Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
FG Differentialgleichungen

Selbstadjungierte Erweiterungen: Randtripel

Seminararbeit
Seminar Linear Operatoren
Sommersemester 2013

Monika Eisenmann
Berlin, den 8. September 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Lineare Relationen **3**

3 Randtripel von Adjungierten eines symmetrischen Operators **5**

Literatur **13**

1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung beschäftigen wir uns damit symmetrische, dicht definierte Operatoren selbstadjungiert zu erweitern. Dazu gibt es verschiedene Ansätze, wir werden hier das Konzepts der Randtripel vorstellen. Es ist wichtig selbstadjungierte Erweiterungen von unbeschränkten Operatoren zu untersuchen, da einige wichtige Resultate, wie beispielsweise eine Spektralzerlegung, Selbstadjungiertheit voraussetzen.

Für das Konzept der Randtripel wird weiterhin auch ein verallgemeinerter Begriff eins linearen Operators von Nöten sein, eine lineare Relation. Diese werden wir im zweitem Kapitel einführen. Im dritten Kapitel werden wir die Randtripel definieren und mit deren Hilfe selbstadjungierte Erweiterungen von symmetrischen, dicht definierte Operatoren auf einem Hilbertraum konstruieren. Hierbei orientiert sich die Ausarbeitung an den Kapiteln 14.1 und 14.2 aus dem Buch „Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space“ von Konrad Schmüdgen [7].

In der gesamten Arbeit bezeichnen wir mit $\mathcal{H}, \mathcal{H}_i$ komplexe Hilberträume mit Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$, $i = 1, 2, 3$.

2 Lineare Relationen

Dieser Abschnitt handelt von einer Verallgemeinerung von linearen Operatoren auf Hilberträumen. Dazu führen wir den Begriff der linearen Relation ein. Dieser Teil der Arbeit basiert zusätzlich auf Arens [1], in dem lineare Relationen noch einmal sehr ausführlich eingeführt werden. Weiterhin ist Arens gleichzeitig einer der Mitbegründer der Theorie der linearen Relationen.

Definition 1 (Lineare Relation)**.** Einen linearen Unterraum $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ nennen wir eine lineare Relation von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$. Gilt $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, so nennen wir $\mathcal{B}$ eine lineare Relation auf $\mathcal{H}_1$.

Da wir jeden linearen Operator $B : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ durch seinen Graphen eindeutig identifizieren können, gibt es für jeden lineare Operator eine lineare Relation

$$\mathcal{B} = \{(x, Bx) \mid x \in \mathcal{H}_1\} \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2.$$

Allerdings funktioniert die Umkehrung dazu im Allgemeinen nicht. Es gibt lineare Relationen $\mathcal{B}$ bei denen für ein $x \in \mathcal{H}_1$ unterschiedliche $y_1, y_2 \in \mathcal{H}_2$ existieren so, dass $(x, y_1) \in \mathcal{B}$ und $(x, y_2) \in \mathcal{B}$. Ein Beispiel dafür ist $\mathcal{B} = \{0\} \times \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Auf den linearen Relationen können wir viele Begriffe, die von Operatoren bereits bekannt sind, kanonisch weiterführen. Seien dazu im Folgenden, wenn nicht anders gesagt, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lineare Relationen von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ und $\mathcal{C}$ eine lineare Relation von $\mathcal{H}_2$ nach $\mathcal{H}_3$. Dann ist

$\mathcal{D}(\mathcal{B}) := \{x \in \mathcal{H}_1 \mid (x, y) \in \mathcal{B}$ für ein $y \in \mathcal{H}_2\}$ der Definitionsbereich,

$\mathcal{R}(\mathcal{B}) := \{x \in \mathcal{H}_2 \mid (x, y) \in \mathcal{B}$ für ein $x \in \mathcal{H}_1\}$ das Bild,

$\mathcal{N}(\mathcal{B}) := \{x \in \mathcal{H}_1 \mid (x, 0) \in \mathcal{B}\}$ der Kern und

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}) := \{y \in \mathcal{H}_2 \mid (0,y) \in \mathcal{B}\}$$ der mehrwertigen Anteil[1].

Ebenso kann eine skalare Multiplikation, Addition und Komposition zwischen linearen Relationen aus den jeweiligen Operationen für Operatoren abgeleitet werden. Für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \alpha\mathcal{B} &:= \{(x, \alpha y) \mid (x,y) \in \mathcal{B}\}, \\ \mathcal{A} + \mathcal{B} &:= \{(x, y+z) \mid (x,y) \in \mathcal{A}, (x,z) \in \mathcal{B}\} \text{ und} \\ \mathcal{C} \circ \mathcal{B} &:= \{(x,y) \mid (x,z) \in \mathcal{B}, (z,y) \in \mathcal{C} \text{ für ein } z \in \mathcal{H}_2\}. \end{aligned}$$

Weiter können lineare Relationen auch invertiert werden. Es gilt

$$\mathcal{B}^{-1} := \{(y,x) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \mid (x,y) \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1,$$

wobei hier anzumerken ist, dass im Gegensatz zu einem Operator jede lineare Relation eine Inverse besitzt. Wir nennen die lineare Relation $\mathcal{B}$ abgeschlossen, wenn der Unterraum $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ abgeschlossen ist. Mit diesen Grundlagen können wir auch die Resolventenmenge und das Spektrum auf die linearen Relationen erweitern.

Definition 2 (Resolventenmenge, Spektrum)**.** Sei $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Dann ist die Resolventenmenge $\rho(\mathcal{B})$ von $\mathcal{B}$ durch

$$\rho(\mathcal{B}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{B} - \lambda I)^{-1} \text{ Graph eines linearen beschränkten Operators}\}$$

gegeben. Weiter definieren wir das Spektrum $\sigma(\mathcal{B})$ von $\mathcal{B}$ durch $\sigma(\mathcal{B}) := \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{B})$.

Satz 3. *Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom und $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Dann gilt*

$$\sigma(p(\mathcal{B})) = p(\sigma(\mathcal{B})) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{B})\}.$$

Beweis. Der Beweis ist in Arens [1, 2.5 Spectral polynomial theorem, Seite 14] zu finden. □

Da wir uns im nächsten Abschnitt mit symmetrischen und selbstadjungierten Operatoren beschäftigen wollen, brauchen wir für die spätere Arbeit diese Begriffe auch für lineare Relationen. Dazu definieren wir zunächst die Adjungierte einer lineare Relation $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}^* := \{(y,x) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \mid \langle v, y\rangle_2 = \langle u, x\rangle_1 \text{ für alle } (u,v) \in \mathcal{B}\}.$$

Wir nennen $\mathcal{B}$ symmetrisch, falls $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^*$ gilt und wir nennen $\mathcal{B}$ selbstadjungiert, falls $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$ gilt. Es gelten folgende Eigenschaften

$$\begin{aligned} &(\lambda\mathcal{B})^* = \overline{\lambda}\mathcal{B}^*, && (\mathcal{B}^{-1})^* = (\mathcal{B}^*)^{-1}, \\ &\mathcal{N}(\mathcal{B}^*) = \mathcal{R}(\mathcal{B})^\perp, && \mathcal{M}(\mathcal{B}^*) = \mathcal{D}(\mathcal{B})^\perp, \\ &\mathcal{B}^* \text{ ist abgeschlossen}, && (\mathcal{B}^*)^* = \overline{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

[1]aus dem Englischen: *multivalued part*

Manchmal kann es hilfreich sein, statt einer linearen Relation wieder einen Operator zu benutzen, dafür führen wir im Folgenden den Operatorteil einer linearen Relation ein. Die Idee dazu stammt aus Azizov, Behrndt, Jonas und Trunk [2, Seite 153]. Wir definieren für eine abgeschlossene lineare Relation $\mathcal{B}$ den Operatorteil $\mathcal{B}_{op}$ als

$$\mathcal{B}_{op} := \mathcal{B} \cap (\mathcal{D}(\mathcal{B}) \times \mathcal{D}(\mathcal{B}^*)).$$

Mit den Eigenschaften, die wir oben angegeben haben, gilt für $\mathcal{B}$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{B}^*) \oplus \mathcal{M}(\mathcal{B}^*)^\perp = \mathcal{M}(\mathcal{B}^*) \oplus \overline{\mathcal{D}(\mathcal{B})} \quad \text{und}$$
$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \oplus \mathcal{M}(\mathcal{B})^\perp = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \oplus \overline{\mathcal{D}(\mathcal{B}^*)}.$$

Damit folgt $\mathcal{M}(\mathcal{B}_{op}) = \{0\}$. Dies ist gerade die Voraussetzung dafür, dass $\mathcal{B}_{op}$ der Graph eines linearen Operators ist. Damit haben wir die Möglichkeit $\mathcal{B}$ wie folgt aufzuschreiben

$$\mathcal{B} = \{(x, \mathcal{B}_{op}x + z) \mid x \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{op}), z \in \mathcal{M}(\mathcal{B})\},$$

wobei $\mathcal{B}_{op}x$ das eindeutig bestimmte $y \in \mathcal{H}_2$ ist so, dass $(x, y) \in \mathcal{B}_{op}$ gilt.

3 Randtripel von Adjungierten eines symmetrischen Operators

In diesem Kapitel werden wir Randtripel vorstellen und damit eine Möglichkeit herleiten, um symmetrische Operatoren selbstadjungiert zu erweitern. Hierbei handelt es sich um einen relativ modernen Ansatz, bei dem wir nachweisen, dass es eine eins-zu-eins-Relation zwischen den selbstadjungierten linearen Relationen auf einem Hilfs-Hilbertraum und den selbstadjungierten Erweiterungen von einem Operator auf einem Hilbertraum gibt. Dieses Resultat geht auf Bruk [3] und Kochubei [6] zurück, die beide unabhängig voneinander diese Aussage bewiesen haben.

Sei im Folgenden T ein dicht definierter symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$.

Definition 4 (Randtripel)**.** Ein Randtripel für T^* ist ein Tripel $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ aus einem Hilbertraum $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$ und linearen Operatoren $\Gamma_0, \Gamma_1 : \mathcal{D}(T^*) \to \mathcal{K}$, welche die folgenden zwei Eigenschaften erfüllen:

(i) Es gilt $\langle T^* f, g \rangle - \langle f, T^* g \rangle = \langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g \rangle_{\mathcal{K}} - \langle \Gamma_0 f, \Gamma_1 g \rangle_{\mathcal{K}}$ für alle $f, g \in \mathcal{D}(T^*)$.
(ii) Die Abbildung $\gamma : \mathcal{D}(T^*) \to \mathcal{K} \times \mathcal{K}, \quad f \mapsto (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f)$ ist surjektiv.

Hierbei bezeichnet man die erste Bedingung auch als abstrakte Greensche Formel.

Um diese Definition ein wenig anschaulicher zu gestalten, folgt nun ein einfaches Beispiel.

Beispiel 5. Wir betrachten den Ableitungsoperator $T = -i\frac{d}{dx}$ auf dem Hilbertraum $L^2(a, b)$. Dieser ist symmetrisch auf $\mathcal{D}(T) = H_0^1(a, b)$, wobei die Adjungierte auf $D(T^*) = H^1(a, b)$ definiert ist. Dann ist durch

$$\mathcal{K} = \mathbb{C}, \quad \Gamma_0(f) = \frac{f(a) - f(b)}{i\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \Gamma_1(f) = \frac{f(a) + f(b)}{\sqrt{2}} \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(T^*)$$

ein Randtripel $(\mathcal{K}, \varGamma_0, \varGamma_1)$ für T^* gegeben. Dies wollen wir nachweisen. Zunächst ist schnell einzusehen, dass $\varGamma_0$ und $\varGamma_1$ lineare Operatoren von $\mathcal{D}(T^*)$ nach $\mathbb{C}$ sind. Als nächstes zeigen wir, dass die Greensche Formel erfüllt ist. Dazu beginnen wir die linke Seite der Definition umzuformen. Für die stetigen Repräsentanten von $f, g \in \mathcal{D}(T^*)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\langle \varGamma_1 f, \varGamma_0 g\rangle_{\mathcal{K}} - \langle \varGamma_0 f, \varGamma_1 g\rangle_{\mathcal{K}} \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\left(\frac{g(a)-g(b)}{i\sqrt{2}}\right)} - \frac{f(a)-f(b)}{i\sqrt{2}} \cdot \overline{\left(\frac{g(a)+g(b)}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= \frac{i}{2}\Big(f(a)\overline{g(a)} - f(a)\overline{g(b)} + f(b)\overline{g(a)} - f(b)\overline{g(b)} \\
&\qquad\qquad + f(a)\overline{g(a)} + f(a)\overline{g(b)} - f(b)\overline{g(a)} - f(b)\overline{g(b)}\Big) \\
&= -i\left(f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)}\right) \\
&= -i\ f(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b + \int_a^b if(x)\overline{g'(x)}dx - \int_a^b if(x)\overline{g'(x)}dx \\
&= \int_a^b -if'(x)\overline{g(x)}dx - \int_a^b f(x)\overline{-ig'(x)}dx = \langle T^* f, g\rangle - \langle f, T^* g\rangle.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Greensche Formel gezeigt. Die Surjektivität aus der nächsten Bedingung folgt aus $\mathcal{D}(T^*) = H^1(a,b)$, denn wählen wir ein Tupel $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ so finden wir eine Funktion $\widetilde{f} \in \mathcal{D}(T^*)$ mit $\widetilde{f}(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(iz_1 + z_2)$ und $\widetilde{f}(b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2 - iz_1)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
(\varGamma_0 \widetilde{f}, \varGamma_1 \widetilde{f}) &= \left(\frac{\widetilde{f}(a) - \widetilde{f}(b)}{i\sqrt{2}}, \frac{\widetilde{f}(a) + \widetilde{f}(b)}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(iz_1+z_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2 - iz_1)}{i\sqrt{2}}, \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(iz_1+z_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2 - iz_1)}{\sqrt{2}}\right) \\
&= (z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Somit ist auch die Surjektivitätsbedingung erfüllt.

Aus diesem Beispiel wird auch der Name Randtripel ersichtlich. Denn nutzen wir einen Differentialoperator T auf Funktionen auf einem Gebiet Ω, stellen $\varGamma_0$ und $\varGamma_1$ Funktionen dar, die auf den Rand $\partial\Omega$ abbilden. Bevor wir uns nun den selbstadjungierten Erweiterung widmen, ist es im Vorfeld sinnvoll zu klären, wann es überhaupt ein Randtripel für T^* gibt. Dafür hilft uns der nächste Satz.

Satz 6. *Es existiert genau dann ein Randtripel $(\mathcal{K}, \varGamma_0, \varGamma_1)$ für T^*, wenn die Defektindizes von T übereinstimmen, d. h.*

$$\dim \mathcal{N}(T^* + iI) = \dim \mathcal{N}(T^* - iI) = n.$$

In diesem Fall gilt dann $\dim \mathcal{K} = n$.

Beweis. Ein Beweis hierfür steht in Schmüdgen [7, Propostion 14.5, Seite 312]. Für die Rückrichtigung steht ein ausführlicher Beweis in Gorbachuk und Gorbachuk [5, Chapter 3, Theorem 1.5]. □

Definition 7 (Echte Erweiterung)**.** Ein abgeschlossener Operator S auf $\mathcal{H}$ heißt echte Erweiterung[2] von T, falls $T \subseteq S \subseteq T^*$ gilt. Zwei echte Erweiterungen S_1 und S_2 von T heißen disjunkt, falls $\mathcal{D}(\overline{T}) = \mathcal{D}(S_1) \cap \mathcal{D}(S_2)$ gilt und, sie heißen transversal, falls $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(S_1) + \mathcal{D}(S_2)$ gilt.

Bemerkung 8. Der Begriff *echte Erweiterung* ist wie erwähnt eine Übersetzung von dem englischen Ausdruck *proper extension*. In diesem Zusammenhang wollen wir allerdings nicht zwingender Weise nur Erweiterungen betrachten, die nicht mit T übereinstimmen dürfen. Ist T ein abgeschlossener Operator, so ist auch T selber eine echte Erweiterung von sich selbst.

Bemerkung 9. Die Definition einer transversalen echten Erweiterung ist in der Literatur nicht ganz einheitlich. Die oben genannte Definition stammt aus Schmüdgen [7], in Derkac und Malamud [4] wird hingegen zusätzlich Disjunktheit gefordert.

Sei von nun an $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ ein Randtripel für T^*. Beginnen wir den gesuchten eins-zu-eins-Zusammenhang zwischen den echten Erweiterungen von T und den abgeschlossenen linearen Relationen auf $\mathcal{K}$ mithilfe eines Randtripels herzuleiten. Dazu werden wir im Folgenden zwei Möglichkeiten vorstellen.

Zum Einen wird im Buch von Schmüdgen [7] direkt ein Weg erklärt, um zwischen den linearen Relationen $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{K}$ und den Operatoren S auf $\mathcal{H}$ mit $T \subseteq S \subseteq T^*$ zu wechseln. Dazu nutzen wir die Einschränkung $T_{\mathcal{B}}$ von T^* auf den Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(T_{\mathcal{B}}) := \{ f \in \mathcal{D}(T^*) \mid (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \in \mathcal{B} \}$$

und andererseits definieren wir für S die Randmenge

$$\mathcal{B}(S) := \{ (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \mid f \in \mathcal{D}(S) \}.$$

Dies gibt uns eine Relation zwischen einer linearen Relation $\mathcal{B}$ und einem Operator $S = T_{\mathcal{B}}$ mit $T \subseteq S \subseteq T^*$. Dazu wollen wir eine Anschauung geben, die Beispiel 5 weiterführt.

Beispiel 10. Sei $\mathcal{B} = \{0\} \times \mathbb{C}$, dann ist $\mathcal{B}$ eine lineare Relation auf $\mathbb{C}$. Für diese Relation wollen wir nun den dazugehörigen Operator $T_{\mathcal{B}}$ bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}}) &= \left\{ f \in H^1(a,b) \,\middle|\, \left(\frac{f(a) - f(b)}{i\sqrt{2}}, \frac{f(a) + f(b)}{\sqrt{2}} \right) \in \{0\} \times \mathbb{C} \right\} \\ &= \{ f \in H^1(a,b) \mid f(a) = f(b) \}. \end{aligned}$$

Damit ist $T_{\mathcal{B}}$ die Einschränkung von T^* auf $\mathcal{D}(T_{\mathcal{B}}) = \{ f \in H^1(a,b) \mid f(a) = f(b) \}$. Geben wir nun stattdessen den Operator $S = T^*|_{\mathcal{D}(S)}$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(S) = \{ f \in H^1(a,b) \mid f \equiv \mathit{const} \text{ f. ü.} \}$ vor, so erhalten wir die Randmenge

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \left(\frac{f(a) - f(b)}{i\sqrt{2}}, \frac{f(a) + f(b)}{\sqrt{2}} \right) \,\middle|\, f \in \mathcal{D}(S) \right\} = \{0\} \times \mathbb{C}$$

zum Operator S.

[2]aus dem Englischen: *proper extension*

Da $\gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ eine surjektive Funktion ist, gilt

$$\mathcal{B}(T_{\mathcal{B}}) = \{(\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \mid f \in \mathcal{D}(T^*), (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}.$$

Andersherum gilt $S = T_{\mathcal{B}(S)}$ im Allgemeinen nicht. Wie wir an unserem obigen Beispiel sehen, gilt für den Operator S dort $S \subsetneq T_{\mathcal{B}(S)}$. Jedoch ist die schwächere Aussage $S \subseteq T_{\mathcal{B}(S)}$ für einen beliebigen Operator S mit $T \subseteq S \subseteq T^*$ wahr. Verstärken wir die Voraussetzungen an S, so können wir auch hier eine Gleichheit erhalten, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 11. *Sei $\mathcal{B}$ eine lineare Relation auf $\mathcal{K}$ und sei S ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$ so, dass $T \subseteq S \subseteq T^*$ und $\mathcal{B}(S) = \mathcal{B}$ gilt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $S^* = T_{\mathcal{B}^*}$.

(ii) $\overline{S} = T_{\overline{\mathcal{B}}}$.

(iii) Ist S abgeschlossen, so ist $\mathcal{B}(S) = \mathcal{B}$ abgeschlossen.

(iv) $\overline{T} = T_{\{(0,0)\}}$, *d. h.* $\mathcal{D}(\overline{T}) = \{f \in \mathcal{D}(T^*) \mid \Gamma_0 f = \Gamma_0 f = 0\}$.

Beweis. Der hier aufgeführte Beweis stammt aus Schmüdgen [7, Lemma 14.6, Seite 312f].

(i) Laut Voraussetzung gilt $T \subseteq S \subseteq T^*$ und damit auch $\overline{T} = T^{**} \subseteq S^* \subseteq T^*$, also ist S^* eine Einschränkung von T^*. Somit ist $g \in \mathcal{D}(T^*)$ genau dann in $\mathcal{D}(S^*)$, wenn
$$\langle Sf, g\rangle = \langle f, T^* g\rangle \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{D}(S)$$
gilt. Nutzen wir nun die Greensche Ungleichung des Randtripels, ist die Gleichheit äquivalent zu
$$\langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g\rangle_{\mathcal{K}} = \langle \Gamma_0 f, \Gamma_1 g\rangle_{\mathcal{K}} \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{D}(S).$$
Und auch diese Gleichung ist nach der Definition der Randmenge äquivalent zu
$$\langle x, \Gamma_0 g\rangle_{\mathcal{K}} = \langle y, \Gamma_1 g\rangle_{\mathcal{K}} \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in \mathcal{B}(S).$$
Damit ist die Gleichung gleichbedeutend mit $(\Gamma_0 g, \Gamma_1 g) \in \mathcal{B}^*$, was uns letztlich die gewünschte Äquivalenz
$$g \in \mathcal{D}(S^*) \Leftrightarrow g \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}^*})$$
liefert. Da sowohl S als auch $T_{\mathcal{B}}$ Einschränkungen von T^* sind, haben wir diesen Punkt hiermit gezeigt.

(ii) Die Aussage folgt direkt mit (i), es gilt
$$\overline{S} = S^{**} = T_{\mathcal{B}^{**}} = T_{\overline{\mathcal{B}}}.$$

(iii) Sei S abgeschlossen. Dann gilt $S \subseteq T_{\mathcal{B}} \subseteq T_{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{S} = S$ und damit $T_{\mathcal{B}} = T_{\overline{\mathcal{B}}}$. Aus $\mathcal{B}(T_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$ folgt die Behauptung.

(iv) Sei $\mathcal{B} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, dann gilt $\mathcal{B}^* = \{(0,0)\}$ und wegen der Surjektivität von γ auch $T_{\mathcal{B}} = T^*$. Mit (i) folgt

$$\overline{T} = T^{**} = (T_{\mathcal{B}})^* = T_{\mathcal{B}^*} = T_{\{(0,0)\}},$$

was die Aussage beweist.

□

Mit diesen Hilfsaussagen können wir einen Zusammenhang zwischen linearen Relationen und den echten Erweiterungen von T formulieren.

Satz 12. *Durch $\mathcal{B} \leftrightarrow T_{\mathcal{B}}$ ist eine eins-zu-eins-Relation zwischen den abgeschlossenen linearen Relationen $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{K}$ und den echten Erweiterungen S von T gegeben. Für abgeschlossene Relationen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_1$ auf $\mathcal{K}$ gilt weiter:*

(i) $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$ *ist äquivalent zu* $T_{\mathcal{B}_0} \subseteq T_{\mathcal{B}_1}$.

(ii) $T_{\mathcal{B}_0}$ *und* $T_{\mathcal{B}_1}$ *sind genau dann disjunkt, wenn* $\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_1 = \{(0,0)\}$ *gilt.*

(iii) $T_{\mathcal{B}_0}$ *und* $T_{\mathcal{B}_1}$ *sind genau dann transversal, wenn* $\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ *gilt.*

(iv) $T_{\mathcal{B}}$ *ist genau dann symmetrisch, wenn* $\mathcal{B}$ *symmetrisch ist.*

(v) $T_{\mathcal{B}}$ *ist genau dann selbstadjungiert, wenn* $\mathcal{B}$ *selbstadjungiert ist.*

Beweis. Auch dieser Beweis kommt aus dem Buch von Schmüdgen [7, Proposition 14.7, Seite 313]. Beginnen wir die eins-zu-eins Relation zu zeigen. Wählen wir eine beliebige abgeschlossene lineare Relation $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{K}$, so ist nach Aussage (ii) von Lemma 11 auch $T_{\mathcal{B}}$ eine echte Erweiterung von T. Für die andere Richtung sei S eine echte Erweiterung von T. Da S abgeschlossen ist, folgt mit Lemma 11 (iii), dass auch $\mathcal{B}(S)$ abgeschlossen ist und damit ist $S = T_{\mathcal{B}(S)}$ mit Lemma 11 (ii).

(i) Die Hinrichtung folgt direkt aus der Definition des Definitionsbereichs. Für die Rückrichtung nutzen wir, dass $\mathcal{B}(T_{\mathcal{B}_i}) = \mathcal{B}_i$ für $i = 0,1$ gilt. Damit folgt auch diese Aussage direkt.

(ii) Diese Aussage folgt mit (i).

(iii) Nehmen wir zunächst an, dass $T_{\mathcal{B}_0}$ und $T_{\mathcal{B}_1}$ transversal sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 &= \mathcal{B}(T_{\mathcal{B}_0}) + \mathcal{B}(T_{\mathcal{B}_1}) \\ &= \{(\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \mid f \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}_0})\} + \{(\Gamma_0 g, \Gamma_1 g) \mid g \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}_1})\} \\ &= \{(\Gamma_0(f+g), \Gamma_1(f+g)) \mid f \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}_0}), g \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}_1})\} \\ &= \{(\Gamma_0 h, \Gamma_1 h) \mid h \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}^*})\} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}.\end{aligned}$$

Für die Rückrichtung sei nun $\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}(T_{\mathcal{B}_0}) + \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}_1}) \\ &= \{f \in \mathcal{D}(T^*) \mid (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \in \mathcal{B}_0\} + \{g \in \mathcal{D}(T^*) \mid (\Gamma_0 g, \Gamma_1 g) \in \mathcal{B}_1\} \\ &= \{f + g \mid (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \in \mathcal{B}_0, (\Gamma_0 g, \Gamma_1 g) \in \mathcal{B}_1\} \\ &= \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}_0+\mathcal{B}_1}) = \mathcal{D}(T_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}) = \mathcal{D}(T^*),\end{aligned}$$

womit die Aussage gezeigt ist.

(iv) Sei $T_{\mathcal{B}}$ symmetrisch, d. h. $T_{\mathcal{B}} \subseteq (T_{\mathcal{B}})^* = T_{\mathcal{B}^*}$. Dies ist mit (i) äquivalent zu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^*$, was diesen Punkt beweist.

(v) Der Beweis läuft analog zu (iv).

□

Mit diesem Satz haben wir insbesondere bewiesen, dass unsere Relation zwischen den selbstadjungierten linearen Relationen und den selbstadjungierten Erweiterungn einen eins-zu-eins Zusammenhang liefert.

Im Folgenden führen wir eine alternative Möglichkeit auf selbstadjungierte Erweiterungen mithilfe eines unitären Operatoren auf $\mathcal{K}$ zu finden. Diese richtet sich nach dem Buch von V. I. Gorbachuk und M. I. Gorbachuk [5, Chapter 3, Section 1.2–1.4, Seiten 149–157], wo sie für den allgemeineren Begriff des dissipativen Operators durchgeführt wird. Unter ein wenig stärkeren Voraussetzungen ist dieser Ansatz auch in Kochubei [6] zu finden.

Hier beginnen wir einen Zusammenhang zwischen den selbstadjungierten linearen Relationen auf $\mathcal{K}$ und den unitären Operatoren auf $\mathcal{K}$ herzustellen.

Satz 13. *Ein Tupel $(x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ liegt genau dann in einer selbstadjungierten Relation $\mathcal{B}$, wenn*

$$(V - I)y + i(V + I)x = 0$$

für eine unitäre Abbildung V auf $\mathcal{K}$ erfüllt ist. Der Operator V ist durch $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf Gorbachuk und Gorbachuk [5, Theorem 1.4, Seite 152]. □

Diese Aussage gibt uns einen Zusammenhang zwischen unitären Operatoren und selbstadjungierten Relationen, der nächste Schritt ist von hier aus zu den selbstadjungierten Erweiterungen eines Operators T auf $\mathcal{H}$ zu kommen. Dafür nutzen wir auch hier das Randtripel $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ für T^*.

Satz 14. *Für einen Operator V auf $\mathcal{K}$ ist die Einschränkung T^V von T^* auf*

$$\mathcal{D}(T^V) = \{f \in \mathcal{D}(T^*) \mid (V - I)\Gamma_1 f + i(V + I)\Gamma_0 f = 0\}$$

selbstadjungiert, wenn V unitär ist. Andersherum kann jede selbstadjungierte echte Erweiterung auf diese Weise dargestellt werden.

Beweis. Die Idee für den Beweis entnehmen wir aus Gorbachuk und Gorbachuk [5, Theorem 1.6, Seite 156f]. Beginnen wir mit einem unitären Operator V auf $\mathcal{K}$ und zeigen, dass T^V selbstadjungiert ist. Da V ein unitärer Operator ist, ist mit Satz 13 die Randmenge $\mathcal{B}(T^V) = \{(\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \mid f \in \mathcal{D}(T^V)\}$ eine selbstadjungierte lineare Relation. Dies impliziert zusammen mit der Greenschen Ungleichung des Randtripels

$$\langle T^V f, g\rangle - \langle f, T^V g\rangle = \langle T^* f, g\rangle - \langle f, T^* g\rangle = \langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g\rangle_{\mathcal{K}} - \langle \Gamma_0 f, \Gamma_1 g\rangle_{\mathcal{K}} = 0.$$

Daher ist T^V selbstadjungiert.

Nehmen wir nun eine beliebe selbstadjungierte Erweiterung S von T, so betrachten wir wieder die Randmenge $\mathcal{B}(S) = \{(\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \mid f \in \mathcal{D}(S)\}$ zu S. Diese ist selbstadjungiert, wie wir im Folgenden zeigen:

$$\begin{aligned} B(S)^* &= \{(y,x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid \langle \Gamma_1 f, y\rangle_{\mathcal{K}} = \langle \Gamma_0 f, y\rangle_{\mathcal{K}} \text{ für alle } f \in \mathcal{D}(S)\} \\ &= \{(\Gamma_0 g, \Gamma_1 g) \mid g \in \mathcal{D}(T^*), \langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g\rangle_{\mathcal{K}} = \langle \Gamma_0 f, \Gamma_1 g\rangle_{\mathcal{K}} \text{ für alle } f \in \mathcal{D}(S)\} \\ &= \{(\Gamma_0 g, \Gamma_1 g) \mid g \in \mathcal{D}(T^*), \langle S^* f, g\rangle = \langle f, S^* g\rangle \text{ für alle } f \in \mathcal{D}(S)\} \\ &= \{(\Gamma_0 g, \Gamma_1 g) \mid g \in \mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(S)\} = \mathcal{B}(S). \end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}(S)$ selbstadjungiert ist, folgt mit Satz 13, dass ein unitärer Operator V auf $\mathcal{K}$ existiert, mit dem wir $\mathcal{B}(S)$ identifizieren können. Wie im ersten Teil des Beweises gezeigt, ist damit der Operator T^V selbstadjungiert. Nun fehlt nur noch, dass $T^V = S$ gilt. Der Beweis hierzu kann analog geführt werden wie der Beweis von Lemma 11 (i). □

Den Zusammenhang zwischen diesen beiden Möglichkeiten selbstadjungierte Erweiterungen von T zu erhalten, zeigt der folgende Satz aus dem Buch von Schmüdgen [7]. Hier wird bewiesen, dass beide Resultate aq̈uivalent sind.

Satz 15. *Sei* $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *ein Randtripel für* T^* *und* S *ein Operator auf* $\mathcal{H}$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *S ist eine selbstadjungierte Erweiterung von T auf $\mathcal{H}$.*

(ii) *Es existiert eine lineare Relation $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{K}$ so, dass $S = T_{\mathcal{B}}$ gilt.*

(iii) *Es existiert ein unitärer Operator V auf $\mathcal{K}$ so, dass $T^V = S$ gilt.*

Ein Beweis hierfür kann in Schmüdgen [7, Theorem 14.10, Seite 314] gefunden werden. Dieser benutzt die Cayley Transformation von Operatoren. Diese gibt uns eine Möglichkeit für einen selbstadjungierten Operator B einen eindeutigen unitären Operator V_B zu erhalten mithilfe der Formel

$$V_B = (B - iI)(B + iI)^{-1}.$$

Auch andersherum bekommen wir für den unitären Operator V_B wieder den selbstadjungierten Operator B mit der inversen Cayley Transformation

$$B = i(I + V_B)(I - V_B)^{-1}.$$

Eine Einführung zu diesem Thema ist im Buch von Yosida [8, Abschnitt VII.4, Seiten 202–205] zu finden. Auch diese Resultate werden wir noch einmal an einem Beispiel veranschaulichen.

Beispiel 16. Betrachten wir weiter unser Beispiel 5, so wollen wir nun hierfür eine selbstadjungierte Erweiterung angeben. Beginnen wir mit der linearen Relation $\mathcal{B} = \{(-z, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$. Es gilt

$$\mathcal{B}^* = \{(y,x) \in \mathbb{C}^2 \mid -z\overline{y} = z\overline{x}, z \in \mathbb{C}\} = \{(-z, z) \mid z \in \mathbb{C}\}.$$

Also ist $\mathcal{B}$ selbstadjungiert und wir erhalten mithilfe unsere obigen Resultate die selbstadjugierte Erweiterung $T_{\mathcal{B}}$ mit Definitionsbereich

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(T_{\mathcal{B}}) &= \left\{ f \in H^1(a,b) \,\middle|\, \left(\frac{f(a)-f(b)}{i\sqrt{2}}, \frac{f(a)+f(b)}{\sqrt{2}}\right) = (-z,z), \quad z \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ f \in H^1(a,b) \,\middle|\, \frac{f(a)-f(b)}{i\sqrt{2}} = -\frac{f(a)+f(b)}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= \{ f \in H^1(a,b) \mid f(a)-f(b) = -if(a) - if(b) \} \\ &= \{ f \in H^1(a,b) \mid (1+i)f(a) = (1-i)f(b) \} \\ &= \{ f \in H^1(a,b) \mid \tfrac{1+i}{1-i} f(a) = f(b) \} = \{ f \in H^1(a,b) \mid if(a) = f(b) \}.\end{aligned}$$

Nun wollen wir die selbe Erweiterung mithilfe eines unitären Operators erhalten. Unsere oben gewählte Relation ist der Graph eines Operators auf $\mathcal{H}$, daher betrachten wir den dazugehörigen Operator $B = -I$ auf $\mathbb{C}$. Wie oben erwähnt erhalten wir den Zusammenhang zwischen dem selbstadjungierten und dem passenden unitären Operator durch die Cayley Transformation. So ist also

$$V = (B - iI)(B + iI)^{-1} = (-I - iI)(-I + iI)^{-1} = i(-I - iI)(-iI - I)^{-1} = iI.$$

Bestimmen wir damit den Definitionsbereich für die Erweiterung T^V. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(T^V) &= \left\{ f \in H^1(a,b) \,\middle|\, (V-I)\frac{f(a)+f(b)}{\sqrt{2}} + i(V+I)\frac{f(a)-f(b)}{i\sqrt{2}} = 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in H^1(a,b) \,\middle|\, (iI-I)\frac{f(a)+f(b)}{\sqrt{2}} = -i(iI+I)\frac{f(a)-f(b)}{i\sqrt{2}} \right\} \\ &= \{ f \in H^1(a,b) \mid (iI-I)(f(a)+f(b)) = -(iI+I)(f(a)-f(b)) \} \\ &= \{ f \in H^1(a,b) \mid 2if(a) = 2f(b) \} = \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}}).\end{aligned}$$

Damit haben wir jeweils die gleiche Erweiterung von T bekommen, die nach Satz 15 selbstadjungiert ist.

Haben wir ein Randtripel für T^* gegeben, finden wir auf diese Weise zwei selbstadjungierte Erweiterungen, die durch den Kern der linearen Operatoren Γ_0 und Γ_1 bestimmt sind.

Korollar 17. *Es existieren zwei selbstadjungierte Erweiterungen T_0, T_1 von T auf den Definitionsbereichen $\mathcal{D}(T_0) = \mathcal{N}(\Gamma_0)$, $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{N}(\Gamma_1)$.*

Beweis. Offenbar sind die linearen Relationen $\mathcal{B}_0 = \{0\} \times \mathcal{K}$ und $\mathcal{B}_1 = \mathcal{K} \times \{0\}$ selbstadjungiert. Die dazugehörigen Operatoren $T_0 = T_{\mathcal{B}_0}$ und $T_1 = T_{\mathcal{B}_1}$ sind nach Satz 12 auch selbstadjungierte Erweiterungen von T. □

Literatur

[1] Arens, R.: Operational Calculus of Linear Relations. In: *Pacific Journal of Mathematics* Volume 11, Nummer 1 (1961), S. 9–23

[2] Azizov, T.Y. ; Behrndt, J. ; Jonas, P. ; Trunk, C.: Compact and finite rank perturbations of linear relations in Hilbert spaces. In: *Integral Equations and Operator Theory* Volume 63

[3] Bruk, V.M.: On a Class of Boundary value Problems with Spectral Parameter in the Boundary Condition. In: *Math. USSR Sbornik* Volume 29, Nummer 2

[4] Derkach, V.A. ; Malamud, M.M.: Generalized Resolvents and the Boundary Value Problems for Hermitian Operators with Gaps. In: *Journal of Functional Analysis* Volume 95

[5] Gorbachuk, V.I. ; Gorbachuk, M.L.: *Boundery Value Problems for Operator Differential Equations*. Dordrecht Boston London : Kluwer Academic Publishers, 1990

[6] Kochubei, A.N.: Extensions of Symmetric Operators and Symmetric Binary Relations. In: *Mathematical Notes* Volume 17, Nummer 1 (1975), S. 25–28

[7] Schmüdgen, K.: *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Dordrecht Heidelberg New York London : Springer-Verlag, 2012

[8] Yosida, K.: *Functional Analysis*. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 1980