Übungsblatt zur Lehrveranstaltung

Einführung in die Künstliche Intelligenz

Dr. Sebastian Rudolph
Sommersemester 2009
`http://semantic-web-grundlagen.de`

Übungsblatt 4: Logik

Hinweis zur nächsten Aufgabe: Eine *Teilformel* einer logischen Formel ist jeder Teilabschnitt der Formel, der selbst eine wohlgeformte logische Formel darstellt, wobei die vollständige Klammerung beachtet wird. Zum Beispiel sind die Teilformeln von $(q \to ((p \wedge q) \wedge r))$ genau die Formeln $(q \to ((p \wedge q) \wedge r))$, $((p \wedge q) \wedge r)$, $(p \wedge q)$, p, q, r. Dagegen ist z.B. $(q \wedge r)$ keine Teilformel (wegen der Klammerung). Um den Wahrheitswert einer aussagenlogischen Formel unter einer Interpretation $\mathcal{I}$ zu berechnen, bestimmt man schrittweise die Werte für alle Teilformeln, wobei die Werte für die kleinsten Teilformeln (d.h. für einzelne Propositionen wie p oder q) direkt durch die Interpretation $\mathcal{I}$ vorgegeben wird.

Aufgabe 4.1 Entscheide für jede der folgenden Formeln, ob diese allgemeingültig, erfüllbar, widerlegbar, oder unerfüllbar ist. Beweise Deine Antwort jeweils durch Angabe einer Wahrheitstafel, in der die Werte für jede Teilformel (und die gesamte Formel) jeweils in einer Spalte dargestellt werden.

Beispiel: Die Formel $(q \to (p \wedge q))$ ist erfüllbar und widerlegbar. Die entsprechende Wahrheitstafel ist: (wir schreiben hier $\mathcal{I}(\cdot)$, um darzustellen, dass die angegebenen Werte erst durch Anwendung einer bestimmten Interpretation $\mathcal{I}$ festgelegt werden):

$\mathcal{I}(p)$	$\mathcal{I}(q)$	$\mathcal{I}((p \wedge q))$	$\mathcal{I}((q \to (p \wedge q)))$
t	t	t	t
t	f	f	t
f	t	f	f
f	f	f	t

(a) $(p \vee \neg p)$

(b) $((p \vee q) \to (\neg p \vee \neg q))$

(c) $\neg((p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$

(d) $(((p \to q) \to p) \to p)$

(e) $(((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r)))$

(f) $((p \wedge \neg p) \to q)$

Aufgabe 4.2 Verdeutliche sich die Begriffe „Theorie“, „logische Konsequenz“ und „Äquivalenz“ und entscheide dann, ob folgende Behauptungen richtig sind. Gebe jeweils eine (informelle) Begründung für Deine Antwort.

Für beliebige Theorien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ gilt:

(a) Ist eine Formel F allgemeingültig, dann gilt $\mathcal{T} \models F$, d.h. aus jeder Theorie folgen zumindest alle Tautologien.

(b) Je größer eine logische Theorie ist, desto mehr Modelle hat sie. Das heißt, wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, dann ist jedes Modell von $\mathcal{T}$ auch ein Modell von $\mathcal{S}$.

(c) Je größer eine Theorie ist, desto mehr logische Konsequenzen hat sie. Das heißt, wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, dann ist jede logische Konsequenz aus $\mathcal{T}$ auch eine Konsequenz aus $\mathcal{S}$.

(d) Ist $\neg F \in \mathcal{T}$, dann kann $\mathcal{T} \models F$ niemals gelten (wobei F eine beliebige Formel ist).

(e) Sind zwei Theorien unterschiedlich ($\mathcal{T} \neq \mathcal{S}$), dann unterscheiden sie sich auch in wenigstens einer logischen Konsequenz (zum Beispiel, indem es eine Formel F gibt, so dass $\mathcal{T} \models F$ aber $\mathcal{S} \not\models F$).

Aufgabe 4.3 Versuche die folgenden natürlichsprachlichen Sätze durch logische Formeln auszudrücken.

Beispiel: „Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch.“

$$\rightsquigarrow \quad ((\forall(X)(\mathsf{mensch}(X) \rightarrow \mathsf{sterblich}(X)) \wedge \mathsf{mensch}(\mathit{sokrates}))$$

(Was würde die Formel bedeuten, wenn $\wedge$ anstelle von $\rightarrow$ verwendet würde?)

(a) „Alle Wege führen nach Rom.“

(b) „Wer die Prüfung besteht und nicht gelernt hat, der hatte großes Glück.“

(c) „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine, die größer ist.“

(d) „Es gibt keine natürliche Zahl, die größer als alle anderen ist.“

(e) „Alle Amerikaner und Briten sprechen Englisch.“

(f) „Ein Student kommt zu jeder Vorlesung.“

Aufgabe 4.4 Wandel die folgenden Formeln in Negationsnormalform um. Bei solchen Umformungen ist es zulässig, beliebige *Teil*formeln durch äquivalente Formeln zu ersetzen.

(a) *Geld allein macht nicht glücklich:*

$$\neg(\mathsf{geld} \rightarrow \mathsf{glücklich})$$

(b) Die folgende Tautologie entspricht der bekannten Ableitungsregel *Modus Ponens*:

$$(((p \to q) \land p) \to q)$$

(c) Die semantische Äquivalenz der DeMorgan'schen Regeln lässt sich als Formel darstellen:

$$(\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q))$$

(d) *Nicht alles was glitzert ist Gold, aber manches schon:*

$$(\neg(\forall X)(\mathsf{glitzert}(X) \to \mathsf{gold}(X)) \land (\exists Y)(\mathsf{glitzert}(Y) \land \mathsf{gold}(Y)))$$

(e) Auch diese Formel ist erfüllbar:

$$\neg((\forall X)(\exists Y)p(X, Y) \leftrightarrow (\exists Y)(\forall X)p(X, Y))$$

Aufgabe 4.5 Wandle die Negationsnormalformen der prädikatenlogischen Formeln (d) und (e) aus der vorigen Aufgabe in *Normalform* um, bilde dann daraus jeweils eine *Pränexform* und wende schließlich *Skolemisierung* an.

Aufgabe 4.6 Wandle die Negationsnormalformen der Formeln (a) bis (c) aus Aufgabe 4.4 und die skolemisierten Pränexnormalformen aus Aufgabe 4.5 in *konjunktive Normalform* (*Klauselform*) um. Kannst Du in den entstanden Formeln noch die ursprünglich beabsichtigten Aussagen wiederfinden?

Aufgabe 4.7 Beweise mit dem Resolutionsverfahren, dass die folgenden Mengen von Klauseln widersprüchlich sind.

(a)	$(\neg p \lor q)$	*Aus p folgt q und*
	p	*p gilt,*
	$\neg q$	*aber q gilt nicht.*
(b)	$(\neg\mathsf{hatBelag}(X, Y) \lor \mathsf{Pizza}(X))$	*Nur Pizzas haben Beläge,*
	$(\neg\mathsf{hatBelag}(Z, W) \lor \mathsf{PizzaBelag}(W))$	*nur Pizzabeläge kommen als Belag in Frage,*
	$(\neg\mathsf{Pizza}(V) \lor \neg\mathsf{PizzaBelag}(V))$	*nichts ist gleichzeitig Pizza und Pizzabelag, und*
	$\mathsf{PizzaBelag}(aubergine)$	*Aubergine und*
	$\mathsf{PizzaBelag}(cheddar)$	*Cheddar sind Pizzabeläge,*
	$\mathsf{hatBelag}(aubergine, cheddar)$	*aber die Aubergine wurde mit Cheddar belegt.*

Aufgabe 4.8 Modelliere die folgenden Sätze in einer Beschreibungslogik:

- Die Klasse `Gemüse` ist eine Unterklasse von `PizzaBelag`.

- Die Klasse `PizzaBelag` hat keine gemeinsamen Elemente mit der Klasse `Pizza`.
- Das Individuum `Aubergine` ist ein Element der Klasse `Gemüse`.
- Die Rolle `hatBelag` besteht ausschließlich zwischen Elementen der Klasse `Pizza` und der Klasse `PizzaBelag`.
- Pizzen haben immer mindestens zwei Beläge.
- Jede Pizza der Klasse `PizzaMargarita` hat `Tomate` als Belag.
- Die Klasse `Vegetarische Pizza` besteht aus den Elementen, die sowohl in der Klasse `PizzaOhneFleisch` als auch in der Klasse `PizzaOhneFisch` sind.
- Keine Pizza der Klasse `PizzaMargarita` hat Belag aus der Klasse `Fleisch`.

Aufgabe 4.9 Es soll das Konzept „vegetarische Pizza“ definiert werden. Welche der folgenden Definitionen ist dafür angemessen? Gebe dazu jeweils eine natürlichsprachliche Beschreibung der logischen Formeln an.

(a) $\mathsf{VegetarischePizza} \equiv \mathsf{Pizza} \sqcap \neg\exists\, \mathsf{hatZutat}.(\mathsf{Fleisch} \sqcap \mathsf{Fisch})$

(b) $\mathsf{VegetarischePizza} \equiv \mathsf{Pizza} \sqcap \forall\, \mathsf{hatBelag}.(\neg\mathsf{Fleisch} \sqcup \neg\mathsf{Fisch})$

(c) $\mathsf{VegetarischePizza} \equiv \mathsf{Pizza} \sqcap \neg\exists\, \mathsf{hatBelag}.\mathsf{Fleisch} \sqcap \neg\exists\, \mathsf{hatBelag}.\mathsf{Fisch}$

(d) $\mathsf{VegetarischePizza} \equiv \mathsf{Pizza} \sqcap \exists\, \mathsf{hatBelag}.\neg\mathsf{Fleisch} \sqcap \exists\, \mathsf{hatBelag}.\neg\mathsf{Fisch}$

(e) $\mathsf{VegetarischePizza} \equiv \mathsf{Pizza} \sqcap \forall\, \mathsf{hatZutat}.(\neg\mathsf{Fleisch} \sqcap \neg\mathsf{Fisch})$

Aufgabe 4.10 Gegeben sei folgende DL-Ontologie:

$\mathsf{hatBelag} \sqsubseteq \mathsf{hatZutat}$	$\exists\mathsf{hatBelag}.\top \sqsubseteq \mathsf{Pizza}$	$\top \sqsubseteq \forall\mathsf{hatBelag}.\mathsf{PizzaBelag}$
$\mathsf{Gemüse} \sqcap \mathsf{Käse} \sqsubseteq \bot$	$\mathsf{Käse} \sqcap \mathsf{Fleisch} \sqsubseteq \bot$	
$\mathsf{Gemüse} \sqcap \mathsf{Fleisch} \sqsubseteq \bot$	$\mathsf{Käse} \sqcap \mathsf{Fisch} \sqsubseteq \bot$	
$\mathsf{Gemüse} \sqcap \mathsf{Fisch} \sqsubseteq \bot$	$\mathsf{Fleisch} \sqcap \mathsf{Fisch} \sqsubseteq \bot$	

Betrachte nun zusätzlich die folgenden Klassendefinitionen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{KäsePizza} &\equiv \mathsf{Pizza} \sqcap \exists\, \mathsf{hatBelag}.\mathsf{Käse}\\
\mathsf{PizzaSpinat} &\equiv \exists\, \mathsf{hatBelag}.\mathsf{Spinat} \sqcap \exists\, \mathsf{hatBelag}.\mathsf{Käse} \sqcap\\
&\quad\ \forall\, \mathsf{hatBelag}.(\mathsf{Spinat} \sqcup \mathsf{Käse})\\
\mathsf{PizzaCarnivorus} &\equiv \mathsf{Pizza} \sqcap \forall\, \mathsf{hatBelag}.(\mathsf{Fleisch} \sqcap \mathsf{Fisch})\\
\mathsf{LeerePizza} &\equiv \mathsf{Pizza} \sqcap \neg\exists\, \mathsf{hatBelag}.\top
\end{aligned}$$

(a) Welche der oben aufgeführten Klassen von Pizzas würde durch einen DL-Reasoner als Unterklasse von VegetarischePizza (gemäß einer *korrekten* Definition aus Aufgabe 4.9) erkannt? Begründe jeweils Deine Entscheidung.

(b) Die Klassifikation unter (a) zeigt, dass einige der Pizzaklassen nicht das gewünschte Konzept modellieren. Wie könnte man ihre Definition korrigieren?

(c) Wie würde sich das unter (a) ermittelte Ergebnis verändern, wenn man bei der Definition von $\mathsf{VegetarischePizza}$ anstelle von $\equiv$ nur $\sqsubseteq$ verwenden würde?

Aufgabe 4.11 In der Beschreibungslogik gibt es auch den Begriff der *symmetrischen Rolle*. So wird eine Rolle bezeichnet, für welche gelten soll, dass wann immer sie von einem Individuum a zu einem Individuum b verläuft, sie auch von b nach a führt. Typisches Beispiel wäre etwa eine Rolle $\mathsf{verheiratetMit}$. Überlege, auf welche Weise die Tatsache, dass eine Rolle symmetrisch ist, mit den in der Vorlesung vorgestellten Konstruktoren formalisiert werden kann.

Die technischen Details des Tableauverfahrens werden nicht Bestandteil des Prüfungsstoffes sein (möglicherweise aber dessen Grundprinzipien). Die nachfolgende Aufgabe ist also eher etwas für Enthusiasten, die an einem Einblick in die konkrete Funktionsweise von Tableauverfahren interessiert sind.

Aufgabe 4.12 Beweise mit Hilfe des Tableauverfahrens die Erfüllbarkeit oder Unerfüllbarkeit der folgenden Wissensbasen. Bedenke, dass die Formeln dazu zuerst in Negationsnormalform umgeformt werdn müssen.

(a)	$\mathsf{Pizza} \sqcap \mathsf{PizzaBelag} \sqsubseteq \bot$	Nichts ist gleichzeitig Pizza und Pizzabelag.
	$\exists\, \mathsf{hatBelag}.\mathsf{PizzaBelag} \sqsubseteq \mathsf{Pizza}$	Alles was einen Pizzabelag hat, ist eine Pizza.
	$\mathsf{PizzaBelag}(\text{käse})$	Der Käse ist ein Pizzabelag.
	$\mathsf{PizzaBelag}(\text{aubergine})$	Die Aubergine ist ein Pizzabelag.
	$\mathsf{hatBelag}(\text{aubergine}, \text{käse})$	Die Aubergine wurde mit Käse belegt.

(b)	$\mathsf{Student} \sqsubseteq \exists\, \mathsf{besucht}.\mathsf{Vorlesung}$	Jeder Student besucht eine Vorlesung.
	$\mathsf{Vorlesung} \sqsubseteq \exists\, \mathsf{besuchtVon}.(\mathsf{Student} \sqcap \mathsf{Fleißig})$	In jeder Vorlesung ist auch ein fleißiger Student.
	$\mathsf{Student}(\text{heiner})$	Heiner ist Student,
	$\neg\mathsf{Fleißig}(\text{heiner})$	aber nicht fleißig.

Aufgabe 4.13 Transformiere die beiden Wissensbasen aus Aufgabe 4.12 in Klauselform. Drücke dazu die Formeln zunächst in Prädikatenlogik aus und wandle diese anschließend in Klauseln um.

Aufgabe 4.14 Der Nutzen des Tableauverfahrens basiert auf der Beobachtung, dass viele typische Fragestellungen an eine beschreibungslogische Wissenbasis auf die (globale) Unerfüllbarkeit einer Wissensbasis zurückgeführt werden können. Ist es umgekehrt auch möglich, globale Unerfüllbarkeit auf die anderen in der Vorlesung behandelten Inferenzprobleme zurückzurühren? In welchen Fällen geht das und wie?