**Aufgaben zum Vorkurs für Mathematiker und Physiker 2016**

Prof. Dr. M. Reineke 5. September 2016
Blatt 1

(Eigene) Lösungen der Aufgaben, die mit $\mathcal{K}$ gekennzeichnet sind, können Sie zur Selbstkontrolle bei Ihrem jeweiligen Übungsgruppenleiter zur Korrektur abgeben.

---

**Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 1:** (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)

(a) Wie sieht die Wahrheitswerttabelle für das umgangssprachliche "entweder – oder" aus?

(b) Geben Sie die Wahrheitswerttabelle der Aussage $\neg A \vee B$ an. Wozu ist diese Aussage demnach äquivalent?

**Aufgabe 3:** (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind:

(a) das De Morgan'sche Gesetz $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$.

(b) die Abtrennungsregel $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$.

(c) das Distributivgesetz $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

**Aufgabe 4:** (6 Punkte)

Es seien $M$, $N$ und $P$ beliebige Mengen. Ist die Teilmengenrelation

(a) reflexiv, d.h.: Gilt $M \subset M$?

(b) symmetrisch, d.h.: Gilt $(M \subset N) \implies (N \subset M)$?

(c) transitiv, d.h.: Gilt $((M \subset N) \wedge (N \subset P)) \implies (M \subset P)$?

Geben Sie Gegenbeispiele an, falls die Eigenschaften nicht erfüllt sind.

**Aufgabe$^{*}$ 5 (Die NOR-Basis):** (10 Punkte)

Die NOR-Verknüpfung $\bar{\vee}$ ist definiert als $A \,\bar{\vee}\, B := \neg(A \vee B)$.

(a) Zeigen Sie, wie man unter ausschließlicher Verwendung der NOR-Verknüpfung $\bar{\vee}$ die (logischen) Verknüpfungen

$$\neg A, \quad A \wedge B, \quad A \vee B$$

realisieren kann. Geben Sie die jeweilige Formel (in den Variablen $A$ und $B$) an und belegen Sie Ihr Ergebnis jeweils mit einer entsprechenden Wahrheitswerttabelle.

(b) Schreiben Sie folgende Formel unter ausschließlicher Verwendung der NOR-Verknüpfung:

$$(A \implies B) \vee \neg C.$$

**Aufgabe 6:** (6 Punkte)

(a) Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ an.

(b) Es sei $M$ eine Menge mit $n$ Elementen und $a \notin M$. Um wie viele Elemente ist $\mathcal{P}(M \cup \{a\})$ größer als $\mathcal{P}(M)$?

**Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 7:** (4 Punkte)

Beweisen Sie das De Morgan'sche Gesetz

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

einmal formal und einmal mit Hilfe der Venn-Diagramme.

**Aufgabe 8:** (4 Punkte)

Übersetzen Sie die folgenden beiden Sätze mit Hilfe von Quantoren in die Sprache der Mathematik.

(a) Nicht alle Kühe stehen im Stall.

(b) Keine Kuh steht im Stall.

Bedeuten beide Aussagen dasselbe (sprich: sind sie äquivalent)?

**Aufgabe 9:** (3 Punkte)

Verneinen Sie umgangssprachlich die folgenden Sätze.

(a) Die Quadrate aller reellen Zahlen sind positiv.

(b) Es gibt eine reelle Zahl größer als 10.

(c) Am Dienstag oder am Mittwoch scheint die Sonne.

**Aufgabe$^*$ 10 (Die disjunktive Normalform (DNF)):** (10 Punkte)

Sei $F$ eine (aussagenlogische) Formel mit $k \in \mathbb{N}$ Aussagevariablen $A_1, \ldots, A_k$.

(a) Interpretieren Sie die Formel $F$ als eine Abbildung

$$F : \{\textbf{wahr}, \textbf{falsch}\}^k \to \{\textbf{wahr}, \textbf{falsch}\}.$$

(b) Für $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \{\textbf{wahr}, \textbf{falsch}\}^k$ definiert man die Formel

$$\chi_s = \bigwedge_{j=1}^k L_j, \quad \text{wobei } L_j = \begin{cases} A_j & \text{für } s_j = \textbf{wahr}, \\ \neg A_j & \text{für } s_j = \textbf{falsch}, \end{cases}$$

für $j = 1, \ldots, k$.

Zeigen Sie, dass für $x \in \{\textbf{wahr}, \textbf{falsch}\}^k$

$$\chi_s(x) = \begin{cases} \textbf{wahr} & \text{falls } x = s, \\ \textbf{falsch} & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{gilt.}$$

$\chi_s$ nennt man die *charakteristische Formel von* $s$.

(c) Zeigen Sie, dass $F$ sich schreiben lässt als

$$F \;=\; \bigvee_{i=1}^{n} \left( \bigwedge_{j=1}^{k} L_{ij} \right), \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}$$

und $L_{ij} \in \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \cup \{\neg A_1, \neg A_2, \ldots, \neg A_k\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots k$.