Präsenzblatt 1 zur Vorlesung Analysis II

Prof. Dr. Holger Dette
Axel Bücher SS 2016

Präsenzaufgabe 1.

Man untersuche die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 1 & , x \in (0,1] \end{cases}$$

auf Riemann-Integrierbarkeit.

Präsenzaufgabe 2.

i) Man zeige mittels Satz 13.8 und Definition 13.4 (Ober- und Untersummen), dass

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2$$

Riemann-integrierbar ist und berechne das Integral $\int_0^1 x^2 \, dx$.

ii) Kann man sich unter zusätzlicher Zuhilfenahme von Beispiel 13.7 (iii) [monotone Funktionen sind Riemann-integrierbar] Arbeit sparen?

iii) Machen Riemann-Summen und die Verwendung von Folgerung 13.11 die Arbeit noch leichter?

Hinweis zu i): man betrachte wie in Beispiel 13.7 (ii) eine Folge äquidistanter Zerlegungen des Intervalls $[0,1]$. Erinnerung: $\sum_{j=1}^n j^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Präsenzaufgabe 3*.

Man zeige mit Hilfe von Riemann-Summen und dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^n j^k = \frac{1}{k+1}.$$

Man berechne außerdem den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k+n}.$$

Hinweis: $\{\log(1+x)\}' = 1/(1+x)$.