4 Invertierbare Matrizen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Frage, welche Matrizen eine multiplikative Inverse haben und wie wir im gegebenen Fall diese Inverse bestimmen können. Die Matrizen sind alle über demselben Körper K.

Definition 4.1: *Sei A eine $m \times n$ Matrix. Eine $n \times m$ Matrix X heisst* **Linksinverse** *von A wenn gilt $XA = I_n$.*
X heisst **Rechtsinverse** *von A wenn gilt $AX = I_m$.*

Beispiel 4.2: (i) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat unendlich viele Linksinverse der Form

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & a \\ -3 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

aber keine Rechtsinverse.
(ii) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die eindeutig bestimmte Links- und Rechtsinverse

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz 4.3: *Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann gilt:*

(i) A hat eine Rechtsinverse g.d.w. $\mathrm{rang}(A) = m$;

(ii) A hat eine Linksinverse g.d.w. $\mathrm{rang}(A) = n$.

Satz 4.4: *Hat die Matrix A sowohl eine Linksinverse X als auch eine Rechtsinverse Y, dann gilt:*

(i) A ist quadratisch;

(ii) $X = Y$.

Wenn die Matrix A also sowohl eine Linksinverse als auch eine Rechtsinverse hat, so ist diese eindeutig bestimmt.

Satz 4.5: *Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix. FAÄ:*

(i) A hat eine Linksinverse;

(ii) A hat eine Rechtsinverse;

(iii) $\mathrm{rang}(A) = n$;

(iv) die Hermite-Form von A ist I_n;

(v) A ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

Definition 4.6: *Aus den obigen Sätzen sehen wir, dass eine einseitige Inverse einer quadratischen Matrix A automatisch eine beidseitige Inverse ist. Wir sprechen also nur von der* **Inversen** *von A und schreiben diese als A^{-1}. Die Inverse ist, wenn sie existiert, eindeutig (Satz 4.4).*

Hat die quadratische Matrix A eine Inverse, so heisst A **invertierbar** *bzw.* **regulär**. *Hat A keine Inverse, so heisst A auch* **singulär**.

Korollar zu Satz 4.5: *Sei A eine quadratische Matrix.*

(i) Ist A invertierbar, dann ist auch A^{-1} invertierbar. Weiters gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Jedes Produkt von Elementarmatrizen ist invertierbar. B ist also zeilenäquivalent zu A g.d.w. es eine invertierbare Matrix E gibt sodass $B = EA$.

Aus Satz 4.5 können wir sofort eine Methode herleiten um die Invertierbarkeit der quadratischen $n \times n$ Matrix A zu entscheiden, und gegebenenfalls A^{-1} zu berechnen. Dazu gehen wir von der Matrix $A|I_n$ aus und wenden elementare Zeilenoperationen an, um den linken Teil in I_n zu transformieren. Ist das nicht möglich, so ist A nicht invertierbar. Gelingt es aber, so haben wir im rechten Teil automatisch die Inverse A^{-1} stehen. Dieser Prozess sieht wie folgt aus:

$$A|I_n \to E_1A|E_1 \to E_2E_1A|E_2E_1 \to \cdots \; .$$

In jedem Schritt dieses Prozesses haben wir also Matrizen der Form

$$S|Q = E_i \cdots E_1A|E_i \cdots E_1$$

vorliegen, für welche gilt $QA = S$. Ist A invertierbar, so erreichen wir schliesslich die Endkonfiguration

$$I_n|E_p \cdots E_1 \; ,$$

sodass $E_p \cdots E_1A = I_n$, also

$$A^{-1} = E_p \cdots E_1 \; .$$

Beispiel 4.7: Wir wollen den oben beschriebenen Prozess anwenden auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \; .$$

Dabei erhalten wir die folgenden Konfigurationen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Die Matrix A ist also invertierbar, und die Inverse ist

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

In Maple 9.5 können wir die Inverse wie folgt berechnen:

> **with(LinearAlgebra):**
> **A:=Matrix([[1,2,3],[1,3,4],[1,4,4]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

> **B:=MatrixInverse(A);**

$$B := \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Sind die beiden $n \times n$ Matrizen A und B invertierbar, so ist i.a. die Summe $A + B$ nicht invertierbar. Das sieht man etwa am Beispiel $A = I_n, B = -I_n$. Das Produkt AB ist aber sehr wohl invertierbar.

Satz 4.8: *Seien A und B $n \times n$ Matrizen. Sind sowohl A als auch B invertierbar, dann ist auch AB invertierbar und es gilt*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} .$$

Korollar: *Ist A invertierbar, dann ist auch A^m invertierbar für jede natürliche Zahl m (man beachte, dass $A^0 = I_n$). Weiters gilt*

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m \ .$$

Satz 4.9: *Ist A invertierbar, dann ist auch die Transponierte A^T invertierbar. Weiters gilt*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \ .$$

Wir erinnern daran, dass die $n \times n$ Matrix A **orthogonal** ist, wenn gilt

$$AA^T = I_n = A^T A \ .$$

Aus Satz 4.5 sehen wir, dass nur eine dieser Gleichungen notwendig ist. Eine orthogonale Matrix ist also eine invertierbare Matrix deren Inverse die Transponierte ist.

Satz 4.10: *Sei $A \cdot x = b$ ein SLG von n Gleichungen in n Variablen. A ist also eine $n \times n$ Matrix, und b ein Spaltenvektor der Länge n. Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} \cdot b$ der eindeutig bestimmte Lösungsvektor des Gleichungssystems.*

Beispiel 4.11: Wir betrachten das SLG aus Beispiel 3.1 und 3.39.
> **with(LinearAlgebra):**
> **A := Matrix([[0,1,2],[1,-2,1],[0,3,-4]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

> **b := <1,0,23>;**
> **B := MatrixInverse(A);**

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{-1}{10} \end{bmatrix}$$

> **B.b;**

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

□

Beispiel 4.12: Eine wichtige Anwendung finden inverse Matrizen im **mehrdimensionalen Newton-Verfahren** zur Approximation von Nullstellen von Funktionen.

Im (eindimensionalen) Newton-Verfahren geht es darum, zu einer einmal stetig differenzierbaren reellen Funktion, also

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \in \quad C^1(\mathbb{R}),$$

eine Nullstelle $x \in \mathbb{R}$ approximativ zu finden, also $f(x) = 0$.
Dazu startet man “in der Nähe” der Nullstelle etwa bei $x^{(0)}$, und bestimmt eine Folge von Approximationswerten $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$. Um den jeweils nächsten Approximationswert $x^{(n+1)}$ zu bestimmen, betrachtet man die Tangente an f bei $x^{(n)}$:

$$t(x) \;=\; f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)}) \cdot (x - x^{(n)}) \;,$$

und schneidet diese mit der x-Achse. $x^{(n+1)}$ ist dieser Schnittpunkt:

$$x^{(n+1)} \;:=\; x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \;.$$

In der Analysis beweist man, dass dieses Verfahren lokal konvergiert, d.h. wenn der Startpunkt $x^{(0)}$ genügend nahe an einer Nullstelle liegt, so wird tatsächlich diese Nullstelle approximiert als Limes der Folge $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Verfahren zur Wurzelberechnung (etwa $\sqrt{2}$) sind Spezialfälle dieses Newtonschen Näherungsverfahrens.

Im mehrdimensionalen Newton-Verfahren betrachtet man nun eine Funktion

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \end{array} \;,$$

wobei alle Komponenten f_i differenzierbar sind nach allen Variablen, und die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ stetig sind.

Man startet nun wiederum “in der Nähe” einer Nullstelle, etwa mit $x^{(0)}$. Die weiteren Näherungswerte werden bestimmt als

$$x^{(n+1)} \;:=\; x^{(n)} \;-\; J_f^{-1}(x^{(n)}) \cdot f(x^{(n)}) \;.$$

Dabei ist

$$J_f(x) \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

die **Jakobi-Matrix** von f. Das mehrdimensionale Newton-Verfahren funktioniert also, wenn die Jakobi-Matrix invertierbar ist.

Wir demonstrieren das am Beispiel

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} xy + 2x \\ y^2 + y + x \end{pmatrix} \end{array} \;.$$

Für eine Nullstelle $(x, y)^T$ muss gelten $y^2 + y + x = x(y + 1) = 0$; daraus sieht man leicht, dass etwa $(0, -1)^T$ eine Nullstelle ist. Wir wollen sehen, wie wir diese Nullstelle mittels des Newton-Verfahrens approximieren können.

$$J_f(x, y) \;=\; \begin{pmatrix} y + 2 & x \\ 1 & 2y + 1 \end{pmatrix} \;,$$

$$J_f^{-1}(x,y) \;=\; \frac{1}{2y^2+5y-x+2}\cdot\begin{pmatrix}2y+1 & -x\\ -1 & y+2\end{pmatrix}\;.$$

Wir führen 2 Näherungsschritte durch:

$$x^{(0)} \;:=\; \begin{pmatrix}0,5\\-0,8\end{pmatrix}$$

$$f(x^{(0)}) \;=\; \begin{pmatrix}0,60\\0,34\end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} \;=\; x^{(0)} - J_f^{-1}(x^{(0)})\cdot f(x^{(0)}) \;=\; \begin{pmatrix}0,0655737705\\-0,9573770495\end{pmatrix}$$

$$f(x^{(1)}) \;=\; \begin{pmatrix}0,06836871807\\0,0247675359\end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} \;=\; x^{(1)} - J_f^{-1}(x^{(1)})\cdot f(x^{(1)}) \;=\; \begin{pmatrix}0,002625108412\\-0,9991162739\end{pmatrix}$$

$$f(x^{(2)}) \;=\; \begin{pmatrix}0,002627428289\\0,001742163312\end{pmatrix}$$

Diese Berechnungen lassen sich in Maple 9.5 wie folgt durchführen:

> with(LinearAlgebra):

> f1:=x*y+2*x; f2:=y^2+y+x;

$$f1 := xy+2x$$
$$f2 := y^2+y+x$$

> J := Matrix([[diff(f1,x),diff(f1,y)] , [diff(f2,x),diff(f2,y)]]);

$$J := \begin{bmatrix}y+2 & x\\ 1 & 2y+1\end{bmatrix}$$

> Jinv := MatrixInverse(J);

$$Jinv := \begin{bmatrix}-\frac{2y+1}{-2y^2-5y-2+x} & \frac{x}{-2y^2-5y-2+x}\\ \frac{1}{-2y^2-5y-2+x} & -\frac{y+2}{-2y^2-5y-2+x}\end{bmatrix}$$

> x01:= 0.5; x02:=-0.8;

$$x01 := 0.5$$
$$x02 := -0.8$$

> fx01:=subs({x=x01,y=x02},f1); fx02:=subs({x=x01,y=x02},f2);

$$fx01 := 0.60$$
$$fx02 := 0.34$$

> Jinv0 := subs({x=x01,y=x02},Jinv);

$$Jinv0 := \begin{bmatrix}0.4918032787 & 0.4098360656\\ 0.8196721311 & -0.9836065574\end{bmatrix}$$

> **x11 := x01 - (Jinv0[1,1]*fx01 + Jinv0[1,2]*fx02);**
> **x12 := x02 - (Jinv0[2,1]*fx01 + Jinv0[2,2]*fx02);**

$$x11 := 0.0655737705$$
$$x12 := -0.9573770495$$

> **fx11:=subs({x=x11,y=x12},f1); fx12:=subs({x=x11,y=x12},f2);**

$$fx11 := 0.06836871807$$
$$fx12 := 0.0247675359$$

> **Jinv1 := subs({x=x11,y=x12},Jinv);**

$$Jinv1 := \begin{bmatrix} 0.8974183211 & 0.06433106241 \\ 0.9810487016 & -1.022863891 \end{bmatrix}$$

> **x21 := x11 - (Jinv1[1,1]*fx11 + Jinv1[1,2]*fx12);**
> **x22 := x12 - (Jinv1[2,1]*fx11 + Jinv1[2,2]*fx12);**

$$x21 := 0.002625108412$$
$$x22 := -0.9991162739$$

> **fx21:=subs({x=x21,y=x22},f1); fx22:=subs({x=x21,y=x22},f2);**

$$fx21 := 0.002627428289$$
$$fx22 := 0.001742163312$$

Wir sehen also, dass bereits nach 2 Näherungsschritten die Nullstelle ziemlich gut approximiert wird. □