchholz H.:* Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Ergebnisse der angewandten Mathematik, Springer 1953.

[16] *Bühlmann H.:* Ein theoretischer Beitrag zur stochastischen Erfassung der Gesamtbetriebsunfallkosten. MSVM 58 (1958).

[17] *Bühlmann H.* und *Hartmann W.*: Änderungen in der Grundgesamtheit der Betriebsunfallkosten. MSVM 56 (1956).

[18] *Campagne C.:* L'assurance contre les dommages et la théorie du risque collectif. Het Verz. Arch., Act. Bijv. XXXII (1955).

[19] *Campagne C.* und *Driebergen C.*: Der Einfluß von Kettenreaktionen auf die Verlustverteilungsfunktion. Transact. XVth intern. Congr. of Actuar., New York 1957.

[20] *Cansado Maceda E.*: Funciones caracteristicas de las distribuciones de Pearson. Rev. mat. Hisp.-Amer. 4ª Ser. 7 (1947) und 8 (1948).

[21] *Consael R.:* Sur les processus de Poisson du type composé. Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. 5. sér. 38 (1952).

[22] *Craig C. C.:* On the frequency function of xy. AMS 7 (1936).

[23] *Cramér H.:* Mathematical methods of statistics. Princeton Univ. Press 1951.

[24] — Collective risk theory. Jubilee Vol. of Försäkringsaktiebolaget Skandia, Stockholm 1955.

[25] *Delaporte P.:* Quelques problèmes de statistique mathématique posés par l'assurance automobile et le bonus pour non sinistre. Coll. de l'Inst. des Actuaires Français, La Baule 1959.

[26] *Eggenberger F.:* Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. MSVM 24 (1924).

[27] *Eggenberger F.* und *Pólya G.:* Über die Statistik verketteter Vorgänge. Zeitschr. angew. Math. Mech. 3 (1923).

[28] *Erdélyi A.*, *Magnus W.*, *Oberhettinger F.* and *Tricomi F. G.:* Bateman Manuscript Project, Higher transcendental functions Vol. I. MacGraw-Hill, New York 1953.

[29] *Evans D. A.:* Experimental evidence concerning contagious distributions in ecology. Biometrika 40 (1953).

[30] *Feller W.:* On a general class of „contagious" distributions. AMS 14 (1943).

[31] — On the theory of stocastic processes, with particular reference to applications. Proc. Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability, Univ. of California Press 1949.

[32] — An introduction to probability theory and its applications. Wiley and Sons, New York 1950.

[33] *Garti Y.* et *Consoli T.:* Sur la densité de probabilité du produit de variables aléatoires de Pearson du type III. Studies in Math. and Mech., presented to R. von Mises, 1954.

[34] *Gnedenko B. W.:* Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Akademie-Verlag, Berlin 1957.

[35] *Gnedenko B. W.* and *Kolmogorov A. N.:* Limit distributions for sums of independent random variables. Addison-Wesley Publishing Comp., Cambridge 1954.

[36] *Greenwood M.:* Comments on paper by Chambers E. G. and Yule G. U. J. Roy. Stat. Soc. (Suppl.) VII, 2 (1941).

[37] *Greenwood M.* and *Woods H. M.:* A report on the incidence of industrial accidents with special reference to multiple accidents. London, Industr. Fatigue Res. Bd. Rep. No. 4 (1919).

[38] *Greenwood M.* and *Yule G. U.:* An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiple disease or of repeated accidents. J. Roy. Stat. Soc. 83 (1920).

[39] *Grenander U.:* On heterogeneity in non-life insurance. SAT 40 (1957).

[40] *Gumbel E. J.:* Statistical theory of extreme values. Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Ser. 33, US. Governm. Printing Office, Washington D. C. 1954.

[41] *Gurland J.:* Some interrelations among compound and generalized distributions. Biometrika 44 (1957).

[42] — A generalized class of contagious distributions. Biometrics 14 (1958).

[43] *Hald A.:* Maximum likelihood estimation of the parameters of a normal distribution which is truncated at a known point. SAT 32 (1949).

[44] *Hofmann M.:* Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung. MSVM 55 (1955).

[45] *Janossy L., Renyi A.* and *Aczel J.:* On composed Poisson distributions I. Acta math. Acad. Sci. Hung. 1 (1950).

[46] *Irwin J. O.:* On the „transition probabilities" corresponding to any accident distribution. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 15 (1953).

[47] *Koopman B. O.:* Necessary and sufficient conditions for Poisson's distribution. Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950).

[48] *Latscha R.:* Zur Anwendung der kollektiven Risikotheorie in der schweizerischen obligatorischen Unfallversicherung. MSVM 56 (1956).

[49] *Lévy P.:* Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires. Ann. scientifiques de l'école Normale Sup. 76 (1959).

[50] *Lundberg F.:* Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse. SAT 13 (1930).

[51] *Lundberg O.:* On random processes and their application to sickness and accident insurance. Almquist and Wiksells, Uppsala 1940.

[52] *Lüders R.:* Die Statistik der seltenen Ereignisse. Biometrika 26 (1934).

[53] *Newbold E. M.:* A contribution to the study of the human factor in the causation of accidents. London, Industr. Fatigue Res. Bd. Rep. No. 34 (1926).

[54] — Practical applications of the statistics of repeated events, particularly of industrial accidents. J. Roy. Stat. Soc. 90 (1927).

[55] *Neyman J.:* On a new class of contagious distributions, applicable in entomology and bacteriology. AMS 10 (1939).

[56] *Parzen E.:* Modern probability theory and its applications. Wiley and Sons, New York 1960.

[57] *Philipson C.:* A note on different models of stocastic processes dealt with in the collective risk theory. SAT 39 (1956).

[58] *Pollaczek-Geiringer H.:* Über die Poisson'sche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. 8 (1928).

[59] *Pólya G.:* Sur quelques points de la théorie des probabilités. Ann. de l'Inst. Henri Poincaré Vol. 1 (1930).

[60] *Quinkert W.:* Die kollektive Risikotheorie unter Berücksichtigung schwankender Grundwahrscheinlichkeiten mit endlichem Schwankungsbereich. Diss. Karlsruhe 1957.

[61] *Riebesell P.:* Die mathematischen Grundlagen der Sachversicherung. Ber. XII. intern. Kongr. Vers.-Math., Luzern 1940, Vol. 4 (1941).

[62] *Rüegg A.:* Les fonctions caractéristiques pondérées des lois de probabilité. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, Vol. X, 1 (1961).

[63] *Rutherford R. S. G.:* On a contagious distribution. AMS 25 (1954).

[64] *Saxen T.:* Sur les mouvements aléatoires et le problème de ruine de la théorie de risque collective. Soc. Sc. Fennica, Comm. Phys. Math. Vol. 16 (1951).

[65] *Saxer W.:* Versicherungsmathematik II. Springer, Berlin 1957.

[66] Schweizerische Unfallversicherungsanstalt. Ergebnisse der Unfallstatistik der siebenten fünfjährigen Beobachtungsperiode 1948–1952.
— ... achten fünfjährigen Beobachtungsperiode 1953–1957.

[67] *Segerdahl C.-O.:* When does ruin occur in the collective theory of risk? SAT 38 (1955).

[68] — If a risk business goes bankrupt, when does it occur? A basis for fixing net retention. Transact. XVth intern. Congr. of Actuar., New York 1957.

[69] *Sousselier J.* et *Ramel M.:* De la détermination et de l'indétermination des primes d'excédents de sinistres. Non-proportional reinsurance. ARITHBEL S. A., Bruxelles 1955.

[70] *Thomas M.:* A generalization of Poisson's binomial limit for use in ecology. Biometrika 36 (1949).

[71] *Waerden B. L. van der:* Mathematische Statistik. Springer, Berlin 1957.

[72] *Watson G. N.:* A treatise on the theory of Bessel functions. MacMillan, Cambridge 1922.

[73] *Weibull W.:* A statistical distribution of wide applicability. J. appl. Mech. 18 (1951).

[74] *Whittaker E. T.* and *Watson G. N.:* A course of modern analysis. Cambridge 1927.

[75] *Wintner A.:* Indefinitely divisible symmetric laws and normal stratifications. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, Vol. VI, 4 (1957).

[76] *Woodbury M. A.:* On a probability distribution. AMS 20 (1949).

[77] *Wyss H.:* Die Risikotheorie und ihre Bedeutung für die Versicherungsmathematik. MSVM 53 (1953).

[78] *Yntema L.:* Einiges zur Wahrscheinlichkeitsansteckung. Het Verz. Arch. Act., Bijv. XXXI (1954).

AMS = Ann. Math. Stat.
MSVM = Mitt. schweiz. Vers. Math.
SAT = Skand. Aktuarietidskrift

Curriculum vitae

Am 10. März 1932 wurde ich, Bürger von Buttisholz (LU) und Luzern, in der letztgenannten Stadt geboren, wo ich auch meine Jugendjahre verbrachte. Nach dem Besuch der Primarschule trat ich in die humanistische Abteilung der Kantonsschule ein, die ich nach normalem Studiengang (Gymnasium und Lyzeum) 1952 mit dem Maturitätszeugnis verließ. Im gleichen Jahre nahm ich das Studium an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule auf; im Frühjahr 1957 erwarb ich mir das Diplom als Mathematiker.

Nach dem Abschluß trat ich eine Assistentenstelle für höhere Mathematik bei Herrn Prof. Dr. W. Saxer an, deren Pflichten ich bis zum Herbst 1960 oblag. Für kürzere Zeit war ich zudem als Hilfslehrer an der Kantonsschule Zürich tätig. Zu Beginn dieses Jahres habe ich meinen Wirkungskreis als Mathematiker an die Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt verlegt.

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Saxer, für seine Anregung zur vorliegenden Arbeit sowie das stete Verständnis, womit er meine Bemühungen verfolgte und förderte, meinen besten Dank abzustatten. Mein Dank richtet sich ferner an Herrn Prof. Dr. H. Wyss und Herrn H. Ammeter für das meinem Werk seit langem entgegengebrachte Interesse.

Thalwil, im Juni 1961 Josef Kupper