Übersicht – Balkentheorie – Flächenträgheitsmoment und Widerstandsmoment eines Rohres - Biegelinien

Gerade Rohrleitungen		Maximale Durchbiegung	Maximales Biegemoment	Maximale Biegespannung	Stützweite bei maximaler Biegespannung
		f_{max}	$M_{b,max}$	$\sigma_{b,max}$	l
Ungünstigster Fall	Einfeldträger beidseitig gelenkig gelagert	$x = \frac{l}{2}$ $\frac{5}{384}\frac{pl^4}{IE}$	$x = \frac{l}{2}$ $\frac{1}{8}pl^2$	$x = \frac{l}{2}$ $\frac{1}{8}\frac{pl^2}{W}$	$\sqrt{\frac{8\,W\,\sigma_{b,max}}{p}}$
Günstigster Fall	Durchlaufträger bzw. Einfeldträger beidseitig einspannt	$x = \frac{l}{2}$ $\frac{1}{384}\frac{pl^4}{IE}$	$x = 0 \;\wedge\; x = l$ $\frac{1}{12}pl^2$	$x = 0 \;\wedge\; x = l$ $\frac{1}{12}\frac{pl^2}{W}$	$\sqrt{\frac{12\,W\,\sigma_{b,max}}{p}}$

Tabelle 1

x	: Koordinate entlang der Rohrachse	[Länge]	[m]
l	: Stützweite	[Länge]	[m]
p	: Streckenlast	[Kraft/Länge]	[N/m]
M_b	: Biegemoment an der Stelle x	[Kraft x Länge]	[Nm]
σ_b	: Biegespannung	[Kraft/Fläche]	[N/mm^2]
E	: Elastizitätsmodul	[Kraft/Fläche]	[N/mm^2]
I	: Flächenträgheitsmoment	$[Länge^4]$	$[mm^4]$
W	: Widerstandsmoment	[Länge^3]	[mm^3]
e	: Abstand der äußersten Faser von der Nulllinie	[Länge]	[m]
f	: Durchbiegung	[Länge]	[m]
d_a	: Rohraußendurchmesser	[Länge]	[m]
d_i	: Rohrinnenndurchmesser	[Länge]	[m]
r_a	: Rohraußenradius	[Länge]	[m]
r_i	: Rohrinnenradius	[Länge]	[m]

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse der Stützweitenberechnung einer geraden Rohrleitung im Überblick. Der Einfeldträger bildet sowohl den günstigsten als auch den ungünstigsten Belastungsfall ab. Die ungünstigsten Werte ergeben sich für den gelenkig gelagerten Einfeldträger. Die günstigsten Werte liefert der unendlich lange gelenkig gelagerte Träger, auch Durchlaufträger genannt, gleichbedeutend mit dem beidseitig eingespannten Einfeldträger.

Bei gleicher maximaler Biegespannung $\sigma_{b,max}$ ist die Stützweite des Durchlaufträgers 22% weiter als die des gelenkig gelagerten Einfeldträgers und seine Durchbiegung etwas weniger als halb so groß.

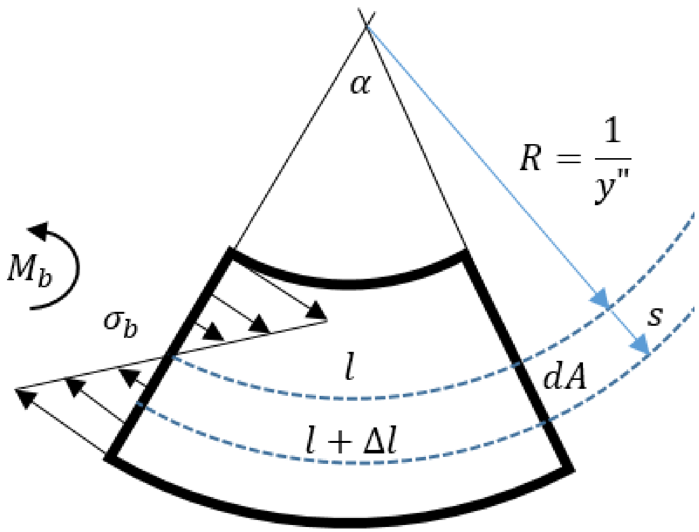
$$\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{12}{8}} = 1.22 \qquad \frac{f_{max,2}}{f_{max,2}} = \frac{1}{5}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^4 = \frac{1}{5}\left(\frac{12}{8}\right)^2 = \frac{9}{20} = 0.45$$

Index 1: gelenkig gelagerter Einfeldträger Index 2: Durchlaufträger

Übersicht – **Balkentheorie** – Flächenträgheitsmoment und Widerstandsmoment eines Rohres - Biegelinien

Die Ergebnisse der Tabelle 1 liefert die Festigkeitslehre mit der Balkentheorie. Im Querschnitt werden nur die Zug- und Druckspannungen betrachtet, die dem lokalen Biegemoment das Gleichgewicht halten. Der Balkenquerschnitt ist in beiden Achsen symmetrisch. Die für das vertikale Kräftegleichgewicht verantwortliche Scherspannung wird vernachlässigt. Die für das horizontale Kräftegleichgewicht verantwortliche Zugspannung (Längung) kann bei hinreichend kurzen Stützweiten vernachlässigt werden. Die Belastung ist torsionsfrei. Die Last steht senkrecht auf der Balkenachse. Sie staucht die Fasern auf der konkaven Seite und streckt sie auf der konvexen Seite. Dazwischen liegt die Nulllinie, auch Biegelinie genannt. Die Fasern auf der Nullinie bilden die horizontale Symetrieebene. Die Auslenkung des Balkens ist der Abstand der Nulllinie von ihrer Lage ohne Last.

Zug- und Druckkräfte im Querschnitt heben sich auf, da horizontale äußere Kräfte vernachlässigt werden. [Navier 1833, Seite 43 ff., siehe Literatur] nähert die Biegelinie in jedem Punkt durch eine Kreislinie an. Der Kehrwert des Radius dieser Kreislinie wird mit guter Näherung als zweite Ableitung der Biegelinie verstanden, solange der Radius sehr groß.



$$y'' \sim \frac{1}{R} \qquad (1)$$

Der Balken ist symmetrisch zur Lastebene. Daher ändert sich die Spannung nur in Richtung s, dem Abstand von der Nulllinie.
Schneidet man den Balken auf, so lautet das Momentengleichgewicht von Biegemoment und Querschnittskräften:

$$M_b = \int_A \sigma_b \, s \, dA \qquad \sigma_b = \sigma_b(s) \qquad (2)$$

M_b : Biegemoment; $\sigma_b \, dA$: Kraft auf Höhe s; $\sigma_b \, s \, dA$: Moment der Kraft auf Höhe s

Aus der Dehnung der Fasern erhält man

$$l = R \cdot \alpha \qquad l + \Delta l = (R + s) \cdot \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta l}{l} = \frac{s}{R}$$

Hook: $\sigma_b = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l} E \quad \Rightarrow$

$$\sigma_b = \frac{s}{R} E \qquad (3)$$

Gleichung (3) zeigt auf, daß die Spannung mit zunehmendem Abstand s von der Nulllinie steigt. Die größte Spannung liegt demnach in der äußersten Faser vor (s=e).

$$\sigma_{b,max} = \frac{e}{R} E = y'' E e \qquad (4)$$

Mit Gleichungen (1) und (3) wird Gleichung (2) zu

$$M_b = \int_A \sigma_b \, s \, dA = \int_A \frac{s}{R} E \, s \, dA = \frac{E}{R} \int_A s^2 \, dA = E \, y'' \int_A s^2 \, dA \qquad (5)$$

Das Integral $\int_A s^2 \, dA$ nennt man Flächenträgheitsmoment I. Es wird durch die Balkengeometrie bestimmt. Sind das Elastizitätsmodul E, das Flächenträgheitsmoment I und der Momentenverlauf $M_b = M_b(x)$ bekannt, kann mit folgender Gleichung durch Integration von y“ die Biegelinie berechnet werden.

$$\boxed{y'' EI = M_b}$$

(6) Gleichung für die Biegelinie

Die Krümmung der Biegelinie ist demnach direkt proportional zum Biegemoment (Mb) und umgekehrt proportional zur Werkstoffelastizität (E) und zum Flächenträgheitsmoment (I). Die maximale Spannung ergibt sich mit Gleichung (4) zu

$$\sigma_{b,max} = y'' \, E \, e = \frac{M_b}{I/e} = \frac{M_b}{W}$$

(7) Gleichung für die maximale Biegespannung

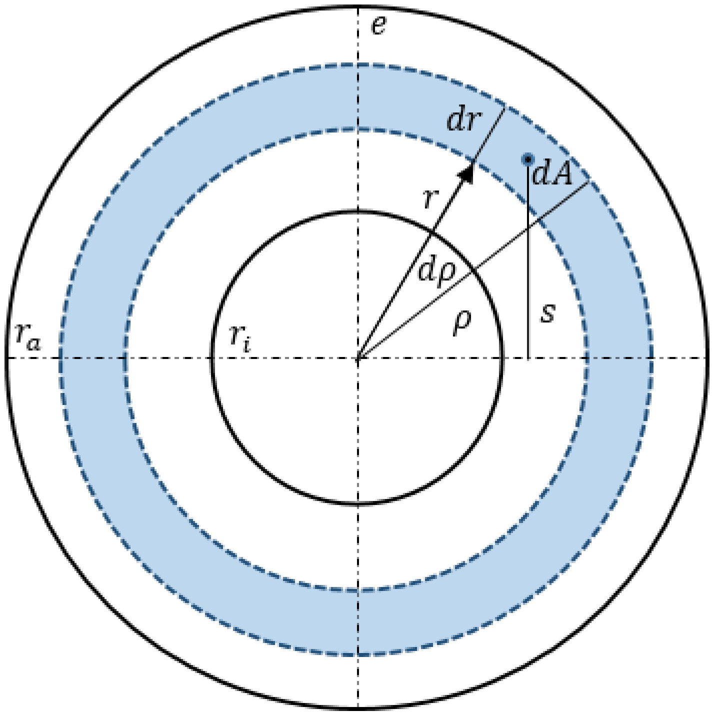
Der Quotient aus Flächenträgheitsmoment I und Abstand e der äußersten Faser von der Nulllinie heißt Widerstandsmoment W.

$$W = \frac{I}{e} \qquad I = \int_A s^2 \, dA$$

(8) Widerstands- und Flächenträgheitsmoment

Übersicht – Balkentheorie - **Flächenträgheitsmoment und Widerstandmoment eines Rohres** - Biegelinien

Flächenträgheitsmoment $I = \int_A s^2\, dA$ und Widerstandsmoment $W = \frac{I}{e}$ einer Rohrleitung werden bestimmt durch die Geometrie der Rohrwand. Der Beitrag der Isolierung ist zu vernachlässigen. Die Nulllinie liegt in der Rohrachse. Somit gilt $e = r_a$.



Das Flächenelement dA und sein Hebelarm s ergeben sich zu

$$dA = r\, d\rho\, dr$$

$$s = \left(r + \frac{dr}{2}\right) \sin\left(\rho + \frac{d\rho}{2}\right)$$

Die Formulierung von s² gelingt wie folgt:

$$s^2 = \left(r + \frac{dr}{2}\right)^2 \sin^2\left(\rho + \frac{d\rho}{2}\right)$$

$$\left(r + \frac{dr}{2}\right)^2 = r^2 + r\,dr + \cancelto{0}{\frac{dr^2}{4}} = r^2 + r\,dr$$

$$\sin\left(\rho + \frac{d\rho}{2}\right) = \sin\rho \cos\cancelto{1}{\frac{d\rho}{2}} + \sin\cancelto{0}{\frac{d\rho}{2}} \cos\rho = \sin\rho$$

$$\Rightarrow\ s^2 = (r^2 + r\,dr)\ sin^2\rho$$

$$\Rightarrow\ s^2\,dA = (r^2 + r\,dr)\ sin^2\rho\ \ r\,d\rho\,dr = r^3\ sin^2\rho\ \ d\rho\,dr + \ r^2\ sin^2\rho\,d\rho\,\cancelto{0}{dr^2} = \ r^3\ sin^2\rho\ \ d\rho\,dr$$

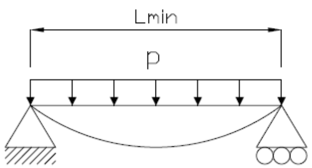
Damit ergibt sich das Flächenträgheitsmoment der Rohrwand zu

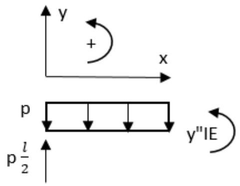
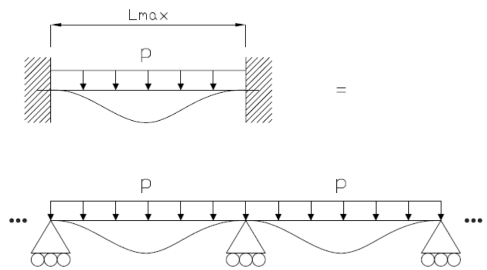
$$I = \int_{r_i}^{r_a} r^3 dr\ \int_0^{2\pi} sin^2\rho\,d\rho = \left[\frac{1}{4}\,r^4\right]_{r_i}^{r_a} \left[\frac{1}{2}\,(\rho - sin\rho\ cos\rho)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\,[r_a^4 - r_i^4]\ \frac{1}{2}\,[2\pi - 0 - (0 - 0)]$$

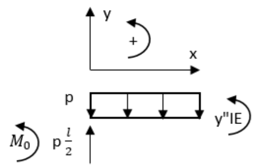
$$I = \frac{\pi}{4}\,(r_a^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{64}\,(d_a^4 - d_i^4)$$ Flächenträgheitsmoment Rohr

$$W = \frac{I}{r_a} = \frac{2\,I}{d_a}$$ Widerstandsmoment Rohr

Übersicht – Balkentheorie – Flächenträgheitsmoment und Widerstandsmoment eines Rohres - **Biegelinien**

<table>
<tr><td>Einfeldträger beidseitig gelenkig gelagert (ungünstigster Fall)</td><td>Einfeldträger beidseitig eingespannt (günstigster Fall)</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momentengleichgewicht an der Stelle x</td></tr>
<tr><td>$0 = y''IE - p\frac{l}{2}x + px\frac{x}{2}$</td><td>$0 = y''IE + M_0 - p\frac{l}{2}x + px\frac{x}{2}$</td></tr>
</table>

Integration	
$y''IE = -\frac{p}{2}x^2 + \frac{pl}{2}x$ $y'IE = -\frac{p}{6}x^3 + \frac{pl}{4}x^2 + C_1$ $yIE = -\frac{p}{24}x^4 + \frac{pl}{12}x^3 + C_1x + C_2$ $y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0; \quad y(l) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{pl^3}{24}$	$y''IE = -\frac{p}{2}x^2 + \frac{pl}{2}x - M_0$ $y'IE = -\frac{p}{6}x^3 + \frac{pl}{4}x^2 - M_0x + C_1$ $yIE = -\frac{p}{24}x^4 + \frac{pl}{12}x^3 - \frac{M_0}{2}x^2 + C_1x + C_2$ $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0; \quad y'(l) = 0 \Rightarrow M_0 = \frac{pl^2}{12}$ $y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Bezogene Biegelinien

$$\frac{y}{\left(\frac{pl^4}{IE}\right)} = -\frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)$$

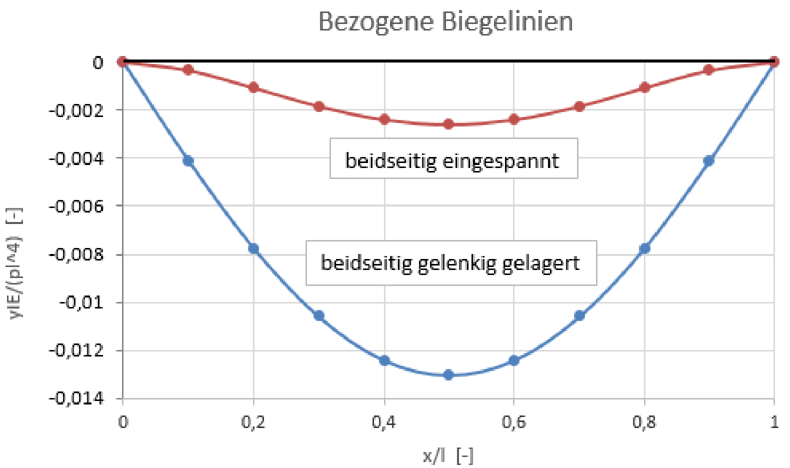
$$\frac{f_{max}}{\left(\frac{pl^4}{IE}\right)} = -\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}$$

$$f_{max} = -\frac{5}{384}\cdot\frac{pl^4}{IE} = -0{,}013\cdot\frac{pl^4}{IE}$$

$$\frac{y}{\left(\frac{pl^4}{IE}\right)} = -\frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$\frac{f_{max}}{\left(\frac{pl^4}{IE}\right)} = -\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{4}$$

$$f_{max} = -\frac{1}{384}\cdot\frac{pl^4}{IE} = -0{,}0026\cdot\frac{pl^4}{IE}$$



Bezogener Biegemomentenverlauf

$\frac{y''IE}{pl^2} = \frac{M_b}{pl^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)$	$\frac{y''IE}{pl^2} = \frac{M_b}{pl^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{12}$
$\frac{M_{b,max}}{pl^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{M_{b,max}}{pl^2} = -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{12}$
$M_{b,max} = \frac{1}{8}\cdot pl^2 = 0{,}125\cdot pl^2$	$M_{b,max} = -\frac{1}{12}\cdot pl^2 = -0{,}083\cdot pl^2$