Leibniz Universität Hannover
Institut für Theoretische Informatik

Masterarbeit
Resolution für modale Logiken

Sergey Kartamyshev

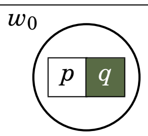
2. Oktober 2014

Prüfer: Prof. Dr. Heribert Vollmer
Zweitprüfer: Dr. Arne Meier
Betreuer: Dr. Julian-Steffen Müller

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den Resolutionsmechanismen in den modallogischen Systemen **K**, **D**, **T**, **S4** und **S5**, sowie **B**. Die jeweiligen Systeme werden mit ihren Anschauungen und ihren Ausdrucksmöglichkeiten motiviert, wobei ein wesentlicher Fokus auf die graphische Interpretation gelegt wird. Es werden jeweils Regeln für die Berechnung der Resolvente angegeben und die Korrektheit der Regeln sowie die Vollständigkeit des gesamten Systems bewiesen. Für den in der recherchierten Literatur nicht behandelten Fall von **B** wird ein entsprechendes System aufgestellt und dessen Korrektheit und Vollständigkeit bewiesen.

Symbolverzeichnis

Symbole	**Verwendung**
$\varphi, \psi, \ldots$	Griechische Kleinbuchstaben werden für Formeln und Teilformeln verwendet.
$p, q, \ldots$	Lateinische Kleinbuchstaben werden für atomare Formeln (Atome) verwendet.
$A, B, \ldots$	Schmale lateinische Großbuchstaben stehen für Klauseln.
$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E}, \ldots$	Fette lateinische Großbuchstaben stehen für Klauselmengen.
$\mathbf{\mathsf{K}}, \mathbf{\mathsf{D}}, \mathbf{\mathsf{T}}, \mathbf{\mathsf{S4}}, \mathbf{\mathsf{S5}}, \mathbf{\mathsf{B}}$	Serifenlose fette Buchstaben bezeichnen modallogische Systeme
$\mathsf{R}\mathbf{\mathsf{K}}, \mathsf{R}\mathbf{\mathsf{D}}, \mathsf{R}\mathbf{\mathsf{T}}, \mathsf{R}\mathbf{\mathsf{S4}}, \mathsf{R}\mathbf{\mathsf{S5}}, \mathsf{R}\mathbf{\mathsf{B}}$	Der Vorsatz R bezeichnet die Resolutionssysteme modallogischer Systeme. Zur besseren Abhebung ist dieses Präfix nicht fett dargestellt.
$\Sigma(A, B) \rightarrow C$	Die Klausel C ist eine direkte Resolvente von A und B.
$\Gamma(A) \rightarrow C$	Die Klausel C ist eine direkte Resolvente von A.
$A \approx B$	Die Klausel A lässt sich zu B vereinfachen.
$\Sigma(A, B) \Rightarrow C$	Die Klausel C ist Resolvente von A und B und lässt sich nicht weiter vereinfachen.
$\Gamma(A) \Rightarrow C$	Die Klausel C ist Resolvente von A und lässt sich nicht weiter vereinfachen.
	Ein Modell wird als Graph dargestellt; die Knoten sind die Welten. Die Namen der Welten sind, wo erforderlich, klein in einer Ecke angegeben. Alle modellierten Atome sind in allen Welten angegeben. Die farblich unterlegte Atome sind auf *wahr* gesetzt, und die Atome mit weißen Hintergrund sind auf *falsch* gesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Resolution stellt in der Aussagenlogik ein mächtiges Werkzeug dar, um gegebene Formeln auf Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit oder Tautologie zu prüfen. Die Prüfung erfolgt auf syntaktischer Ebene und kann von Computerprogrammen durchgeführt werden. Im Falle der *Modallogik*, die die Aussagenlogik um *modale Operatoren* mit Graphen-Anschauung (*Rahmen*) erweitert, ist dies erheblich schwieriger. Die Resolutionsregeln müssen innerhalb von verschachtelten modalen Operatoren operieren können, um die Vollständigkeit des Systems zu erreichen.

Ziel dieser Arbeit ist, eine anschauliche Beschreibung der Resolution für das *normale* modallogische Systeme **K** sowie die nötigen Erweiterungen für die Systeme **D**, **T**, **S4** und **S5** anzugeben. Darüber hinaus soll die Resolution auf ein weiteres System erweitert werden, es wurde dazu das System **B** gewählt.

1.1 Struktur der Arbeit

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 werden die für die Arbeit relevanten Grundlagen der Aussagenlogik rekapituliert und die Konzepte der Modallogik eingeführt. Hierbei werden insbesondere die Axiome der modallogischen Systeme, sowie deren Auswirkungen auf die Topologie der Rahmen, erläutert. Diese Axiome und die damit verbundenen Eigenschaften der Rahmen sind entscheidend für die Resolution, wie in [EFdC89] definiert.

In Kapitel 3 wird die gewünschte Funktionsweise der Resolution im Kontext der modalen Logik motiviert, sowie eine für die Resolution nützliche Normalform definiert.

Anschließend wird in Kapitel 4 das Resolutionssystem für die normale Logik **K** definiert. Die Vollständigkeit des Resolutionssystems R**K** wird mittels eines semantischen Tableaus gezeigt. Das Verständnis dieses Kapitels ist entscheidend für das Verständnis der folgenden Kapitel. Aus diesem Grund werden ausführliche Beispiele angeführt, die die Funktionsweise verdeutlichen sollen.

Das System **K** stellt die Grundlage für die Definition der Resolution für weitere Systeme dar. In Kapitel 5 wird die Resolution auf das modallogische System **D** erweitert. Das dadurch entstandene Resolutionssystem R**D** wird anschließend zum System R**T** in Kapitel 6 ausgebaut. Dieses wiederum wird in Kapitel 7 zu R**S4** erweitert. Eine erneute Erweiterung des Resolutionssystems R**T** wird in Kapitel 8 beschrieben. Hierbei handelt es sich um eine Anpassung für das modallogische System **B**, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt wurde. Schließlich wird in Kapitel 9 gezeigt, dass die Formeln in **S5** zu Formeln mit *modaler Tiefe* von höchstens eins umgeformt werden können. Diese Erkenntnis wird genutzt, um die Resolution für **S5** elegant darzustellen. In den jeweiligen Kapiteln werden die Korrektheit und die Vollständigkeit der aufgeführten Resolutionssysteme gezeigt.

Schließlich wird in Kapitel 10 ein Fazit gezogen und ein Ausblick vermittelt.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen zur modalen Logik und zur aussagenlogischen Resolution erörtert. Dieser Abschnitt basiert auf [Sch02], [Mül09] sowie [VK14].

2.1 Resolution in der Aussagenlogik

Die Resolution, also das Überprüfen einer Formel auf ihre Gültigkeit, ist eine der Grundaufgaben der Logik. Da sich diese Arbeit mit ihrer Anwendung in modalen Logiken beschäftigt, werden in diesem Abschnitt zunächst die Grundlagen ihres ursprünglichen Anwendungsgebiets, der klassischen Aussagenlogik, dargestellt. Von den hier definierten Begriffen wird dann in Kapitel 3 generalisiert.

Atom, Literal, Klausel, KNF

Grundbegriffe der Aussagenlogik Grundbaustein der Aussagenlogik sind die sogenannten *atomaren Formeln* oder kurz *Atome*. Es handelt sich hierbei um Variablen, welche die Werte „wahr“ oder „falsch“ annehmen können. *Literale* umfassen Atome, sowie deren Negationen. Literale können durch Disjunktionen ($\vee$) zu *Klauseln* verknüpft werden. Werden wiederum mehrere Klauseln durch Konjunktionen ($\wedge$) verbunden, spricht man von der *konjunktiven Normalform*, kurz *KNF*. Sie hat demnach über eine gegebene Menge von Atomen $\{q_1,...,q_n\}$ folgendes Format:

$$\bigwedge_i \bigvee_j L_{ij}, \quad L_{ij} \in \{q_1,...,q_n\} \cup \{\neg q_1,...,\neg q_n\} \tag{2.1}$$

Hierbei bezeichnen die L_{ij} die aus der Atommenge gebildeten Literale.

Resolution

Resolution und Erfüllbarkeit Das Ziel der *Resolution* ist die Überprüfung einer Formel auf Allgemeingültigkeit, also die Feststellung, dass es sich bei dieser um ein Theorem[1] handelt. Der *Resolutionsbeweis* ist dabei ein Widerlegungsbeweis auf syntaktischer Ebene – gezeigt wird anstelle des Theorems die Unerfüllbarkeit seiner Negation. Zu diesem Zweck ist es dienlich, die fragliche Formel in KNF vorliegen zu haben. Dies stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da beliebige Formeln in KNF ausgedrückt werden können. Es muss dennoch beachtet werden, dass der Umformungsschritt keineswegs trivial ist und im schlechtesten Fall ein exponentielles Wachstum der Formelgröße mit sich bringen kann. Somit stellt die Beschränkung auf KNF keine erfüllbarkeitstheoretische Einschränkung dar, komplexitätstheoretisch allerdings sind die Folgen mitunter beträchtlich.

erfüllbarkeitsäquivalente Klauselmenge

Ein alternatives Konzept ist das der *erfüllbarkeitsäquivaletenten Klauselmenge*. Hierbei wird eine gegebene Formel nicht in eine äquivalente Klauselmenge in KNF umgeformt, sondern in eine gänzlich andere Klauselmenge, abhängig von anderen Atomen, aber nach Regeln, die die Erfüllbarkeit der ursprünglichen Formel im Rahmen der Umformung erhalten. Somit kann die erfüllbarkeitsäquivalente Formel statt der ursprünglichen überprüft werden. Der Vorteil besteht darin, dass sich zeigen lässt, dass die Ausgangsformel zwar in der Regel größer als die Eingangsformel ist, aber stets lediglich in linearem Maße. Zu beachten ist allerdings, dass die erfüllenden Belegungen der erfüllbarkeitsäquivalenten Klauselmenge in der Regel *nicht* mit denen der Ursprungsformel übereinstimmen. Dieses Verfahren dient demnach nur dem

[1] Andere Begriffe für dieses Konzept sind „Tautologie“ oder „Satz“. „Theorem“ wurde in dieser Arbeit gewählt, weil es den Sinngehalt am eindeutigsten vermittelt.

Beweis oder der Widerlegung der Erfüllbarkeitsfrage, aber nicht dem Finden von erfüllenden Belegungen.

Sei φ eine beliebige aussagenlogische Formel. Für jede Teilformel ψ von φ wird ein neues Erweiterungsatom q_ψ eingeführt. Des Weiteren wird für eine beliebige Formel ψ die Klauselmenge Δ_ψ wie folgt definiert:

$$\Delta_\psi = \begin{cases} \{\{q_\psi \vee \neg p\}, \{\neg q_\psi \vee p\}\} & \text{falls } \psi = p \\ \{\{q_\psi \vee q_\theta\}, \{\neg q_\psi \vee \neg q_\theta\}\} & \text{falls } \psi = \neg\theta \\ \{\{\neg q_\psi \vee q_{\theta_1} \vee q_{\theta_2}\}, \{q_\psi \vee \neg q_{\theta_1}\}, \{q_\psi \vee \neg q_{\theta_2}\}\} & \text{falls } \psi = \theta_1 \vee \theta_2 \\ \{\{q_\psi \vee \neg q_{\theta_1} \vee \neg q_{\theta_2}\}, \{\neg q_\psi \vee q_{\theta_1}\}, \{\neg q_\psi \vee q_{\theta_2}\}\} & \text{falls } \psi = \theta_1 \wedge \theta_2 \end{cases}$$

Die zu φ erfüllbarkeitsäquivalante Klauselmenge Π_φ ist dann:

$$\Pi_\varphi = \bigcup \{\Delta_\psi \mid \psi \text{ ist eine Teilformel von } \varphi\} \cup \{\{q_\varphi\}\}$$

Die Größe von Π_φ ist linear in der Größe von φ.

Bei der Resolution ist es üblich, dass die Klauseln als Mengen von Literalen und KNF-Formeln als Mengen von Klauseln dargestellt werden.

Definition (Resolutionsregel) *Sei p ein aussagenlogisches Atom. Seien C und D Klauseln mit $p \in C$ und $\neg p \in D$. Die Resolutionsregel lautet:*

$$\frac{C \qquad D}{(C \setminus \{p\}) \cup (D \setminus \{\neg p\})}$$

Die Klausel $(C \setminus \{p\}) \cup (D \setminus \{\neg p\})$ heißt die Resolvente von C und D.

Sei Γ eine Menge von Klauseln. Eine Resolutionsableitung einer Klausel C aus Γ ist eine Folge $C_1, \ldots C_n = C$ von Klauseln, so dass für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: entweder $C_k \in \Gamma$ oder es existieren $1 \leq i \leq j < k$ mit

$$\frac{C_i \qquad C_j}{C_k}$$

Das Resolutionskalkül ist *widerlegungsvollständig*: Eine endliche Klauselmenge Π ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine Resolutionswiderlegung von Π gibt. Symbolisch: $\Pi \models \bot \Leftrightarrow \Pi \vdash_{\text{Res}} \bot$.

2.2 Grundlagen modaler Logik

Die modale Logik geht auf Überlegungen der vorchristlichen Philosophie zurück. Sie erweitert die klassische Logik, in der Aussagen nur *wahr* oder *falsch* sein können, um die Konzepte *möglich* (notiert $\Diamond$) und *notwendig* (notiert $\Box$). Im Sinne der modalen Logik können Aussagen zwar in der tatsächlichen Welt (oder *zurzeit*) falsch sein, aber grundsätzlich möglich. Andere wiederum sind in keiner denkbaren Welt möglich. Modale Logik bietet die Möglichkeit, diese Umstände auszudrücken und Aussagen über Möglichkeiten und Notwendigkeiten auf ihre Gültigkeit zu prüfen.

möglich $\Diamond$, notwendig $\Box$

Um ein Gefühl dafür zu vermitteln, wie mit modaler Logik modelliert werden kann und welche Intuitionen sich dahinter verbergen (aber auch, welche Intuitionen ohne Zunahme weiterer, optionaler Axiome möglicherweise verletzt werden), sei hier ein anschauliches Beispiel

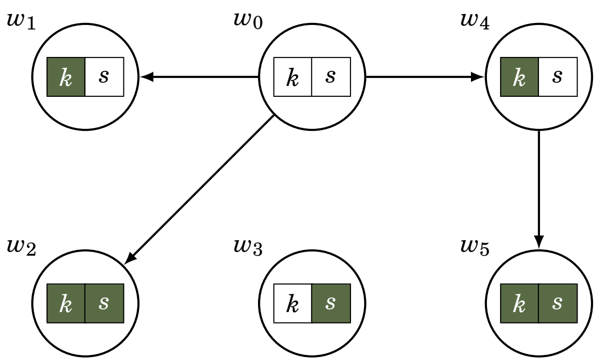


Abb. 2.1: Darstellung von Welten, die die Annahmen (2.2), (2.3) und (2.6) von w_0 aus erfüllen, basierend auf dem **K**-Axiom (2.5): Ein sogenanntes *Modell M* für die *Klauselmenge* $K = \{\neg s, (2.2), (2.3), (2.6)\}$.

aufgeführt. Es dient nicht der formalen Einführung in die modale Logik und greift mehrfach auf Definitionen zurück, die erst später eingeführt werden. Dennoch ist es in sich verständlich geschrieben und soll das Verständnis der später eher formal eingeführten Begriffe erleichtern. Es wird empfohlen, die Querverweise auf spätere Definitionen nachzuschlagen, aber die Bedeutungserklärung nur diesem Abschnitt zu entnehmen.

2.2.1 Ein einführendes Beispiel

Gegeben sei folgendes System: Zurzeit schneit es nicht, es gilt klassisch $\neg s$. Es ist aber grundsätzlich möglich, dass Schnee fällt:

$$\Diamond s \tag{2.2}$$

Wenn aber Schnee fällt, dann muss es notwendigerweise kalt sein:

$$\Box(s \to k) \tag{2.3}$$

Diese Aussage 2.3 ist auf keinen Fall zu verwechseln mit dem nicht-modalen

$$s \to k, \tag{2.4}$$

denn diese würde sich erneut nur auf die tatsächliche Welt („jetzt") beziehen, und da bereits etabliert ist, dass $\neg s$ gilt, könnte man aus der falschen Annahme, es würde zurzeit doch schneien, beliebiges folgern. Die Aussage 2.3 dagegen bezieht sich auf alle denkbaren Welten.

Axiom Nun lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen. Beispielsweise besagt das später eingeführte *Axiom* **K**, das das Grundaxiom normaler modaler Logiken darstellt, dass:

$$\Box(s \to k) \to (\Box s \to \Box k) \tag{2.5}$$

Somit wäre es also, wenn es *notwendigerweise* schneit, auch *notwendigerweise* kalt. Die naheliegende Frage lautet: Wenn gerade $\neg s$ gilt, ist dann $\Box s$ überhaupt *möglich*? Generell lässt sich das fordern, nämlich formal:

$$\Diamond\Box s, \tag{2.6}$$

intuitiv: In unserer Welt schneit es manchmal, aber nicht immer, aber es wären auch Welten denkbar, wo es immer schneit. Man spricht bei dieser Verschachtelung von modalen Operatoren von *modaler Tiefe*, in diesem Fall 2.

Klausel, Klauselmenge Wir nennen die Ausdrücke $\neg s$, (2.2), (2.3) und (2.6) *Klauseln* und ihre Vereinigung die *Klauselmenge*

$$\boldsymbol{K} = \{\neg s, \Diamond s, \Box(s \to k), \Diamond\Box s\} \tag{2.7}$$

und verbinden mit einer solchen Klauselmenge stets das Verständnis, dass es *alle* in ihr enthaltenen Klauseln zu erfüllen gilt. Jede Klauselmenge entspricht also der Konjunktion über alle ihre Elemente, und in der Regel differenziert man nicht mehr zwischen dem Ausdruck $A \wedge B$ und der Mengenschreibweise A, B.

Um den Überblick über die von K geforderten Welten zu behalten, kann man sich mit einer Graphenstruktur wie in Abbildung 2.1 behelfen, die eine mögliche erfüllende Konfiguration von Welten für die oben geforderten Annahmen darstellt. Ein solcher Graph, genannt *Modell*, spielt somit für modale Logiken eine ähnliche Rolle wie eine erfüllende Belegung in der klassischen Aussagenlogik. In der in dieser Arbeit eingeführten und verwendeten Darstellung (die bewusst leicht von der in der Literatur üblichen abweicht, zugunsten besserer Verständlichkeit) bezeichnen die kreisförmigen Knoten die Welten (bezeichnet mit w_0 bis w_5). In jeder Welt sind die erfüllten Atome dunkel hinterlegt, die unerfüllten hell. Jede Welt kann eine Menge von anderen Welten kennen – im Allgemeinen handelt es sich hierbei um eine Beziehung, die durch gerichtete Kanten dargestellt wird. Dieses sind die „denkbaren Welten“ oder „bekannten Welten“. In w_0 sind also die Welten w_1, w_2 und w_4 denkbar. Auf sie beziehen sich alle $\Diamond$- und $\Box$-Operatoren der ersten Stufe. **Modell**

Wir befinden uns in der Welt w_0. Es ist weder kalt, noch schneit es. Zur Linken befinden sich Welten, in denen es kalt ist, mal schneit es (w_2), mal nicht (w_1). Unbekannt dagegen ist uns w_3 (und für dieses Modell tatsächlich irrelevant), denn sie zu kennen verstößt gegen Annahme 2.3. Des Weiteren gibt es, zur Erfüllung von Annahme 2.6, die Welt w_4, für die gilt, dass *sämtliche ihr bekannten Welten s* erfüllen.

Tatsächlich? Kann w_4 die Aussage $\Box s$ erfüllen – obwohl es in w_4 nicht schneit? Es handelt sich nicht um einen Fehler: Denn ob die Aussage $\Box(s \to k)$ (pauschal irgendein $\Box\psi$) auch in der erfüllenden Welt selbst gelten muss, ist nur durch ein weiteres Axiom zu klären (nämlich **T**: $\Box\psi \to \psi$). Denn dass die eigene Welt zu den „allen ihr bekannten“ gehört, ist nicht selbstverständlich. Wäre dem so, hätte man im abgebildeten Rahmen eine Relation $w_4 R w_4$, also eine Schleife von w_4 zu sich selbst, anbringen müssen. Das Axiom **T** kann fordern, dass alle Welten eine solche Schleife besitzen müssen. Doch in einem System ohne dieses Axiom (zu dem das in Abb. 2.1 dargestellte Modell zweifellos gehört) muss sie nicht existieren: Welten dürfen sich selbst unbekannt sein.

Weiterhin ist an dieser Stelle dringend zu bemerken, dass der letzte Absatz *nicht* verwandt ist mit (2.6) und der dortigen Erklärung, obwohl sie ähnlich klingen. (2.6) besagt, dass eine Welt w mit $\neg s$ sich durchaus Welten denken kann, in denen $\Box s$ gilt. w_0 sieht $\Box s$ als *möglich* im modallogischen Sinn. Darüber hinaus aber ist es, ohne zusätzliche Axiome, formal zulässig (um den modallogischen Begriff „möglich“ zu vermeiden), dass w selbst die Aussage $\Box s$ erfüllt. Somit gelten $\neg s$, $\Diamond\Box s$ und $\Box s$ gleichzeitig in w, aber ohne dass die letzten beiden in irgendeiner Form voneinander abhängig wären.

Dies mag nicht intuitiv erscheinen, tatsächlich muss man jedoch bedenken, dass es die Rolle der optionalen Axiome ist, die formale Modallogik mit den entsprechenden Intuitionen zu versehen. Manche optionale Axiome sind genau dadurch motiviert, die intuitive Bedeutung von „möglich“ und „notwendig“ zu formalisieren. Unabhängig von solchen Intuitionen stellt Modallogik eine Möglichkeit dar, Aussagenlogik mit Graphenstrukturen zu verbinden.

Zusammengefasst zur Übersicht:

- Aussage $\neg s$ ist trivialerweise in w_0 erfüllt.
- Aussage 2.3 ist in w_0 erfüllt, da w_1, w_2 und w_4 die Aussage $s \to k$ erfüllen. Dass auch w_0 selbst diese Aussage erfüllt, ist ohne weitere Axiome *nicht* relevant.
- Axiom 2.5 gilt grundsätzlich, da es die Bedeutung des $\Box$-Operators überhaupt definiert.
- Aussage 2.6 ist in w_0 erfüllt, da w_0 mindestens w_4 kennt, wo alle bekannten Welten (nur w_5) s erfüllen. Allerdings ist dieselbe Aussage auch bereits erfüllt, da w_0 w_1 kennt, und dort in Abwesenheit von bekannten Welten per Definition $\Box\psi$ für beliebige ψ gilt.

$\models$ Wir sagen formal, Abb. 2.1 zeigt ein *Modell* M, das in Welt w_0 die Klauselmenge K erfüllt:

$$M, w_0 \models K$$

Es ist festzuhalten, dass es sich bei den gezeigten Welten nicht um die einzige denkbare Konfiguration handelt, und ebenfalls nicht um die kleinste. Weiterhin wurde bereits angedeutet, dass modale Logik wesentlich von der Wahl der Axiome abhängt – die gängigsten Sätze von Axiomen werden in dieser Arbeit behandelt, und mit ihnen die Auswirkungen auf die in Abbildung 2.1 dargestellte Graphenstruktur, den sogenannten *Rahmen*.

Rahmen

2.2.2 Syntax modaler Logik

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die syntaktischen Elemente modaler Logik gegeben. Der folgende Abschnitt 2.2.3 definiert dann formal die zugehörige Semantik. Modale Logik erweitert klassische Aussagenlogik um die zu einander dualen Operatoren „Box“ $\Box$ und „Diamant“ $\Diamond$[2]. Das Alphabet der modalen Logik besteht somit aus:

- einer abzählbaren Menge Atome $\Phi = \{p, q, r, ...\}$
- den klassischen Operatoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
- den modalen Operatoren $\Box$ („notwendig“) und $\Diamond$ („möglich“)
- den Konstanten $\top$ („wahr“) und $\bot$ („falsch“)
- den Klammersymbolen (und)

Definition *Sei Φ die Menge von Atomen. Dann ist die Menge der modalen Formeln* $\mathrm{Fma}(\Phi)$ *induktiv definiert durch folgende Regeln:*

1. *Konstante $\bot$ ist in* $\mathrm{Fma}(\Phi)$
2. *Sei $p \in \Phi$ eine atomare Aussage, dann ist* $p \in \mathrm{Fma}(\Phi)$
3. *Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Fma}(\Phi)$ dann gilt:*
   (a) $\neg\varphi \in \mathrm{Fma}(\Phi)$
   (b) $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{Fma}(\Phi)$
   (c) $\Box\varphi \in \mathrm{Fma}(\Phi)$

Zur besseren Lesbarkeit werden folgende Kurzschreibweisen verwendet:

1. $\top := \neg\bot$
2. $(\varphi \wedge \psi) := \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
3. $(\varphi \rightarrow \psi) := \neg\varphi \vee \psi$
4. $(\varphi \leftrightarrow \psi) := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
5. $\Diamond\varphi :=$[3] $\neg\Box\neg\varphi$

Folgende Regeln dienen ebenfalls der besseren Lesbarkeit insofern, als sie in einigen Fällen Klammerung formal unnötig machen:

- Äußere Klammern werden weggelassen.
- $\neg$, $\Diamond$ und $\Box$ binden am stärksten.

[2]In manchen Veröffentlichungen wird L für $\Box$ und M für $\Diamond$ verwendet.

[3]Die Einordnung als Kurzschreibweise des $\Diamond$-Operators sollte vor dem Hintergrund von Abschnitt 2.4 gesehen werden, in welchem beschrieben ist, dass dieser Zusammenhang gelegentlich auch als Axiom angegeben wird.

- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$.
- $\vee$ wiederum bindet stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- Für mehrfache Konnektoren desselben Typs werden die Klammern von rechts nach links gesetzt. Die Formel $p \rightarrow q \rightarrow r$ wird also wie folgt ausgewertet: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

2.2.3 Semantik modaler Logik

Definition *Sei W eine nichtleere Menge, $\mathfrak{P}(W)$ ihre Potenzmenge, R eine binäre Relation auf W ($R \subseteq W \times W$) und $V : \Phi \rightarrow \mathfrak{P}(W)$ eine Funktion.*

1. *Das Tupel $F = (W, R)$ wird* Kripke-Rahmen*, oder kurz* Rahmen *genannt.* **(Kripke-)Rahmen**
2. *Das Tupel $M = (F, V)$ ist ein auf F basierendes* Modell*. Anders formuliert: F liegt M zugrunde.* **Modell**

Die Elemente aus W werden *Welten* genannt (auch *Punkte* oder *Zustände*). Die *Belegungsfunktion* V gibt an, in welchen Welten ein Atom wahr ist. Die Relation R (oft *Nachbarschaftsrelation* oder *Bekanntschaftsrelation*) gibt an, welche Welten aus einer Welt direkt erreichbar oder sichtbar sind. Sie verkörpern die Intuition der Bekanntschaft zwischen Welten. **Welt, Belegungsfunktion, Bekanntschaft**

Die Interpretation der Standardoperatoren entspricht der Interpretation aus der Aussagenlogik. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die modalen Operatoren $\Diamond$ und $\Box$ zu interpretieren. Die gängige Interpretation von $\Box\varphi$ lautet „φ ist notwendigerweise wahr“, $\Diamond\varphi$ besagt „φ ist möglicherweise wahr“. Formal beschreibt $\Box\varphi$ in einer Welt, dass alle benachbarten Welten φ erfüllen, $\Diamond\varphi$ dagegen verlangt die Erfüllung von φ in mindestens einer benachbarten Welt.

Definition *Seien ψ_1 und ψ_2 modale Formeln. Sei $F = (W, R)$ ein Rahmen und $M = (F, V)$ ein auf F basierendes Modell. Dann ist die Formel φ:*

1. *wahr in der Welt $w \in W$ ($M, w \models \varphi$) genau dann, wenn einer der folgenden Punkte erfüllt ist:*
   (a) $\varphi = \top$
   (b) $\varphi = x$ *falls* $w \in V(x)$ *und* $x \in \Phi$
   (c) $\varphi = \neg\psi_1$ *falls* $M, w \not\models \psi_1$
   (d) $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ *falls* $M, w \models \psi_1$ *oder* $M, w \models \psi_2$
   (e) $\varphi = \Diamond\psi_1$ *falls* $\exists v \in W$ *mit* wRv *und* $M, v \models \psi_1$
2. *wahr in einem Modell M genau dann, wenn sie in jeder Welt im Modell wahr ist. ($M \models \varphi$ gdw. $\forall w \in W$ gilt: $M, w \models \varphi$)*
3. *wahr in F ($F \models \varphi$) genau dann, wenn sie in allen auf F basierenden Modellen wahr ist*
4. *wahr ($\models \varphi$) genau dann, wenn sie in allen Rahmen wahr ist*

Eine Formel φ ist erfüllbar im Modell $M = ((W, R), V)$, wenn es mindestens eine Welt $w \in W$ gibt, sodass $M, w \models \varphi$ gilt.

Die *modale Tiefe* gibt die maximale Schachtelungstiefe der modalen Operatoren in einer Formel wieder. **Modale Tiefe**

Definition *Sei $p \in \Phi$ und seien φ, ψ modale Formeln. Die modale Tiefe wird induktiv definiert als:*

- $\mathrm{md}(p) := 0$

- $\mathrm{md}(\neg\varphi) := \mathrm{md}(\varphi)$
- $\mathrm{md}(\varphi \vee \psi) := \max\{\mathrm{md}(\varphi), \mathrm{md}(\psi)\}$
- $\mathrm{md}(\Box\varphi) := 1 + \mathrm{md}(\varphi)$

Zum Beispiel hat die Formel $\varphi = (p \vee t) \wedge \Box(q \vee \Diamond((r \vee s) \wedge t)) \wedge \Diamond\neg q$ die modale Tiefe von zwei; die modale Tiefe der Formel $\psi = \Box p \wedge \Diamond(\neg p \vee q)$ ist eins. Formeln ohne modale Operatoren haben die modale Tiefe von null.

Distributivgesetze für modale Operatoren Der $\Box$-Operator lässt sich über eine Konjunktion und der $\Diamond$-Operator über eine Disjunktion aufteilen. Es gilt:

$$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \tag{2.8}$$

$$\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \tag{2.9}$$

Für die Gleichung (2.8) sei $M = ((W,R),V)$ ein beliebiges Modell und $w_0 \in W$ eine beliebige Welt. Angenommen, es gilt $M,w_0 \models \Box(\varphi \wedge \psi)$. Dann gilt für jede Welt w_1 mit w_0Rw_1 zum einen $M,w_1 \models \varphi$ und zum anderen $M,w_1 \models \psi$. In diesem Fall gilt dann natürlich $M,w_0 \models \Box\varphi$ und $M,w_0 \models \Box\psi$ oder anders aufgeschrieben $M,w_0 \models \Box\varphi \wedge \Box\psi$. Gleichzeitig bedeutet $M,w_0 \models \Box\varphi \wedge \Box\psi$, dass für jede Welt w_1 mit w_0Rw_1 gilt $M,w_1 \models \varphi$ und $M,w_1 \models \psi$. Also gilt $M,w_1 \models \varphi \wedge \psi$. Daraus folgt $M,w_0 \models \Box(\varphi \wedge \psi)$.

Die Gleichung (2.9) lässt sich aus der Gleichung (2.8) ableiten:

$$\begin{aligned}
\Box(\varphi \wedge \psi) &\leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi) && \\
\Box(\neg\varphi \wedge \neg\psi) &\leftrightarrow (\Box\neg\varphi \wedge \Box\neg\psi) && \text{(Substitution von } \varphi \text{ und } \psi \text{ durch } \neg\varphi \text{ bzw. } \neg\psi) \\
\neg\Box(\neg\varphi \wedge \neg\psi) &\leftrightarrow \neg(\Box\neg\varphi \wedge \Box\neg\psi) && \text{(Negation beider Seiten)} \\
\Diamond\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) &\leftrightarrow (\neg\Box\neg\varphi \vee \neg\Box\neg\psi) && \text{(Dualität von } \Box \text{ und } \Diamond) \\
\Diamond(\varphi \vee \psi) &\leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) &&
\end{aligned}$$

Bemerkung *Die Distribution des $\Box$-Operator über die Disjunktion sowie die Aufteilung des $\Diamond$-Operators über die Konjunktion ist hingegen nicht korrekt:*

$$\left.\begin{aligned}
\Box(\varphi \vee \psi) &\leftrightarrow (\Box\varphi \vee \Box\psi) \\
\Diamond(\varphi \wedge \psi) &\leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)
\end{aligned}\right\} \textit{keine Theoreme!}$$

2.3 Beispiele für Modelle in der modalen Logik

Folgende Beispiele sollen die oben genannten Definitionen verdeutlichen. Sei $F = (W,R)$ ein Kripke-Rahmen mit:

- $W = \{w_0, w_1, w_2\}$ und
- $R = \{(w_0,w_1),(w_1,w_2)\}$

Kripke-Rahmen lassen sich gut als Graphen mit den Welten als Knoten visualisieren. Die Abbildung 2.2 stellt eine geeignete Darstellung des Beispiel-Rahmens F dar. Es gibt hier noch keinerlei Bezug zu Atomen.

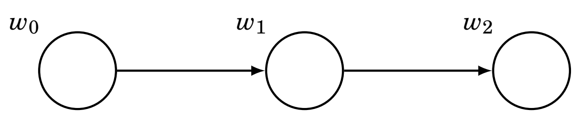


Abb. 2.2: Darstellung des Beispiel-Rahmens F als Graph

Sei nun die Atommenge gegeben als $\Phi = \{p, q\}$. Die Belegungsfunktion V_1 auf F sei gegeben mit: $V_1(p) = \{w_0\}$ und $V_1(q) = \{w_0, w_1, w_2\}$. Das auf dem Rahmen F basierende Modell $M_1 = ((W,R), V_1)$ wird in der Abbildung 2.3 dargestellt.

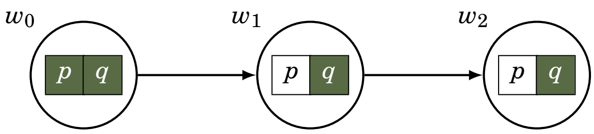


Abb. 2.3: Darstellung des Modells M_1

Beispielsweise gelten folgende Aussagen in M_1:

$M_1, w_0 \models p, p \wedge q, \Diamond q, \Box q, \Box\Box q, \Box\Box\Box q, \ldots$
$M_1, w_2 \models \neg p, q, \neg\Diamond q, \Box q, \ldots$

Es lassen sich auch Formeln finden, die im gesamten Modell M_1 gelten, wie zB:
$M_1 \models \Box q, \Box\Box q \ldots$

Diese Formeln sind jedoch nicht in ganz F wahr. Ein Gegenbeispiel ist das in der Abbildung 2.4 dargestellte Modell $M_2 = ((W,R), V_2)$ mit $V_2(p) = \{w_0\}$ und $V_2(q) = \{w_0, w_2\}$. Im Unterschied zu dem Modell M_1 gilt das Atom q nicht in der Welt w_1. Deshalb gilt $\Box q$ nicht in w_0.

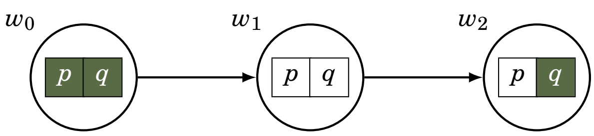


Abb. 2.4: Darstellung des Modells M_2

Es lassen sich auch Formeln finden, die in ganz F wahr sind. Ein Beispiel hierfür ist $\Diamond p \rightarrow \Box p$. Diese Formel gilt auf allen Belegungen des Rahmens F, aber wiederum nicht in allen Rahmen. Zum Beispiel gilt diese Formel nicht auf dem Rahmen $F_1 = (W, R_1)$ mit $R_1 = R \cup (w_1, w_1)$. Die Belegungsfunktion für das auf dem Rahmen F_2 basierende Modell M_3 sei erneut V_2. In der Welt w_1 gilt zwar $\Diamond q$, aber nicht $\Box q$. Die Abbildung 2.5 stellt das Modell M_3 dar.

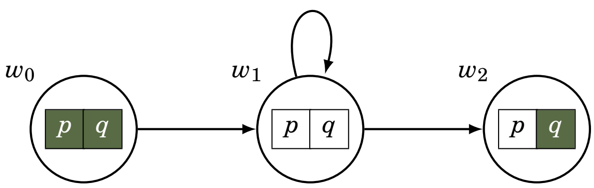


Abb. 2.5: Darstellung des Modells M_3

Eine besondere Rolle kommt Formeln zu, die auf allen Rahmen gelten, oder zumindest auf spezifischen Typen von Rahmen. Wir unterscheiden zwischen *Axiomen* einerseits, die nicht **Axiom** hergeleitet werden können sondern eine äußere Intuition gezielt modellieren, und *Theoremen* (oder *Sätzen*, *Tautologien*), die sich aus diesen Axiomen herleiten lassen. Das Axiom **K**: **Theorem** $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ ist ein Beispiel für eine in allen Rahmen geltende Formel, ebenso das Theorem $\Box\varphi \wedge \Diamond\psi \rightarrow \Diamond(\varphi \wedge \psi)$. Wir werden im Folgenden sehen, dass unterschiedliche Axiome bestimmte Topologien von Rahmen bedingen.

2.4 Axiomatisierung

Die syntaktischen Eigenschaften von Rahmen in der modalen Logik lassen sich mit Axiomen festlegen. Mittels Inferenzregeln werden aus Axiomen und bereits bewiesenen Theoremen weitere Theoreme gefolgert.

K-Axiom

Eine modale Logik heißt normal, wenn sie alle aussagenlogischen Axiome sowie mindestens das erste der folgenden Axiome beinhaltet:

$$\begin{array}{ll} \text{K} & \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) \\ \text{Dual} & \Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi \end{array}$$

Hierbei ist anzumerken, dass das Dual-Axiom lediglich die Bedeutung hat, $\Diamond$ zu definieren. Dieser modale Operator kann aber auch als einfache Kurzfassung für $\neg\Box\neg$ betrachtet werden, womit seiner Definition nicht das Gewicht eines Axioms zukäme. Entsprechend unterschiedlich handhabt die Literatur die Axiomatisierung. Nicht selten wird lediglich K als Axiom angeführt (vgl. Tab. 2.1).

Modus Ponens, Notwendigkeitsregel

Zur Schlussfolgerung neuer Theoreme müssen außerdem folgende Inferenzregeln enthalten sein:

$$\begin{array}{ll} \text{MP (Modus Ponens)} & \dfrac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \\ \text{NR (Notwendigkeitsregel)} & \dfrac{\varphi}{\Box\varphi} \end{array}$$

Der MP entstammt der klassischen Aussagenlogik und wird unverändert in die Modallogik übertragen. Er kommt zur Anwendung, um über alle nicht-modalen Aussagen im klassischen Sinn zu folgern. Die NR dagegen stellt die Übertragung von Inferenz in die Begriffe der Modallogik dar. Es ist wesentlich, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass es sich bei φ um ein Theorem handelt, nicht um eine einfache Formel. Die NR besagt ausdrücklich *nicht*, dass eine Formel, die in einer Welt gilt, automatisch auch in allen Nachbarwelten gelten muss. Vielmehr besagt sie, dass ein Theorem, das (für eine passende Menge von Axiomen) somit bei beliebigen Modellen aus beliebigen Formeln in *jeder* Welt gilt, auch in allen Nachbarwelten gilt. Ein klassisches Beispiel für ein solches φ wäre $\psi \vee \neg\psi$. Dies ist eine Tautologie, und eine Tautologie gilt überall. Mittels NR können wir folgern, dass $\Box(\psi \vee \neg\psi)$ ebenfalls eine Tautologie ist. Im Allgemeinen ist ψ dagegen lediglich *erfüllbar*, aber selbst wenn es *erfüllt* ist, bedeutet dies nicht, dass gleichzeitig immer $\Box\psi$ erfüllt ist.

Die kleinste normale Logik wird **K** genannt. Außerdem wird **K** als kleinstes normales System bezeichnet. Sei φ eine aus den Axiomen und bereits bewiesenen Formeln mittels Inferenzregeln gewonnen Formel. Statt $\varphi \in \mathbf{K}$ wird auch $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ geschrieben.

Folgende nützliche Inferenzregeln können aus dem System gewonnen werden:

$$\text{Nec:} \ \dfrac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi} \qquad\qquad \text{Pos:} \ \dfrac{\varphi \to \psi}{\Diamond\varphi \to \Diamond\psi}$$

Durch Hinzunahme weiterer Axiome lassen sich weitere normale Systeme erzeugen. Sei $F = (W, R)$ ein Rahmen. Seien $u, v, w \in W$ Welten in F. In Tabelle 2.1 sind einige normale Systeme aufgelistet[4].

[4] Die Bezeichnungen variieren deutlich: In dem Paper [EFdC89] wird statt **D** das System als **Q** bezeichnet. **T** wiederum wird gelegentlich (z.B. [Gar00]) als **M** oder **KT** bezeichnet. Des Weiteren wird das hier als **KB** bezeichnete System mitunter [Mül09] **B** genannt, wobei dann das hier **B** genannte System nicht mehr benannt werden kann. Die Bezeichnungen hier wurden dahingehend gewählt, dass sie nachvollziehbar, universell und etabliert sind, soweit möglich.

Typ	Axiome	Relation zwischen Welten
K	$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	beliebig
K4	**K** $+ \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	transitiv: $\forall u \forall v \forall w((uRv \wedge vRw) \Rightarrow uRw)$
D	**K** $+ \Box\varphi \to \Diamond\varphi$	seriell: $\forall u \exists v(uRv)$
T	**K** $+ \Box\varphi \to \varphi$	reflexiv: $\forall u(uRu)$
KB	**K** $+ \varphi \to \Box\Diamond\varphi$	symmetrisch: $\forall u \forall v(uRv \Rightarrow vRu)$
B	**KB** + **T**	symmetrisch, reflexiv: $\forall u \forall v(uRv \Rightarrow vRu)$
E	**K** $+ \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	euklidisch: $\forall u \forall v \forall w((uRv \wedge uRw) \Rightarrow vRw)$
S4	**T** + **K4**	reflexiv und transitiv
S5	**T** + **E** bzw. **S4** + **B**	Äquivalenzrelation

Tab. 2.1: Modale Systeme, ihre definierenden Axiome (wobei das Dual-Axiom von **K** als reine Definition des $\Diamond$-Operators ausgelassen wurde) und die durch die Axiome definierten Relationseigenschaften der Rahmen (wobei u, v, w Welten beschreiben und uRv die Bekanntschaftsrelation R von u nach v).

2.5 Systeme und Rahmeneigenschaften

Eine starke Beziehung besteht zwischen den axiomatisierten Systemen einerseits und den Rahmen, in denen sie gültig sind, andererseits. Alle hier beschriebenen Axiome bedingen eine spezifische Struktur von Rahmen, in denen sie gültig sind.

In den Erklärungstexten aller Systeme außer **K** wird differenziert zwischen

- den ursprünglichen „**K**-Nachbarn“ oder „**K**-Nachbarschaften“ einerseits, womit diejenigen Relationen gemeint sie, die bereits im **K**-System so gefordert und aufgestellt würden (in den Bildern durchgezogen dargestellt), und

- den neuen Relationen, die die hinzugekommenen Axiome des jeweiligen Rahmens erforderlich machen (in den Bildern gestrichelt dargestellt).

Diese Begrifflichkeit ist nicht Standard, soll aber dem besseren Verständnis dienen, welche Eigenschaften tatsächlich durch die Axiome eingebracht werden. Schließlich ist noch festzustellen, dass der Übersichtlichkeit halber nicht immer *alle* gültigen Formeln in den Welten angegeben wurden. So gilt etwa in Abb. 2.7 in allen Welten φ, außer in w_0, dies wird aber lediglich im Text erwähnt.

2.5.1 Das System **K** und allgemeine Bekanntschaftsrelationen

Ohne weitere Axiome gilt, dass die Bekanntschaftsrelation zwischen den Welten beliebig strukturiert sein kann. Insbesondere wird etwa nicht verlangt, dass Welten sich selbst „kennen“, oder das diese Bekanntschaft auf Gegenseitigkeit beruhen muss. Der passende Rahmen zu einem allgemeinen **K**-System ist somit ein allgemeiner, gerichteter Graph, und entspricht der im Einführungsbeispiel in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten allgemeinen Anschauung. Ein beispielhafter Rahmen ist in Abb. 2.6 gezeigt. **K** stellt keine strikten Einschränkungen an die Topologie der Bekanntschaftsrelationen zwischen den Welten; einige Graphenstrukturen sind aber nicht als minimale Modelle geeignet, so etwa Graphen mit mehreren Zusammenhangskomponenten.

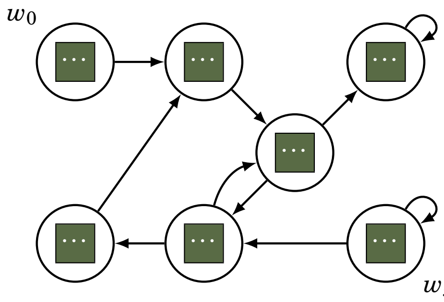


Abb. 2.6: Das **K**-Axiom $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ motiviert die Graphenstruktur von Welten, erlaubt aber allgemeine Graphen. Die als w_x bezeichnete Welt allerdings hat keinerlei Bedeutung, wenn die erfüllende Welt w_0 ist, da sie w_0 weder direkt noch indirekt bekannt ist.

2.5.2 Das System **K4** und transitive Bekanntschaftsrelationen

Das Axiom **K4** besagt: Wenn eine Formel in allen Nachbarwelten gilt, so gilt sie auch in all deren Nachbarwelten. Dies ist verdeutlicht in Abb. 2.7. Dadurch, dass die **K**-Relation (durchgezogene Pfeile) um die transitive Hülle erweitert wird (gestrichelte Pfeile), kennt w_0 nicht nur seine von **K** geforderten Nachbarn, sondern deren Nachbarn. Ist nun in w_0 $\Box\varphi$ gefordert, so betrifft diese Forderung neben ihren **K**-Nachbarn auch wiederum deren Nachbarn und erzwingt somit $\Box\varphi$ gleichsam für sie. Nicht gezeigt in der Abbildung ist, dass in allen Welten *außer* w_0 auch φ gelten muss. Die Welt w_0 ist ausgenommen, da es sich nicht um ein **T**-System handelt. Dieses Axiom kann verwendet werden, um „bekannt“ mit „in der Vergangenheit“ zu identifizieren. Somit hätte $\Box$ die Bedeutung „in der Vergangenheit immer“. Gilt nun in einer Welt (einem „Ereignis“) w_i etwa „in der Vergangenheit gab es noch keine Automobile“, so gilt dasselbe auch in der Welt w_j, die „in der Vergangenheit von“ w_i liegt.

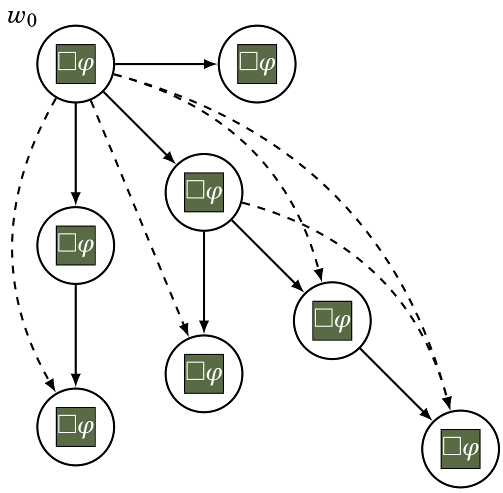


Abb. 2.7: Das **K4**-Axiom $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ wird gewährleistet durch eine transitive Relation. Die Nachbarn der Nachbarn von w_0 sind gleichzeitig direkte Nachbarn von w_0. In allen Welten außer w_0 gilt des Weiteren φ.

2.5.3 Das System **D** und serielle Bekanntschaftsrelationen

Das Axiom **D** fordert, dass sofern eine Formel in *allen* Nachbarwelten gilt, sie auch in mindestens *einer* Nachbarwelt gelten muss. Dies bedeutet, dass im Allgemeinen jede Welt auch eine Nachbarwelt besitzen muss, es darf keine Sackgassen geben. Eine solche Relation wird als „seriell“ bezeichnet. Die Forderung, *„alles, was notwendig ist, muss auch möglich sein“*, entspricht der Intuition, dass etwa eine Forderung „notwendigerweise sind Kreise rund“ impliziert, dass es überhaupt Kreise gibt – anstelle der **K**-Interpretation, die auch eine Nicht-Existenz von Kreisen als Erfüllung akzeptieren würde. Abb. 2.8 zeigt die erzwungene Relation gestrichelt.

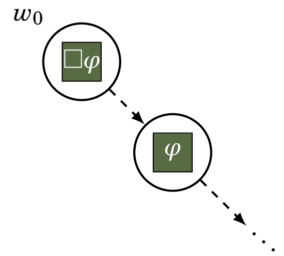


Abb. 2.8: Das **D**-Axiom $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ erfordert, dass w_0 durch $\Box\varphi$ auch eine Welt kennt, in der φ gilt, somit $\Diamond\varphi$. Sofern φ keine weiteren $\Box$- oder $\Diamond$-Operatoren enthält, ist seine Nachfolgewelt beliebig.

2.5.4 Das System **T** und reflexive Bekanntschaftsrelationen

Das Axiom **T** besagt, dass wenn eine Formel von einer Welt als „notwendig gültig“ betrachtet wird, sie in ebendieser Welt auch gelten muss. Dies wird erzielt, indem man jede Welt sich selbst „kennen“ lässt. Gilt jetzt ein $\Box\varphi$ in einer Welt w, so erzwingt dies ein lokales φ in w. Eine Bekanntschaftsrelation, in der jedes Element auch sich selbst kennt, wird als *reflexiv* bezeichnet. Die damit verknüpfte Forderung „was nötig ist, muss auch gültig sein“ entspricht der natürlichen Intuition von „möglich“ und „nötig“. Dies ist dargestellt in Abb. 2.9, in der $\Box\varphi$ in w_0 nicht nur in allen **K**-Nachbarn (durchgezogene Pfeile) ein φ erzwingt, sondern durch die reflexive Bekanntschaft mit sich selbst (gestrichelter Pfeil) auch bei sich selbst.

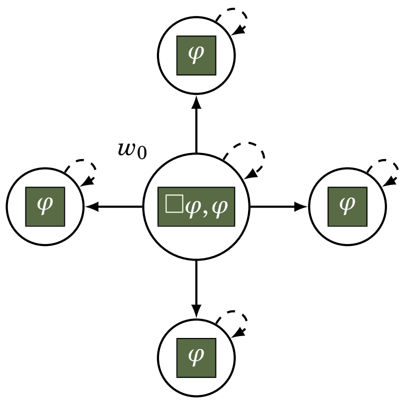


Abb. 2.9: Das **T**-Axiom $\Box\varphi \to \varphi$ wird durch eine reflexive Relation gewährleistet.

2.5.5 Das System **KB** und symmetrische Bekanntschaftsrelationen

Das Axiom **KB** besagt, dass wenn eine Formel in einer Welt gilt, somit auch in allen ihr bekannten Welten jeweils eine Welt bekannt ist, in der diese Formel gilt. Die letzte und erste Welt sind hier in der Interpretation selbstverständlich identisch: Alle „Bekannten“ einer Welt kennen wiederum diese Welt selbst, die Bekanntschaftsrelation ist *symmetrisch*. Der damit verbundene Rahmen ist also ein ungerichteter Graph. Dies ist dargestellt in Abb. 2.10: w_0 hat vier nach **K** bekannte Welten (durchgezogene Pfeile), zu denen durch die Symmetrie entgegengerichtete Pfeile (gestrichelt) kommen. In w_0 gilt φ, und in allen benachbarten Welten gilt $\Diamond\varphi$, da sie alle nun w_0 kennen.

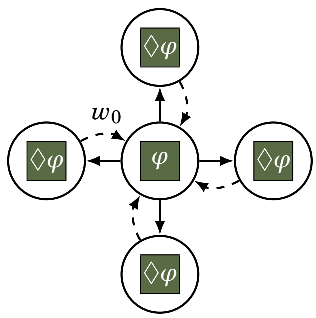


Abb. 2.10: Das **KB**-Axiom $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ wird gewährleistet durch eine symmetrische Relation.

3 Resolution für modale Logiken

Dieses Kapitel befasst sich mit dem Kern der Arbeit, nämlich der Resolution innerhalb der unterschiedlichen Klassen von modalen Systemen, wie in Tab. 2.1 vorgestellt. Die wesentliche Grundlage für die hier dargestellten Erklärungen ist [EFdC89]. Zunächst werden in den Abschnitten 3.1 und 3.2 Intuitionen anhand von Beispielen verdeutlicht und einige grundlegende Definitionen dargestellt. Dies ist Grundlage für die folgenden Kapitel 4 bis 9 mit den detaillierten Beschreibungen der Resolutionsmechanismen in den jeweiligen Systemen. Die Mechanismen der modallogischen Systeme bauen aufgrund der gemeinsamen Basisaxiome stark aufeinander auf. Es wird daher empfohlen, die Abschnitte in der gegebenen Reihenfolge zu lesen, da ein Verständnis der Resolution einzelner Systeme unabhängig etwa von **K** nicht möglich ist. Wo erforderlich, wurden entsprechende Verweise eingebracht. Es ist aber ferner empfehlenswert, insbesondere die angegebenen Algorithmen der einzelnen Systeme im direkten Vergleich zu betrachten.

3.1 Angestrebte Funktionsweise der Resolution

Bevor die modale Resolution formal definiert wird, sollen folgende Beispiele die gewünschte Funktionsweise der Resolution im Kontext der modalen Logik verdeutlichen.

$$\frac{\Box(p \vee q) \qquad \Diamond\neg p}{\Diamond(\neg p, q)} \tag{a}$$

$$\frac{\Box(p \vee q) \qquad \Box\neg p}{\Box q} \tag{b}$$

$$\frac{\Diamond(\neg p, p \vee q)}{\Diamond(\neg p, p \vee q, q)} \tag{c}$$

In (a) werden $\Box$ und $\Diamond$ kombiniert. Die Aussage von (a) ist: Wenn in allen Nachfolgewelten $p \vee q$ gilt und es außerdem (mindestens) eine Nachfolgewelt gibt, in der $\neg p$ gilt, dann muss es auch (mindestens) eine Nachfolgewelt geben, in der $\neg p \wedge q$ gilt.

Ähnlich kombiniert (b) zwei $\Box$-Operatoren. Die Bedeutung von (b) ist: Wenn in allen Nachfolgewelten $p \vee q$ gilt und gleichzeitig in allen Nachfolgewelten $\neg p$ gilt, dann muss zwangsläufig q in allen Nachfolgewelten gelten.

Eine ähnliche Regel mit zwei $\Diamond$-Klauseln wäre nicht korrekt, da die jeweiligen $\Diamond$-Klauseln sich nicht zwangsläufig auf dieselbe Nachfolgewelt beziehen müssen.

Wenn φ eine unerfüllbare Formel ist, dann ist die Formel $\psi = \Diamond\varphi$ ebenfalls unerfüllbar. Im Kontext der modalen Logik muss es möglich sein, Schlüsse aus nur einer Prämisse zu ziehen. Beispiel (c) verdeutlicht dies. Die Formel $\Diamond(\neg p, q)$ ist zwar logisch äquivalent zu $\Diamond(\neg p, p \vee q, q)$, die explizitere Darstellung wird jedoch für die Vollständigkeit benötigt.

3.2 Normalformen für modallogische Formeln

Wie bereits die Aussagenlogik verfügt auch die Modallogik über eigene Normalformen, die die Ordnung der Operatoren vereinheitlichen. Diese Normalformen beschränken, wie auch im Fall der Aussagenlogik, nicht die Allgemeinheit der abbildbaren Formeln, aber erleichtern die algorithmische Lösung, die in den späteren Abschnitten aufgestellt wird. Es ist jedoch bereits hier zu bemerken, dass die Transformation einer Formel in die jeweiligen Normalformen – ebenfalls wie in der Aussagenlogik– komplexitätstechnisch *nicht* zu vernachlässigen ist. Die Umformung kann unter Umständen erheblichen Aufwand verursachen, und umgekehrt die Komplexität der Resolution gegenüber dem Allgemeinfall deutlich reduzieren. In [Lad77] wird gezeigt, dass das Finden eines erfüllenden Modells für eine modallogische Formel in Systemen zwischen **K** und **S4** ein PSPACE-vollständiges Problem ist. Im Falle von **S5** ist das Problem lediglich NP-vollständig. Da die Komplexität in dieser Arbeit nicht im Vordergrund steht, sei dies nur als einleitende Bemerkung gegeben.

Definition (DNF) *Eine Formel ist in* disjunktiver Normalform *(kurz* DNF*), wenn sie eine (möglicherweise leere) Disjunktion folgender Gestalt ist:* **DNF, disjunktive Normalform**

$$\varphi = \bigvee L_i \vee \bigvee \Box D_j \vee \bigvee \Diamond A_k$$

Wobei jedes L_i ein Literal, jedes D_j in DNF und jedes A_k in KNF ist.

Definition (KNF) *Eine Formel ist in* konjunktiver Normalform *(kurz* KNF*), wenn sie folgende Form hat:* **KNF, konjunktive Normalform**

$$\varphi = \bigwedge C_i$$

Wobei jedes C_i in DNF ist.

Zum Beispiel sind folgende Formeln in KNF:

- $\Box(p \vee q \vee \Diamond(r \wedge t))$
- $\Diamond((p \vee q) \wedge t) \wedge \neg p$
- $\neg p \vee \Box(\Box p \vee \Diamond(q \Box r))$

Folgende Formeln sind es nicht:

- $\neg\Box(\Diamond p \vee \neg\Diamond(q \vee (r \wedge \Diamond p)))$
- $(p \vee \Box(q \wedge r)) \wedge s$
- $\Box(p \vee q) \wedge \Diamond\Box((s \vee t) \wedge q)$

Wie eingangs beschrieben und im folgenden Satz 1 formalisiert, können Formeln zur Prüfung ihrer Erfüllbarkeit ohne Beschränkung der Allgemeinheit in KNF betrachtet werden, wobei Aussagen über Entscheidbarkeit, nicht aber über allgemeine Komplexitätseigenschaften, Gültigkeit behalten.

Satz 1 *Zu jeder modalen Formel φ lässt sich effizient eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ' in KNF konstruieren.*

Beweis. Als erstes werden alle klassischen Operatoren außer $\wedge, \vee, \neg$ entfernt und die Negation nach innen gezogen, bis sie direkt vor einem aussagenlogischen Atom steht. Dieser Vorgang nutzt die Axiome der Aussagenlogik, die Axiome K und Dual, sowie die Regeln Nec und Pos von K. Anschließend folgt eine Induktion über die modale Tiefe von φ.

- Wenn $\mathrm{md}(\varphi) = 0$, dann wird verfahren wie im Abschnitt 2.1 beschrieben – es handelt sich jetzt um eine klassische aussagenlogische Formel ohne modale Operatoren.

- Wenn $\varphi = \Box\psi$, dann wird ψ normalisiert und mit dem Axiom K wird $\Box$ über die Konjunktion verteilt.
- Wenn $\varphi = \Diamond\psi$: Sei ψ' Normalform von ψ, so ist $\Diamond\psi'$ Normalform von φ.
- Sonst ist φ eine Kombination von Literalen und mit $\Box$ oder $\Diamond$ beginnenden Teilformeln. Letztere werden normalisiert und anschließend wird die Gesamtformel wie im Abschnitt 2.1 beschrieben in die Normalform gebracht.

$\Box$

Beispiel der Umformung

Die Umformung soll an folgender Formel beispielhaft vorgenommen werden:

$$\neg\Box(\Diamond p \vee \neg\Diamond(q \vee (r \wedge \Diamond p)))$$

Nachdem die Negation nach innen gezogen wurde, sieht die Formel wie folgt aus:

$$\Diamond(\Box\neg p \wedge \Diamond(q \vee (r \wedge \Diamond p)))$$

Die Teilformel $q \vee (r \wedge \Diamond p)$ kann zu $(q \vee r) \wedge (q \vee \Diamond p)$ normalisiert werden. Insgesamt stellt sich die Formel in KNF also wie folgt dar:

$$\Diamond(\Box\neg p \wedge \Diamond((q \vee r) \wedge (q \vee \Diamond p)))$$

Da KNF-Formeln als Mengen von Klauseln dargestellt werden, wird die KNF-Formel wie folgt geschrieben:

$$\Diamond(\Box\neg p, \Diamond(q \vee r, q \vee \Diamond p))$$

Diese Umformung ist unabhängig davon, welches normale modallogische System betrachtet wird. Die spezifischen Axiome der einzelnen Systeme kommen in den folgenden Abschnitten zum Tragen, wobei jeweils von der hier vorgestellten, allgemeinen Normalform ausgegangen wird.

4 Resolution für K-Rahmen

In diesem Kapitel wird die Resolution für **K**-Rahmen erörtert. Zu diesem Zweck wird das System R**K** definiert und dessen Korrektheit sowie Vollständigkeit gezeigt. In späteren Kapiteln wird das System für weitere Rahmen erweitert, somit ist R**K** die Grundlage für alle in dieser Arbeit vorgestellten Resolutionssysteme.

4.1 Das System RK

In [EFdC89] werden drei Bestandteile des Systems R**K** beschrieben. Es werden *Resolutionsregeln* für die Berechnung der Resolvente, *Vereinfachungsregeln* und *Schlussregeln* eingeführt. Die Berechnung der Resolvente erfolgt durch nicht-deterministische Anwendung der Regeln. **Resolutionsregel, Vereinfachungs-regel, Schlussregel**

4.1.1 Regeln zur Berechnung der Resolvente

Im folgenden Übersichtsdiagramm werden zwei Relationen auf Klauseln definiert. Die Schreibweise $\Sigma(A,B) \to C$ bedeutet, dass C direkte Resolvente von A und B ist. Wenn C direkte Resolvente von A ist, dann ist die Schreibweise $\Gamma(A) \to C$. **$\Sigma(A,B) \to C$, $\Gamma(A) \to C$**

Axiome

$$(\text{A1})\ \Sigma(p,\neg p) \to \bot$$

$$(\text{A2})\ \Sigma(\bot,A) \to \bot$$

Σ-Regeln	**Γ-Regeln**
$(\vee)\ \dfrac{\Sigma(A,B) \to C}{\Sigma(A \vee D_1, B \vee D_2) \to C \vee D_1 \vee D_2}$	$(\Diamond 1)\ \dfrac{\Sigma(A,B) \to C}{\Gamma(\Diamond(A,B,\boldsymbol{E})) \to \Diamond(A,B,C,\boldsymbol{E})}$
$(\Box\Diamond)\ \dfrac{\Sigma(A,B) \to C}{\Sigma(\Box A, \Diamond(B,\boldsymbol{E})) \to \Diamond(B,C,\boldsymbol{E})}$	$(\Diamond 2)\ \dfrac{\Gamma(A) \to B}{\Gamma(\Diamond(A,\boldsymbol{E})) \to \Diamond(B,A,\boldsymbol{E})}$
$(\Box\Box)\ \dfrac{\Sigma(A,B) \to C}{\Sigma(\Box A, \Box B) \to \Box C}$	$(\vee)\ \dfrac{\Gamma(A) \to B}{\Gamma(A \vee C) \to B \vee C}$
	$(\Box)\ \dfrac{\Gamma(A) \to B}{\Gamma(\Box A) \to \Box B}$

A,B,C,D_1,D_2 sind Klauseln und $\boldsymbol{E}$ ist eine Klauselmenge.

4.1.2 Vereinfachungsregeln

Die Schreibweise $A \approx B$ bedeutet, dass A zu B vereinfacht werden kann.

(S1) $\Diamond\bot \approx \bot$

(S2) $\bot \vee D \approx D$

(S3) $(\bot, D) \approx \bot$

(S4) $A \vee A \vee D \approx A \vee D$

Normalform

Bemerkung *Für jede Formel φ gibt es eine eindeutige Formel φ', sodass $\varphi \approx \varphi'$, und φ' nicht weiter vereinfacht werden kann. φ' wird die* Normalform *von φ genannt.*

Definition (Resolvente) *Sei C die Normalform von C'. C ist dann eine Resolvente von:*

- *A und B gdw. $\Sigma(A,B) \to C'$. Schreibweise: $\Sigma(A,B) \Rightarrow C$*
- *A gdw. $\Gamma(A) \to C'$. Schreibweise: $\Gamma(A) \Rightarrow C$*

Wir unterscheiden also zwischen der direkten Resolution in eine unvereinfachte Formel, $\Sigma(A,B) \to C$, und der Resolution mit anschließender Vereinfachung in eine einheitliche Normalform, $\Sigma(A,B) \Rightarrow C$ (und ebenso für Γ).

4.1.3 Inferenzregeln

Die Σ-, Γ- sowie die Vereinfachungsregeln führen zu den eigentlichen Schlussregeln.

Seien C, C_1, C_2 und D Klauseln. Die Inferenzregeln lauten:

(R1) $\frac{C}{D}$ wenn $\Gamma(C) \Rightarrow D$

(R2) $\frac{C_1 \quad C_2}{D}$ wenn $\Sigma(C_1, C_2) \Rightarrow D$

Definition ($\mathsf{R}\mathbf{K}$-Konsequenz) *Die Deduktion einer Klausel D aus der Menge $\boldsymbol{S}$ in $\mathsf{R}\mathbf{K}$ wird $\mathsf{R}\mathbf{K}$-Konsequenz genannt. Schreibweise: $\boldsymbol{S} \vdash_{\mathsf{RK}} D$.*

4.2 Korrektheit

Die Korrektheit von $\mathsf{R}\mathbf{K}$ relativ zu $\mathbf{K}$ zeigt folgender Satz:

Satz 2

(i) Aus $\Sigma(A,B) \to C$ folgt $\vdash_{\mathbf{K}} A \wedge B \to C$.

(ii) Aus $\Gamma(A) \to C$ folgt $\vdash_{\mathbf{K}} A \to C$.

(iii) Aus $S \vdash_{\mathsf{RK}} C$ folgt $\vdash_{\mathbf{K}} S \to C$

Beweis. Die Fälle (i) und (ii) werden induktiv über die Anzahl der Anwendungen der Resolutionsregeln bewiesen.

Wenn $\Sigma(A,B) \to C$ ein Axiom ist, dann ist entweder

- $\Sigma(p, \neg p) \to \bot$ und dann ist $\vdash_{\mathbf{K}} p \wedge \neg p \to \bot$, oder
- $\Sigma(\bot, A) \to A$ und dann gilt $\vdash_{\mathbf{K}} \bot \wedge A \to A$.

Wenn die letzte angewandte Regel eine Σ-∨-Regel war, dann folgt nach der Induktionsvoraussetzung (IV) $\vdash_{\mathbf{K}} A \wedge B \to C$ mittels klassischem Kalkül:

$$\vdash_{\mathbf{K}} (A \vee D_1) \wedge (B \vee D_2) \to C \vee D_1 \vee D_2$$

Falls die letzte angewandte Regel eine Σ-□◇-Regel war, dann folgt aus IV und der Regel Pos

$$\vdash_{\mathbf{K}} (\Box A \wedge \Diamond(B \wedge \boldsymbol{E})) \to \Diamond(A \wedge B \wedge \boldsymbol{E})$$

sowie

$$\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond(A \wedge B \wedge \boldsymbol{E}) \to \Diamond(B \wedge C \wedge \boldsymbol{E}).$$

Für die Σ-□□-Regel als zuletzt angewandte Regel folgt aus IV und der Regel Nec

$$\vdash_{\mathbf{K}} (\Box A \wedge \Box B) \to \Box C.$$

Die Γ-◇1-Regel schlägt die Brücke zwischen den Axiomen und den Γ-Regeln. Aus $\vdash_{\mathbf{K}} (A \wedge B) \to C$ und der Regel Pos folgt

$$\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond(A \wedge B \wedge \boldsymbol{E}) \to \Diamond(A \wedge B \wedge C \wedge \boldsymbol{E}).$$

Falls die letzte Regel eine Γ-◇2-Regel war, dann folgt aus der IV $\vdash_{\mathbf{K}} A \to B$ und der Regel Pos

$$\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond(A \wedge \boldsymbol{E}) \to \Diamond(B \wedge A \wedge \boldsymbol{E}).$$

Falls es die Γ-∨-Regel war, dann folgt aus der IV

$$\vdash_{\mathbf{K}} (A \vee C) \to B \vee C.$$

Und schließlich, falls es sich um die Γ-□-Regel handelte, dann gilt aus IV und der Regel Nec

$$\vdash_{\mathbf{K}} \Box A \to \Box B.$$

Der Fall (iii) folgt dann direkt mittels Modus Ponens unter der Verwendung der Tatsache, dass aus $A \approx B$ folgt, dass A und B logisch äquivalent in **K** sind.

□

4.3 Vollständigkeit

Im Folgenden wird gezeigt, dass das System R**K** widerlegungsvollständig ist, also dass eine Widerlegung in R**K** einer Widerlegung auf Basis von **K** entspricht.

Satz 3 *Jede unerfüllbare Klauselmenge ist* R**K***-widerlegbar.*

Die grundsätzliche Beweisidee ist folgendermaßen: Für eine Klauselmenge S wird ein semantisches Tableau (ein sogenannter **K**-Baum) aufgebaut. In dieser Baumstruktur wird dann, angefangen bei den Blättern, sukzessive geprüft, ob ein Knoten einen Widerspruch beinhaltet. In diesem Fall werden die Vorgängerknoten überprüft. Falls die Wurzel des Baums (die Klauselmenge $\boldsymbol{S}$ selbst) einen Widerspruch beinhaltet, dann ist die Klauselmenge unerfüllbar. Im anderen Fall lassen sich aus dem Baum die Welten, die Relation, sowie die Belegung für ein $\boldsymbol{S}$ erfüllendes Modell ableiten. **K-Baum**

Algorithmus 1 : Konstruktion des **K**-Baums

Eingabe : Klauselmenge $\boldsymbol{S}$
Ausgabe : Ein Baum $G = (V, E)$ (**K**-Baum für $\boldsymbol{S}$)

1 Setze die Wurzel von G auf $\boldsymbol{S}$
2 **solange möglich tue**
3   **solange möglich tue**
4   wähle ein Blatt $u \in V$ mit einer Klausel der Form $C = C_1 \vee C_2$
5   markiere u als „Typ 1“
6   füge zwei Kinder zu u hinzu:
7         $u_1 := u - \{C\} \cup \{C_1\}$ und $u_2 := u - \{C\} \cup \{C_2\}$
    // An dieser Stelle ist jedes Blatt eine Menge von Einheitsklauseln
8   **für jedes** *Blatt* $u \in V$ **tue**
9   **wenn nicht** $(p, \neg p) \in u$ *für Atom* p **dann**
            // u ist eine Menge von Einheitsklauseln
            // $u = L_1, \ldots, L_m, \Box A_1, \ldots \Box A_n, \Diamond P_1, \ldots, \Diamond P_q$
10   **für** $i := 1$ **bis** q **tue**
11                $u_i := P_i, A_1, \ldots, A_n$
12   füge u_i als Kind von u hinzu
13 markiere alle unmarkierten Knoten als „Typ 2“

Im **K**-Baum sind Knoten Klauselmengen. Die Kanten des Baumes sind gerichtet und ein Knoten wird als Wurzel ausgezeichnet. Der Algorithmus 1 konstruiert einen solchen **K**-Baum zu einer gegebenen Klauselmenge $\boldsymbol{S}$.

Die Abbruchbedingung für die in der Zeile 2 startende Schleife wird erfüllt, wenn für jedes Blatt u gilt: u ist eine Menge von Einheitsklauseln und ein Atom p, sowie $\neg p$, sind in u oder es gibt keine Klausel mehr der Form $\Diamond A$.

Die Knoten, die in der Zeile 7 hinzugefügt werden, haben dieselbe modale Tiefe wie die Elternknoten. In der Zeile 12 hinzugefügte Knoten haben eine echt kleinere modale Tiefe im Vergleich zu den Elternknoten. Somit terminiert Algorithmus 1.

Projektionen

Die in der Zeile 12 hinzugefügte Knoten u_i werden **K**-*Projektionen* von u genannt.

abgeschlossener Knoten, Typ-1-Knoten, Typ-2-Knoten

Definition (Menge der abgeschlossenen Knoten) *Sei p ein Atom und $u \in V$ ein Knoten im* **K**-*Baum. Die Menge der* abgeschlossenen Knoten *wird rekursiv wie folgt definiert:*

- *u ist abgeschlossen wenn $(p, \neg p) \in u$*
- *ist u als „Typ 1“ markiert und alle Kinder von u sind abgeschlossen, so ist es auch u*
- *ist u als „Typ 2“ markiert und mindestens eins der Kinder von u ist abgeschlossen, so auch u*

Definition (Tiefe eines Knotens) *Die* Tiefe $d(u)$ *eines Knotens u in dem* **K**-*Baum ist wie folgt definiert:*

- *die Blätter haben die Tiefe 0,*
- *wenn u die Kinder $u_1, \ldots, u_n$ hat, dann* $d(u) = \max(d(u_1), \ldots, d(u_n)) + 1$

Die Tiefe des **K**-*Baum ist die Tiefe der Wurzel.*

Lemma 4 *Sei $\boldsymbol{S}$ eine Menge von Klauseln. Wenn der* **K**-*Baum von $\boldsymbol{S}$ nicht abgeschlossen ist, dann hat $\boldsymbol{S}$ ein Modell.*

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein nicht abgeschlossener Baum für $\boldsymbol{S}$. Dann existiert ein Teilbaum $G' = (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ sodass:

- die Wurzeln von G und von G' übereinstimmen,
- alle Knoten von G' nicht abgeschlossen sind,
- jeder Knoten vom „Typ 1“ genau einen Nachfolger hat,
- die Kinder eines „Typ 2“-Knotens u in G genau die Kinder des Knotens u in G' sind.

Sei ρ die kleinste Äquivalenzrelation, die die Paare (u, v) aus G' beinhaltet, sodass $(u, v) \in E'$ und u ist vom „Typ 1“. Sei $|u|$ die Äquivalenzklasse von u. Das $\boldsymbol{S}$ erfüllende Modell $M = ((W, R), V)$ wird aus G wie folgt gewonnen:

1. W ist die Menge der Äquivalenzklassen von G' bezüglich ρ
2. für $|u|$ und $|v|$ in G: $|u| R |v|$ gdw. $|u| \neq |v|$ und es existiert ein $u_1 \in |u|$ sowie ein $v_1 \in |v|$ sodass $(u_1, v_1) \in E$
3. $|u| \in V(p)$ gdw. $p \in u_1$ für einen $u_1 \in |u|$

Behauptung *Für jeden Knoten $u \in G'$ und jede Klausel A in u gilt $M, |u| \models A$*

Beweis der Behauptung. Induktion über die Länge von A.

Wenn A ein Literal ist, so folgt die Behauptung aus der Definition der Sichtbarkeitsrelation V.

Wenn $A = A_1 \vee A_2$, so ist u ein „Typ 1“-Knoten und entweder A_1 oder A_2 ist in einem Nachfolger v von u mit $u \rho v$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass es sich hierbei um A_1 handelt. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $M, |v| \models A_1$. Aus $|u| = |v|$ folgt die Behauptung.

Wenn $A = \Diamond A_1$, dann gibt es einen „Typ 2“-Knoten u' in $|u|$ sodass $A \in u'$. Außerdem hat u' ein Kind u'' (Zeile 12 im Algorithmus), sodass $A_1 \in u''$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $M, |u''| \models A_1$ und daraus folgt $M, |u'| \models \Diamond A$.

Und schließlich, wenn $A = \Box A_1$, so gibt es einen „Typ 2“-Knoten u' aus $|u|$ sodass $\Box A_1 \in u'$. Aus der Konstruktion des **K**-Baums folgt, dass für alle Kinder u'_i von u' gilt $A_1 \in u'_i$. Die u'_i Welten sind genau die Welten, die aus u' erreichbar sind. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $M, |u'| \models \Box A_1$.

■

Aus der Behauptung folgt: Wenn der Knoten r die Wurzel des Baumes ist, so gilt $M, |r| \models \boldsymbol{S}$ und M ist ein Modell für $\boldsymbol{S}$. □

4.3.1 Beispiel für einen Baum mit nicht abgeschlossener Wurzel

Sei $\boldsymbol{S} = \{p \vee t, \Box(q \vee \Diamond((r \vee s), t)), \Diamond\neg q\}$. Die Abbildung 4.1 zeigt den dazugehörigen **K**-Baum.

Der Teilbaum, wie im Beweis gefordert, sieht beispielsweise wie in Abbildung 4.2 aus.

Aus dieser Abbildung ergibt sich folgendes Modell $M = ((W, R), V)$ für die Klauselmenge $\boldsymbol{S}$:

- Die Welten sind $W = \{w_0, w_1, w_2\}$ mit
  - $w_0 = \{\{p \vee t, \Box(q \vee \Diamond((r \vee s), t)), \Diamond\neg q\}, \{p, \Box(q \vee \Diamond((r \vee s), t)), \Diamond\neg q\}\}$
  - $w_1 = \{\{\neg q, q \vee \Diamond((r \vee s), t)\}, \{\neg q, \Diamond((r \vee s), t)\}\}$
  - $w_2 = \{\{(r \vee s), t\}, \{r, t\}\}$

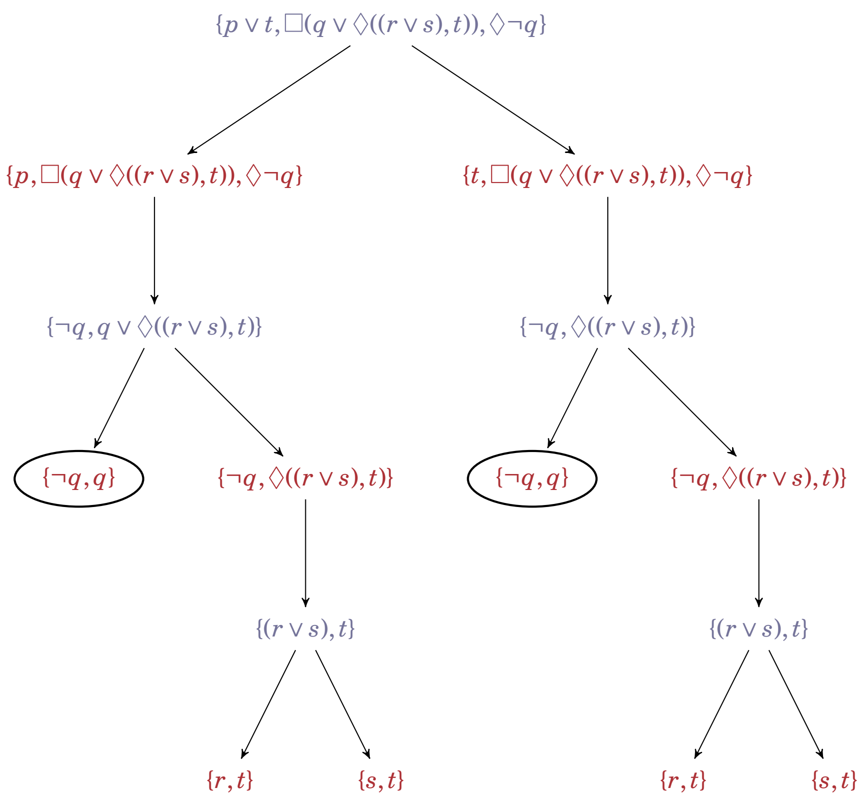


Abb. 4.1: **K**-Baum für $\boldsymbol{S}$. Die „Typ 1“-Knoten sind blau und die „Typ 2“-Knoten rot markiert. Die umrundeten Knoten sind abgeschlossen.

- Die Relation ist $R = \{(w_0, w_1), (w_1, w_2)\}$
- Die Belegungsfunktion ist V mit
  - $V(p) = \{w_0\}$
  - $V(q) = \emptyset$
  - $V(r) = \{w_2\}$
  - $V(t) = \{w_2\}$

Die Abbildung 4.3 ist eine geeignete Darstellung des Modells M.

Im zweiten Teil des Beweises wird gezeigt, dass ein **K**-Baum mit abgeschlossener Wurzel R**K**-widerlegbar ist.

Lemma 5 *Seien A_i, B und Q_j Klauseln.*

(i) Aus $A_1, \dots, A_n \vdash_{\mathsf{RK}} B$ folgt $\Box A_1, \dots, \Box A_n \vdash_{\mathsf{RK}} \Box B$.

(ii) Wenn $A_1, \dots, A_n, Q_1, \dots, Q_r \vdash_{\mathsf{RK}} B$ mit $(r \geq 1)$ und der Beweis benutzt mindestens eins der Q_j, dann folgt

- *$\Box A_1, \dots \Box A_n, \Diamond(Q_1, \dots, Q_r) \vdash_{\mathsf{RK}} \Diamond(B, Q_1, \dots, Q_r, \boldsymbol{E})$, für eine Klauselmenge $\boldsymbol{E}$, falls $B \neq \bot$*
- *$\Box A_1, \dots \Box A_n, \Diamond(Q_1, \dots, Q_r) \vdash_{\mathsf{RK}} \bot$, sonst.*

Beweis. (i): Angenommen, es gibt einen Beweis von B aus $A_1, \dots, A_n$. Dieser Beweis wird wie folgt modifiziert:

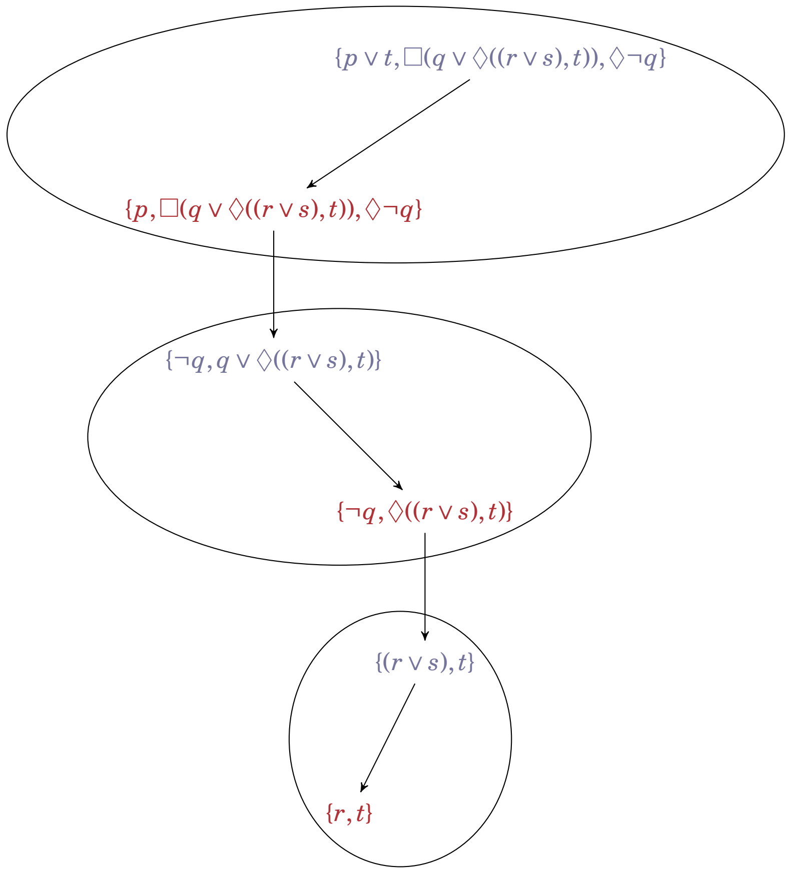


Abb. 4.2: Teilbaum für $\boldsymbol{S}$ mit eingezeichneten Äquivalenzklassen, Farben gemäß Abb. 4.1. Die Äquivalenzklassen sind in der Abbildung schwarz umrundet.

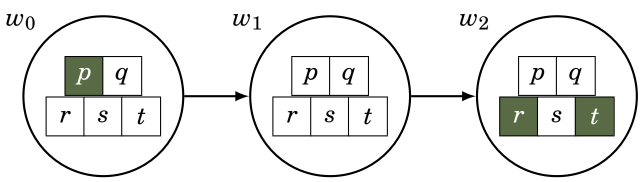


Abb. 4.3: Darstellung des Modells M als Graph, mit den drei Welten entsprechend der in Abb. 4.2 dargestellten Äquivalenzrelationen.

- Jedes Axiom A_i wird durch $\Box A_i$ ersetzt.
- Jede Regel der Form $\frac{C_1 \quad C_2}{D}$ mit $\Sigma(C_1, C_2) \Rightarrow D$ wird durch $\frac{\Box C_1 \quad \Box C_2}{\Box D}$ ersetzt. Dies ist möglich, da $\Sigma(\Box C_1, \Box C_2) \Rightarrow \Box D$ aus der Σ-$\Box\Box$-Regel folgt.
- Jede Regel der Form $\frac{C}{D}$ mit $\Gamma(C) \Rightarrow D$ wird durch $\frac{\Box C}{\Box D}$ ersetzt. Dies ist möglich, da $\Gamma(\Box C) \Rightarrow \Box D$ aus der Γ-$\Box$-Regel folgt.

Für bessere Lesbarkeit werden folgende Abkürzungen eingeführt:

- $\bar{A}$ für $A_1, \ldots, A_n$
- $\Box\bar{A}$ für $\Box A_1, \ldots, \Box A_n$
- $\bar{Q}$ für $Q_1, \ldots, Q_r$
- $\Diamond\bar{Q}$ für $\Diamond Q_1, \ldots, \Diamond Q_r$

Sei $\boldsymbol{S}$ eine Klauselmenge und $C \in \boldsymbol{S}$ eine Klausel. Die Klausel D *hängt* von C *ab*, wenn für den Beweis von D aus $\boldsymbol{S}$ die Klausel C benötigt wird.

(ii): Angenommen $B \neq \bot$. Der Beweis der Aussage erfolgt per Induktion über den Beweis für B.

Wenn B ein Axiom ist, dann muss gelten, dass $B = Q_j$ für ein j. Dann gilt $\Diamond(B, Q_1, \ldots, Q_r) = \Diamond(Q_1, \ldots, Q_r)$.

Andernfalls wurde entweder die Regel (R1) oder die Regel (R2) verwendet.

Fall 1: Angenommen, es handelte sich um die Regel (R2). Der Beweis für B hat folgende Form:

$$\frac{\begin{array}{c}\bar{A} \qquad \bar{Q}\\ \diagdown \quad \diagup\\ C_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\bar{A} \qquad \bar{Q}\\ \diagdown \quad \diagup\\ C_2\end{array}}{B} \qquad \text{mit} \quad \Sigma(C_1, C_2) \Rightarrow B \tag{a}$$

Mindestens eines der C_i muss von mindestens einem Q_j abhängen. Angenommen es ist C_1. Es gibt erneut zwei Möglichkeiten:

(1) $\bar{A} \vdash_{\mathsf{RK}} C_2$. Dann folgt aus (i): $\Box\bar{A} \vdash \Box C_2$. Gleichzeitig gilt nach der Induktionsvoraussetzung $\Box\bar{A}, \Diamond\bar{Q} \vdash \Diamond(C_1, \bar{Q}, \boldsymbol{E})$. Insgesamt führt es zusammen mit (a) und Σ-$\Box\Diamond$-Regel zur folgenden Beweisstruktur:

$$(R2) \quad \frac{\begin{array}{c}\Box\bar{A} \qquad \Diamond\bar{Q}\\ \diagdown \quad \diagup\\ \Diamond(C_1, \bar{Q}, \boldsymbol{E})\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Box\bar{A}\\ \mid\\ \Box C_2\end{array}}{\Diamond(C_1, B, \bar{Q}, \boldsymbol{E})}$$

Sei nun $\boldsymbol{F} = (C_1, \boldsymbol{E})$, dann lässt sich $\Diamond(C_1, B, \bar{Q}, \boldsymbol{E})$ als $\Diamond(B, \bar{Q}, \boldsymbol{F})$ schreiben.

(2) C_2 hängt von mindestens einem der Q_j aus $\bar{Q}$ ab. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\Box\bar{A}, \Diamond\bar{Q} \vdash \Diamond(C_1, \bar{Q}, \boldsymbol{E}) \tag{b}$$

Der Beweis $\bar{A}, \bar{Q} \vdash C_2$ kann geschrieben werden als $\bar{A}, \bar{Q}, C_1, \boldsymbol{E} \vdash C_2$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung ergibt das:

$$\Box\bar{A}, \Diamond(C_1, \bar{Q}, \boldsymbol{E}) \vdash \Diamond(C_2, C_1, \bar{Q}, \boldsymbol{F}) \qquad \text{für ein } \boldsymbol{F} \tag{c}$$

Aus (b), (c) und der Γ-◊-Regel folgt folgende Beweisstruktur:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=-]
\Box\bar{A} \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\text{(b)}" below] & & \Diamond\bar{Q} \arrow[dl] & \\
& \Diamond(C_1,\bar{Q},\boldsymbol{E}) \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\text{(c)}" below] & & \Box\bar{A} \arrow[dl] \\
& & \Diamond(C_1,C_2,\bar{Q},\boldsymbol{F}) &
\end{tikzcd}
$$

$$
(R1)\quad \frac{\Diamond(C_1,C_2,\bar{Q},\boldsymbol{F})}{\Diamond(B,C_1,C_2,\bar{Q},\boldsymbol{F})}
$$

Sei $\boldsymbol{G} = (C_1,C_2,\boldsymbol{F})$, dann hat $\Diamond(B,\bar{Q},\boldsymbol{G})$ die gewünschte Form.

Fall 2: Die zuletzt angewandte Regel war (R1). In diesem Fall hat der Beweis für B folgende Form:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=-]
\bar{A} \arrow[dr] & & \bar{Q} \arrow[dl] \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

$$
\frac{C}{B} \qquad \text{mit} \quad \Gamma(C) \Rightarrow B
$$

Hierbei muss C von mindestens einem Q_j abhängen. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $\Box\bar{A},\Diamond\bar{Q} \vdash \Diamond(C,\bar{Q},\boldsymbol{E})$. Zusammen mit der Γ-◊-Regel folgt dann folgende Beweisstruktur:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=-]
\Box\bar{A} \arrow[dr] & & \Diamond\bar{Q} \arrow[dl] \\
& \Diamond(C,\bar{Q},\boldsymbol{E}) &
\end{tikzcd}
$$

$$
(R1)\quad \frac{\Diamond(C,\bar{Q},\boldsymbol{E})}{\Diamond(B,C,\bar{Q},\boldsymbol{E})}
$$

Sei $\boldsymbol{H} = (C,\boldsymbol{E})$, dann hat $\Diamond(B,\bar{Q},\boldsymbol{H})$ die gewünschte Form.

Sei nun $B = \bot$. Der Beweis ist analog, wobei die Vereinfachung $\Diamond(\bot,\boldsymbol{E}) \approx \bot$ verwendet wird.

□

Korollar 6

(i) Aus $A_1,\ldots,A_n,Q_1,\ldots,Q_r \vdash_{\mathsf{RK}} \bot$ *mit* $(r \geq 1)$ *folgt* $\Box A_1,\ldots,\Box A_n,\Box Q_1,\ldots,\Box Q_r \vdash_{\mathsf{RK}} \bot$.

(ii) Sei $\boldsymbol{S}$ *eine Klauselmenge.* $\boldsymbol{S}$ *ist widerlegbar, wenn eine der* K*-Projektionen* $\boldsymbol{S}_i$ *widerlegbar ist.*

Beweis. (i) *Fall 1*: $\bar{A} \vdash \bot$. Dann gilt $\Box\bar{A} \vdash \Box\bot$. Unter Verwendung des Axioms (A2), folgt $\Sigma(\Box\bot,\Diamond\bar{Q}) \to \Diamond\bot$ was sich zu $\Sigma(\Box\bot,\Diamond\bar{Q}) \Rightarrow \bot$ vereinfachen lässt.

Insgesamt folgt also $\Box\bar{A},\Box\bar{Q} \vdash \bot$.

Fall 2: Der Beweis von $\bot$ hängt von $\bar{Q}$ ab. In diesem Fall wird Lemma 5 angewandt.

(ii) ergibt sich direkt aus (i). □

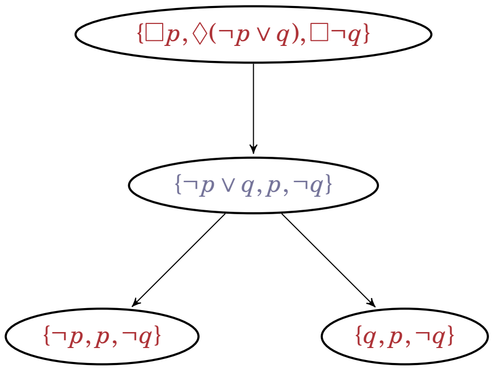


Abb. 4.4: Baum mit abgeschlossener Wurzel gemäß Beispiel in Abschnitt 4.3.2. Wieder sind „Typ 1“-Knoten blau und die „Typ 2“-Knoten rot markiert. Die umrundeten Knoten sind abgeschlossen.

Lemma 7 *In einem* K*-Baum ist jeder abgeschlossene Knoten widerlegbar.*

Beweis. Induktion über die Tiefe des betrachteten Knotens u.

- Wenn $d(u) = 0$, dann ist u ein Blatt und für ein Atom p gilt $p, \neg p \in u$. Aus dem Axiom (A1) folgt, dass u widerlegbar ist.
- Angenommen, die Annahme gilt für alle u' mit $d(u') < n$ und $d(u) = n$. Wenn u ein „Typ 2“-Knoten ist, dann sind die Kinder von u Projektionen. Die Aussage folgt dann aus dem Korollar 6 und der Induktionsvoraussetzung.
- Wenn u ein „Typ-1“-Knoten ist, dann hat u die Kinder

  $$u_1 = u - \{C\} \cup \{C_1\} \quad \text{und} \quad u_2 = u - \{C\} \cup \{C_2\} \quad \text{für ein} \quad C = C_1 \vee C_2$$

  Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es die Widerlegungen r_1 für u_1 sowie r_2 für u_2. Die Widerlegung r_1 wird zur Deduktion für C_2 modifiziert. Hierbei wird die Vereinfachungsregel (S4) verwendet. Anschließend wird mit r_2 die Widerlegung für u gezeigt.

□

Beweis vom Satz 3. Angenommen die Klauselmenge $\boldsymbol{S}$ ist unerfüllbar. Aus dem Lemma 4 folgt, dass der dazugehörige K-Baum abgeschlossen sein muss. Aus dem Lemma 7 folgt dann, dass die abgeschlossene Wurzel des Baumes RK-widerlegbar ist. □

4.3.2 Beispiel für einen Baum mit abgeschlossener Wurzel

Sei $\boldsymbol{S} = \{\Box p, \Diamond(\neg p \vee q), \Box\neg q\}$. Die Abbildung 4.4 stellt den dazugehörigen K-Baum dar. Die Wurzel des Baumes ist abgeschlossen, somit muss $\boldsymbol{S}$ widerlegbar sein. Mittels Σ-$\vee$- und Σ-$\Box\Diamond$-Regeln folgt:

$$\cfrac{\cfrac{\Sigma(p, \neg p) \to \bot}{\Sigma(p, \neg p \vee q) \to \bot \vee q}\,(\vee)}{\Sigma(\Box p, \Diamond(\neg p \vee q)) \to \Diamond(\neg p \vee q, \bot \vee q)}\,(\Box\Diamond)$$

Mit der Vereinfachung

$$\Diamond(\neg p \vee q, \bot \vee q) \approx \Diamond(\neg p \vee q, q)$$

folgt also

$$\Sigma(\Box p, \Diamond(\neg p \vee q)) \Rightarrow \Diamond(\neg p \vee q, q).$$

Auf die gleiche Weise folgt mittels der Σ-$\Box\Diamond$-Regel

$$\frac{\Sigma(q,\neg q) \to \bot}{\Sigma(\Diamond(\neg p \vee q, q), \Box\neg q) \to \Diamond(q, \bot, \neg p \vee q)}\ (\Box\Diamond).$$

Mit den Vereinfachungen

$$\Diamond(q, \bot, \neg p \vee q) \approx \Diamond\bot \approx \bot$$

folgt insgesamt

$$\Sigma(\Diamond(\neg p \vee q, q), \Box\neg q) \Rightarrow \bot.$$

Die Widerlegung von $\{\Box p, \Diamond(\neg p \vee q), \Box\neg q\}$ erfolgt also in zwei (R2) Schritten:

$$\cfrac{\cfrac{\Box p \qquad \Diamond(\neg p \vee q)}{\Diamond(\neg p \vee q, q)} \qquad \Box\neg q}{\bot}$$

Die Widerlegung der Klauselmenge $\boldsymbol{S}' = \{\Diamond(\Box p, \Diamond(\neg p \vee q), \Box\neg q)\}$ erfolgt in zwei (R1) Schritten:

$$\Gamma(\Diamond(\Box p, \Diamond(\neg p \vee q), \Box\neg q)) \Rightarrow \Diamond(\Box p, \Diamond(\neg p \vee q), \Diamond(\neg p \vee q, q), \Box\neg q)$$

und

$$\Gamma(\Diamond(\Box p, \Diamond(\neg p \vee q), \Diamond(\neg p \vee q, q), \Box\neg q)) \Rightarrow \bot.$$

Hierbei wurden die Γ-$\Diamond 1$-Regel und die Vereinfachungsregeln verwendet.

5 Resolution für D-Rahmen

Das System **D**[1] (gelegentlich „**Q**") ist eine Erweiterung des Systems **K** um das folgende Axiom

$$\Box\varphi \to \Diamond\varphi.$$

Das Axiom besagt, dass wenn φ in allen Nachfolgewelten einer Welt w gelten soll, so gibt es auch mindestens eine Welt die aus w erreichbar ist. Dies ist, zur Erinnerung, andernfalls keineswegs gefordert, da $\Box\varphi$ auch in Abwesenheit aller Nachbarwelten erfüllt ist. Das System **D** ist die Klasse aller Rahmen ohne „Sackgassen", wobei zu bemerken ist, dass eine Schleife zu w selbst eine entsprechende Nachbarwelt bereitstellt, sofern φ in w erfüllt ist.

5.1 Das System R**D**

Das oben genannte Axiom wird durch eine weitere Vereinfachungsregel im System R**D** berücksichtigt.

Definition (Das System R**D**) *Das System* R**D** *besteht aus dem System* R**K**, *ergänzt durch die Vereinfachungsregel*

$$S_{\mathbf{D}} : \Box\bot \approx \bot$$

Satz 8 *Das System* R**D** *ist konsistent relativ zu* **D**.

Präziser formuliert muss in dem Satz 2 jedes Vorkommen von **K** durch **D** und jedes Vorkommen von R**K** durch R**D** ersetzt werden. Insbesondere gilt, dass aus $\boldsymbol{S} \vdash_{\mathsf{RD}} C$ folgt $\vdash_{\mathbf{D}} \boldsymbol{S} \to C$.

Ein Modell, dessen Relation R seriell ist, wird im folgenden **D**-Modell genannt.

Satz 9 (Vollständigkeit von R**D**) *Eine Menge von Klauseln* $\boldsymbol{S}$ *ist genau dann* R**D**-*widerlegbar, wenn sie* **D**-*unerfüllbar ist.*

Der Algorithmus 2 zur Konstruktion des **D**-*Baums* unterscheidet sich vom Algorthmus 1 in der Berechnung der Projektionen.

Die Abbruchbedingung ist in diesem Fall erreicht, wenn für jedes Blatt u gilt: u ist eine Menge von Einheitsklauseln und ein Atom p sowie $\neg p$ sind in u, oder alle Klauseln in u sind frei von modalen Operatoren.

Lemma 10 *Sei* $\boldsymbol{S}$ *eine Menge von Klauseln. Wenn der* **D**-*Baum von* $\boldsymbol{S}$ *nicht abgeschlossen ist, dann hat* $\boldsymbol{S}$ *ein* **D**-*Modell.*

Beweis. Die Konstruktion des Modells ist zunächst wie im Beweis zum Lemma 4. Anschließend wird jedem Blatt $|u|$ eine Kante zu sich selbst hinzugefügt. Mit anderen Worten gilt $|u|R|u|$ für die Blätter des **D**-Baums. Auf diese Weise entsteht ein **D**-Modell M.

[1] **D** steht für „deontisch" (altgr. *δέον*, das Gebotene). In diesem Kontext wird $\Box p$ als „p ist verpflichtend" und $\Diamond p$ als „p ist erlaubt" interpretiert.

Algorithmus 2 : Konstruktion des D-Baums

Eingabe : Klauselmenge $\boldsymbol{S}$
Ausgabe : Ein Baum $G = (V, E)$ (D-Baum für $\boldsymbol{S}$)

Setze die Wurzel von G auf $\boldsymbol{S}$
solange möglich tue
  solange möglich tue
    wähle ein Blatt $u \in V$ mit einer Klausel der Form $C = C_1 \vee C_2$
    markiere u als „Typ 1“
    füge zwei Kinder zu u hinzu:
    $u_1 := u - \{C\} \cup \{C_1\}$ und $u_2 := u - \{C\} \cup \{C_2\}$
  `// An dieser Stelle ist jedes Blatt eine Menge von Einheitsklauseln`
  für jedes *Blatt* $u \in V$ **tue**
    wenn nicht $(p, \neg p) \in u$ *für ein Atom* p **dann**
      `//` u `ist eine Menge von Einheitsklauseln`
      `//` $u = L_1, \ldots, L_m, \Box A_1, \ldots, \Box A_n, \Diamond P_1, \ldots, \Diamond P_q$
      wenn $q = 0$ **dann**
        $u_1 := A_1, \ldots, A_n$
        füge u_1 als Kind von u hinzu
      sonst
        für $i := 1$ **bis** q **tue**
          $u_i := P_i, A_1, \ldots, A_n$
          füge u_i als Kind von u hinzu
markiere alle unmarkierten Knoten als „Typ 2“

Da in jedem nicht abgeschlossenen Knoten keine Klauseln mit modalen Operatoren vorhanden sind gilt: Für jeden Knoten u im D-Baum und jede Klausel $A \in u$ gilt $M, |u| \models A$. □

Das Lemma 11 ist entsprechende Version des Korollars 6.

Lemma 11

(i) Aus $A_1, \ldots, A_n, Q_1, \ldots, Q_r \vdash_{\mathsf{RD}} \bot$ *mit* $(r \geq 0)$ *folgt* $\Box A_1, \ldots, \Box A_n, \Diamond Q_1, \ldots, \Diamond Q_r \vdash_{\mathsf{RD}} \bot$.

(ii) Sei $\boldsymbol{S}$ *eine Klauselmenge.* $\boldsymbol{S}$ *ist widerlegbar wenn eine der* D*-Projektionen* $\boldsymbol{S}_i$ *widerlegbar ist.*

Beweis. (i): Der einzige neue Fall ist $r = 0$. Mit derselben Argumentation wie im Lemma 5(i) und unter Verwendung der Vereinfachungsregel $S_{\mathsf{D}} : \Box\bot \approx \bot$ folgt $\Box A_1, \ldots, \Box A_n \vdash_{\mathsf{RD}} \bot$.

(ii): folgt direkt aus (i). □

5.2 Beispiel einer RD-Widerlegung

Sei $\boldsymbol{S} = \{\Box(p \vee q), \Box\neg p, \Box\neg q\}$. Mittels Σ-$\vee$- und Σ-$\Box\Box$-Regeln folgt:

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma(p, \neg p) \to \bot}{\Sigma(p \vee q, \neg p) \to \bot \vee q}\,(\vee)}{\Sigma(\Box(p \vee q), \Box\neg p) \to \Box(\bot \vee q)}\,(\Box\Box)$$

Anschließend lässt sich $\Box(\bot \vee q)$ zu $\Box q$ vereinfachen.

Weiterhin gilt:

$$\frac{\Sigma(q, \neg q) \to \bot}{\Sigma(\Box q, \Box\neg q) \to \Box\bot}\ (\Box\Box).$$

Mit der Vereinfachung $\Box\bot \approx \bot$ folgt dann die Widerlegung in D.

Bemerkung *Die Klauselmenge $\boldsymbol{S}$ ist jedoch nicht widerlegbar in K. Ein K-Modell, das auf einem Rahmen mit nur einer Welt w_0 und ohne eine Kante von w_0 zu sich selbst basiert, erfüllt $\boldsymbol{S}$.*

6 Resolution für T-Rahmen

In diesem Kapitel wird das System D zum System T (gelegentlich „M“ oder „KT“) erweitert. Das spezifische Axiom für T ist $\Box\varphi \to \varphi$. Das Axiom wird „Axiom der Notwendigkeit“ genannt [HC96] und kann umformuliert werden zu $\varphi \to \Diamond\varphi$. Dieses Axiom besagt: Wenn φ in einer Welt w gilt, dann gibt es auch mindestens eine Welt, die w bekannt ist und φ erfüllt (w selbst). Es fordert somit die Reflexivität der Bekanntschaftsrelation in Rahmen.

Um das Resolutionssystem RT zu erhalten wird das Resolutionssystem RD um eine Regel zur Berechnung der Resolvente erweitert.

6.1 Das System RT

Definition (Das System RT) *Das System* RT *ist das System* RD *zusammen mit folgender Regel zur Berechnung der Resolvente:*

$$\mathsf{T}\text{-}\mathit{Regel:}\ \frac{\Sigma(A,B) \to C}{\Sigma(\Box A,B) \to C}\ (\mathsf{T})$$

Satz 12 *Das System* RT *ist konsistent relativ zu* T*, das heißt, der Satz 2 gilt mit* RT *anstatt* RK *und* T *anstelle von* K.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass die neue T-Regel gültig ist. Mit anderen Worten muss aus $\vdash_{\mathsf{T}} A \wedge B \to C$ folgen $\vdash_{\mathsf{T}} \Box A \wedge B \to C$. Dies ist aufgrund der Reflexivität gegeben:

$$\vdash_{\mathsf{T}} \Box A \wedge B \to A \wedge B \to C$$

□

Ein Modell mit reflexiver Relation R wird T-*Modell* genannt. Eine Klauselmenge $\boldsymbol{S}$ ist T-*unerfüllbar*, wenn es kein T-Modell für $\boldsymbol{S}$ gibt.

Satz 13 (Vollständigkeit von RT) *Eine Klauselmenge* $\boldsymbol{S}$ *ist* RT*-Widerlegbar, wenn sie* T*-unerfüllbar ist.*

Um den Satz 13 zu beweisen, wird erneut der Beweis der Vollständigkeit des RK-Systems modifiziert.

Der Algorithmus für die Berechnung des **T**-*Baums* entsteht durch Erweiterung von Algorithmus 2. Hierbei können Klauseln *markiert* oder *unmarkiert* sein. Alle Klauseln, die nicht explizit markiert wurden, gelten als unmarkiert.

Algorithmus 3 : Konstruktion des **T**-Baums

Eingabe : Klauselmenge $\boldsymbol{S}$
Ausgabe : Ein Baum $G = (V, E)$ (**T**-Baum für $\boldsymbol{S}$)

1 Setze die Wurzel von G auf $\boldsymbol{S}$
2 **solange möglich tue**
3   **solange möglich tue**
4   wähle ein Blatt $u \in V$ und eine unmarkierte Klausel $C \in u$, sodass $C = C_1 \vee C_2$ oder $C = \Box C_1$
5   markiere u als „Typ 1“
6   **wenn** $C = C_1 \vee C_2$ **dann**
7   füge zwei Kinder zu u hinzu:
8             $u_1 := u - \{C\} \cup \{C_1\}$ und $u_2 := u - \{C\} \cup \{C_2\}$
9   **wenn** $C = \Box C_1$ **dann**
10             $u_1 = u \cup \{C_1\}$
11   markiere C in u_1
12   füge u_1 als Kind von u hinzu
13   setze die Markierungen der Klauseln zurück
    `// An dieser Stelle ist jedes Blatt eine Menge von Einheitsklauseln`
14   **für jedes** *Blatt* $u \in V$ **tue**
15   **wenn nicht** $(p, \neg p) \in u$ *für ein Atom* p **dann**
            `//` u `ist eine Menge von Einheitsklauseln`
            `//` $u = L_1, \ldots, L_m, \Box A_1, \ldots \Box A_n, \Diamond P_1, \ldots, \Diamond P_q$
16   **wenn** $q = 0$ **dann**
17                 $u_1 := A_1, \ldots, A_n$
18   füge u_1 als Kind von u hinzu
19   **sonst**
20   **für** *i := 1* **bis** q **tue**
21                     $u_i := P_i, A_1, \ldots, A_n$
22   füge u_i als Kind von u hinzu
23 markiere alle unmarkierten Knoten als „Typ 2“

Lemma 14 *Eine Klauselmenge* $\boldsymbol{S}$ *mit nicht abgeschlossenem* **T**-*Baum hat ein* **T**-*Modell.*

Beweis. Zunächst wird ein Modell $M_0 = ((W, R_0), V)$ wie im Beweis zum Lemma 4 konstruiert. Das gesuchte **T**-Modell ist $M = ((W, R), V)$, wobei R reflexive Hülle von R_0 ist.

Mittels Induktion über die Länge von A folgt, dass für alle $|u| \in W$ und alle $A \in |u|$ gilt: $M, |u| \models A$.

Der einzige neue Fall im Vergleich zur Behauptung in Lemma 4 ist, dass wenn $\Box B \in u$ gilt, dann muss es ein $u' \in |u|$ geben, sodass $B \in u'$. Hierfür sorgt aber die Schleife, die in Zeile 3 definiert wird. $\Box$

Lemma 15 *Wie Lemma 5, wobei* **K** *durch* **T** *und* R**K** *durch* R**T** *ersetzt werden.*

Korollar 16 *Wie Korollar 6, wobei auch hier* **K** *durch* **T** *und* R**K** *durch* R**T** *ersetzt werden.*

Die Beweise entsprechen den Beweisen zum Lemma 5 und Korollar 6, dabei wird K durch T und RK durch RT ersetzt.

Lemma 17 *Wenn $\Box C \in \boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S} \cup \{C\}$ ist widerlegbar, so ist auch $\boldsymbol{S}$ widerlegbar.*

Beweis. Die von C abhängige Widerlegung von $\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S} \cup \{C\}$ wird wie folgt modifiziert. Zunächst werden alle Sequenzen von (R1)-Regeln, die mit der Klausel C beginnen und jeweils in irgendeiner Klausel D enden, betrachtet. Mittels der Γ-$\Box$-Regel werden diese Sequenzen in Sequenzen, die von $\Box C$ nach $\Box D$ führen, abgeändert. Wenn $D = \bot$ ist, dann folgt mittels der Vereinfachungsregel S_{D} die gewünschte Widerlegung. Anderenfalls kommt D als Prämisse in einer (R2)-Regel vor:

$$\frac{D \qquad D'}{D''} \quad \text{mit } \Sigma(D, D') \to D''$$

In diesem Fall folgt mittels der T-Regel: $\Sigma(\Box D, D') \to D''$. Anschließend kann mit dem verbleibenden Rest der Widerlegung für $\boldsymbol{S}'$ fortgefahren werden. $\Box$

Schließlich folgt die Analogie zum Lemma 7:

Lemma 18 *In einem T-Baum ist jeder abgeschlossene Knoten RT-widerlegbar.*

Beweis. Der Beweis entspricht dem für Lemma 7. Der einzig neue Fall ist, dass u ein „Typ 1"-Knoten ist, wobei $\Box C \in u$ und $u = u \cup \{C\}$. An dieser Stelle wird das Lemma 17 angewandt. $\Box$

Der Beweis vom Lemma 18 vervollständigt den Beweis für die Vollständigkeit des Systems RT.

7 Resolution für S4-Rahmen

In diesem Kapitel wird das System **T** zum System **S4** erweitert. Das charakteristische Axiom für **S4** ist $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$. Das Axiom kann zur leichteren Anschauung umgeformt werden zu $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$. Alle Welten, die aus einer Welt w in zwei Schritten erreicht werden können, können auch in einem Schritt erreicht werden. Bei **S4** handelt es sich um die Klasse reflexiver und transitiver Rahmen.

7.1 Das System R**S4**

Definition (Das System R**S4**) *Das System* R**S4** *ist das System* R**T**, *wobei die* Σ-$\Box\Diamond$-*Regel durch folgende Regel ersetzt wird:*

$$\textbf{S4}\Box\Diamond\text{-}\mathit{Regel:}\ \frac{\Sigma(\Box A, B) \to C}{\Sigma(\Box A, \Diamond(B, \boldsymbol{E})) \to \Diamond(B, C, \boldsymbol{E})}\ (\textbf{S4}\Box\Diamond)$$

und die Σ-$\Box\Box$-*Regel durch die folgende Regel ersetzt wird:*

$$\textbf{S4}\Box\Box\text{-}\mathit{Regel:}\ \frac{\Sigma(\Box A, B) \to C}{\Sigma(\Box A, \Box B) \to \Box C}\ (\textbf{S4}\Box\Box).$$

Satz 19 *Das System* R**S4** *ist konsistent relativ zu* **S4**. *Mit anderen Worten gilt der Satz 2 mit* R**S4** *anstatt von* R**K** *und* **S4** *anstelle von* **K**.

Beweis. Zu zeigen ist, dass die neuen $\Box\Diamond$- und $\Box\Box$-Regeln gültig sind. Für die $\Box\Diamond$-Regel bedeutet dies, dass wenn $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box A \wedge B \to C$ gilt, dann muss auch $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box A \wedge \Diamond(B \wedge \boldsymbol{E}) \to \Diamond(B \wedge C \wedge \boldsymbol{E})$ gelten. Dies ist aufgrund der Transitivität korrekt:

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box A \wedge \Diamond(B \wedge \boldsymbol{E}) &\to \Box\Box A \wedge \Diamond(B \wedge \boldsymbol{E}) \\ &\to \Diamond(\Box A \wedge B \wedge \boldsymbol{E}) \\ &\to \Diamond(B \wedge C \wedge \boldsymbol{E}) \end{aligned}$$

Im Falle der $\Box\Box$-Regel muss also gelten, dass aus $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box A \wedge B \to C$ folgt $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box A \wedge \Box B \to \Box C$. Dies ist gültig, denn:

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box A \wedge \Box B &\to \Box\Box A \wedge \Box B \\ &\to \Box(\Box A \wedge B) \\ &\to \Box C \end{aligned}$$

□

Jedes Modell mit reflexiver und transitiver Relation R wird **S4**-*Modell* genannt.

Satz 20 (Vollständigkeit von R**S4**) *Eine Klauselmenge* $\boldsymbol{S}$ *ist* R**S4**-*Widerlegbar, wenn sie* R**S4**-*unerfüllbar ist.*

Um den Satz 20 zu beweisen werden dieselben Schritte vollzogen wie in vorherigen Kapiteln.

Der Algorithmus für die Berechnung des **S4**-*Baums* basiert auf dem Algorithmus für den **T**-*Baum*. Wieder einmal können Klauseln markiert oder unmarkiert sein, wobei alle Klauseln die nicht explizit markiert wurden, als unmarkiert gelten.

Algorithmus 4 : Konstruktion des **S4**-Baums

Eingabe : Klauselmenge $\boldsymbol{S}$
Ausgabe : Ein Baum $G = (V, E)$ (**S4**-Baum für $\boldsymbol{S}$)

Setze die Wurzel von G auf $\boldsymbol{S}$
solange möglich tue
    solange möglich tue
        wähle ein Blatt $u \in V$ und eine unmarkierte Klausel $C \in u$, sodass $C = C_1 \vee C_2$ oder $C = \Box C_1$
        markiere u als „Typ 1“
        wenn $C = C_1 \vee C_2$ **dann**
            füge zwei Kinder zu u hinzu:
            $u_1 := u - \{C\} \cup \{C_1\}$ und $u_2 := u - \{C\} \cup \{C_2\}$
        wenn $C = \Box C_1$ **dann**
            $u_1 = u \cup \{C_1\}$
            markiere C in u_1
            füge u_1 als Kind von u hinzu
    setze die Markierungen der Klauseln zurück
    `// An dieser Stelle ist jedes Blatt eine Menge von Einheitsklauseln`
    für jedes *Blatt* $u \in V$ **tue**
        wenn nicht $(p, \neg p) \in u$ *für ein Atom* p **und**
                nicht *es existiert ein Vorgänger* u' *mit* $u \subseteq u'$ **dann**
            `// ` u ` ist eine Menge von Einheitsklauseln`
            `// ` $u = L_1, \dots, L_m, \Box A_1, \dots \Box A_n, \Diamond P_1, \dots, \Diamond P_q$
            für i := *1* **bis** q **tue**
                $u_i := P_i, \Box A_1, \dots, \Box A_n$
                füge u_i als Kind von u hinzu
markiere alle unmarkierten Knoten als „Typ 2“

Die Abbruchbedingung ist in diesem Fall erreicht, wenn für jedes Blatt u gilt: u ist eine Menge von Einheitsklauseln und:

- ein Atom p sowie $\neg p$ sind in u, oder
- u ist eine Teilmenge eines „Typ 2“-Vorgängerknotens, oder
- in u gibt es keine Klausel der Form $\Diamond P$.

Der Algorithmus terminiert, da die modale Tiefe aller Knoten kleiner oder gleich der modalen Tiefe von $\boldsymbol{S}$ ist.

Lemma 21 *Eine Klauselmenge* $\boldsymbol{S}$ *mit nicht abgeschlossenem* **S4**-*Baum hat ein* **S4**-*Modell.*

Beweis. Zunächst wird wieder ein Modell $M_0 = ((W_0, R_0), V)$ wie im Beweis zum Lemma 4 konstruiert. Um M_0 in ein **S4**-Modell $M = ((W, R), V)$ umzuwandeln, werden folgende zwei Schritte nacheinander ausgeführt:

1. Für alle Welten $w \in W_0$ aus denen keine weiteren Welten erreichbar sind und für die es eine Vorgängerwelt w' mit $w \subseteq w'$ gibt: w und w' werden zusammengefasst zu einer Welt. Dann ist W die Menge der daraus resultierenden Welten.

2. Sei R'_0 die Relation auf W, die nach dem ersten Schritt entsteht. Die gesuchte Relation R ist dann die reflexiv-transitive Hülle von R'_0.

Nun gilt wieder folgende Behauptung:

Behauptung *Für jeden Knoten w und jede Klausel A in w gilt $M,|w| \models A$.*

Der einzige Fall, der erneut untersucht werden muss, ist $A = \Box B$. Dieses Resultat folgt daraus: Wenn $\Box B \in w$, so gibt es einen Knoten w' in $|w|$ sodass $B \in w'$ und für alle Nachfolger w' von w gilt $\Box B \in w'$. □

Der Rest des Beweises der Vollständigkeit ist ähnlich zu dem Beweis für die Vollständigkeit des **RT**-Systems. Der einzig entscheidende Unterschied ist das folgende Lemma.

Lemma 22 *Sei $\boldsymbol{S}$ eine Klauselmenge. Wenn eine der* **S4***-Projektionen von $\boldsymbol{S}$* **S4***-widerlegbar ist, so ist auch $\boldsymbol{S}$ selbst* **S4***-widerlegbar.*

Der Beweis verläuft analog zu dem von Lemma 5 unter Verwendung des folgenden Lemmas:

Lemma 23 *Seien A_i, B und Q_j Klauseln.*

(i) Aus $\Box A_1,\dots,\Box A_n \vdash_{\mathsf{RS4}} B$ folgt:

- *$B = \Box B'$ für ein B', oder*
- *$B = \bot$, oder*
- *$\Box A_1,\dots,\Box A_n \vdash_{\mathsf{RS4}} \Box B$.*

(ii) Wenn $\Box A_1,\dots,\Box A_n,Q_1,\dots,Q_r \vdash_{\mathsf{RS4}} B$ und B hängt von irgendeinem Q_j in dem Beweis ab, dann gilt:

- *$\Box A_1,\dots\Box A_n,\Diamond(Q_1,\dots,Q_r) \vdash_{\mathsf{RS4}} \Diamond(B,Q_1,\dots,Q_r,\boldsymbol{E})$, für eine Klauselmenge $\boldsymbol{E}$, falls $B \neq \bot$*
- *$\Box A_1,\dots\Box A_n,\Diamond(Q_1,\dots,Q_r) \vdash_{\mathsf{RS4}} \bot$, sonst.*

Beweis. (i): Erneut Induktion über den Beweis für B. Angenommen $B \neq \bot$. Wenn B unter den A_i ist, so folgt die Aussage direkt. Für den Fall, in dem die zuletzt angewandte Regel (R1) war, also $\frac{C}{B}$, gilt, dass entweder $C = \Box C'$ und $B = \Box B'$ oder es nach der Induktionsvoraussetzung einen Beweis von $\Box C$ gibt. In diesem Fall kann dann $\Box B$ mittels (R1) gefolgert werden.

Falls die letzte angewandte Regel (R2) war, also $\dfrac{B_1 \quad B_2}{B}$ mit $\Sigma(B_1,B_2) \Rightarrow B$, dann gibt es zwei Fälle, die zu unterscheiden sind:

Fall 1: $B_1 = \Box B'_1$ und $B_2 = \Box B'_2$. Damit $\Sigma(B_1,B_2) \Rightarrow B$ gilt, muss die zuletzt verwendete Σ-Regel entweder Σ-□□-Regel und damit $B = \Box B'$ sein, oder es handelt sich um die **T**-Regel:

$$\frac{\Sigma(B'_1,\Box B'_2) \to B'}{\Sigma(\Box B'_1,\Box B'_2) \to B'} \quad \text{mit } B' \approx B$$

In diesem Fall kann die **T**-Regel durch die Σ-□□-Regel ersetzt werden. Das Ergebnis ist $\Sigma(B'_1,B'_2) \to \Box B' \approx \Box B$.

Fall 2: Mindestens eins der B'_i ist nicht von der Form $\Box B'_i$. Nach der IV gibt es dann jedoch den Beweis bzw. die Beweise für $\Box B'_i$. Den Beweis für $\Box B$ erhält man dann durch die entsprechende Kombination der □□- und der **T**-Regel.

(ii): Der Induktionsbeweis ist wie beim Lemma 5(ii) mit Ausnahme der Situation, dass der Beweis von B wie folgt ist:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \Box\bar{A} \quad\quad \bar{Q} & & \Box\bar{A} \\
 & \diagdown \quad \diagup & & \vert \\
(R2) & \multicolumn{3}{c}{\dfrac{C_1 \qquad\qquad\qquad C_2}{B}}
\end{array}
$$

In diesem Fall kann mittels (i) angenommen werden, dass $C_2 = \Box C_2'$. Außerdem gilt nach IV $\Box\bar{A}\Diamond\bar{\boldsymbol{Q}} \vdash \Diamond(C_1, \bar{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{E})$. Mittels **S4**-$\Box\Diamond$-Regel folgt dann:

$$
\frac{\Sigma(C_1, \Box C_2') \Rightarrow B}{\Sigma(\Diamond(C_1, \bar{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{E}), \Box C_2') \Rightarrow \Diamond(B, C_1, \bar{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{E})}\ (\mathbf{S4}\Box\Diamond)
$$

Somit gilt $\Box\bar{A}, \Diamond\bar{\boldsymbol{Q}} \vdash \Diamond(B, C_1, \bar{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{E})$. Der Rest des Beweises ist wie bei R**D**. $\Box$

Der Beweis des Satzes 20 ist entsprechend dem Beweis für den Satz 13 des Systems R**T** unter der Verwendung der Lemmata 21 und 22.

8 Resolution für B-Rahmen

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Resolution vom System **T** auf das System **B**[1] erweitert. Das charakteristische Axiom für **B** ist $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$. Von einer Welt w aus, in der φ gilt, sehen alle Nachbarwelten eine Welt, in der φ gilt – w. Die Rahmen sind somit *symmetrisch*, weiterhin wird mit den Axiomen aus **T** die Eigenschaft der Reflexivität übernommen [HC96].

8.1 Das System R**B**

Definition (Das System R**B**) *Das System* R**B** *ist das System* R**T** *zusammen mit folgender Regel zur Berechnung der Resolvente:*

$$\textbf{KB}\text{-}\textit{Regel:}\ \frac{\Sigma(A,B) \to C}{\Sigma(\Diamond(\Box A,\boldsymbol{E}),B) \to C}\ (\textbf{KB})$$

Satz 24 *Das System* R**B** *ist konsistent relativ zu* **B**. *Mit anderen Worten gilt der Satz 2 mit* R**B** *anstelle von* R**K** *und* **B** *anstelle von* **K**.

Beweis. Zu zeigen ist, dass die neue Regel gültig ist. Es muss also gelten: aus $\vdash_{\mathbf{B}} A \wedge B \to C$ folgt $\vdash_{\mathbf{B}} \Diamond(\Box A,\boldsymbol{E}) \wedge B \to C$. Aufgrund der Symmetrie kann die Welt, die man mit $\Diamond$ erreichen kann, auch die ursprüngliche Welt sehen. Es gilt also:

$$\vdash_{\mathbf{B}} \Diamond(\Box A,\boldsymbol{E}) \wedge B \to A \wedge B \to C$$

□

Jedes Modell mit reflexiver und symmetrischer Relation R wird **B**-*Modell* genannt.

Satz 25 (Vollständigkeit von R**B**) *Eine Klauselmenge* $\boldsymbol{S}$ *ist* R**B**-*widerlegbar, wenn sie* R**B**-*unerfüllbar ist.*

Der Beweis ist dem Beweis für das System R**T** ähnlich. Der Algorithmus für die Berechnung des **B**-*Baums* basiert auf dem Algorithmus für den **T**-*Baum*. Wieder können Klauseln markiert oder unmarkiert sein, wobei alle Klauseln, die nicht explizit markiert wurden, als unmarkiert gelten.

[1] Benannt nach dem Mathematiker Luitzen E. J. Brouwer

Algorithmus 5 : Konstruktion des **B**-Baums

```
   Eingabe : Klauselmenge S
   Ausgabe : Ein Baum G = (V,E) (B-Baum für S)
1  Setze die Wurzel von G auf S
2  solange möglich tue
3      solange möglich tue
4          wähle ein Blatt u ∈ V und eine unmarkierte Klausel C ∈ u,
           sodass C = C1 ∨ C2 oder C = □C1
5          markiere u als „Typ 1“
6          wenn C = C1 ∨ C2 dann
7              füge zwei Kinder zu u hinzu:
8              u1 := u − {C} ∪ {C1} und u2 := u − {C} ∪ {C2}
9          wenn C = □C1 dann
10             u1 = u ∪ {C1}
11             markiere C in u1
12             füge u1 als Kind von u hinzu
13     setze die Markierungen der Klauseln zurück
       // An dieser Stelle ist jedes Blatt eine Menge von Einheitsklauseln
14     für jedes Blatt u ∈ V tue
15         wenn nicht (p,¬p) ∈ u für ein Atom p dann
               // u ist eine Menge von Einheitsklauseln
               // u = L1,...,Lm,□A1,...□An,◊P1,...,◊Pq
16             wenn q = 0 dann
17                 u1 := A1,...,An
18                 füge u1 als Kind von u hinzu
19             sonst
20                 für i := 1 bis q tue
21                     B := {Li|Li ist unmarkiert}
22                     ui := ◊B,Pi,A1,...,An
23                     markiere alle Literale in Pi
24                     füge ui als Kind von u hinzu
25 markiere alle unmarkierte Knoten als „Typ 2“
```

Der Algorithmus terminiert. Die in der Zeile 23 erfolgte Markierung und die Aufnahme ausschließlich unmarkierter Klauseln in der Zeile 21 verhindern die Endlosschleife, die dadurch entstehen könnte, dass in der Zeile 22 ein $\Diamond$ entfernt und ein neuer hinzugefügt wird.

Lemma 26 *Eine Klauselmenge* S *mit nicht abgeschlossenem* **B**-*Baum hat ein* **B**-*Modell.*

Beweis. Zunächst werden wie im Beweis zum Lemma 4 die Äquivalenzrelation ρ und die Äquivalenzklassen gebildet. Entsprechend wird auch ein Teilbaum $G' = (V', E')$ des **B**-Baumes G betrachtet. Das Modell $M = ((W,R),V)$ wird jetzt wie folgt erstellt:

1. W ist die Menge der Äquivalenzklassen von G' bezüglich ρ
2. für $|u|$ und $|v|$ in G: $|u|R|v|$ sowie $|v|R|u|$ gdw. $|u| \neq |v|$ und es existiert ein $u_1 \in |u|$ sowie ein $v_1 \in |v|$ sodass $(u_1, v_1) \in E$
3. für alle $|u|$ in G: $|u|R|u|$
4. $|u| \in V(p)$ gdw. $p \in u_1$ für einen $u_1 \in |u|$ oder $\Box p \in v_1$ für eine $v_1 \in |v|$ mit $|v|R|u|$

□

Lemma 27 *Wie Lemma 5, wobei* $\mathbf{K}$ *durch* $\mathbf{B}$ *und* $\mathsf{R}\mathbf{K}$ *durch* $\mathsf{R}\mathbf{B}$ *ersetzt werden.*

Korollar 28 *Wie Korollar 6, wobei auch hier* $\mathbf{K}$ *durch* $\mathbf{B}$ *und* $\mathsf{R}\mathbf{K}$ *durch* $\mathsf{R}\mathbf{B}$ *ersetzt werden.*

Die Beweise sind ebenfalls entsprechend der Beweise zum Lemma 5 und Korollar 6, mit der Ersetzung von $\mathbf{K}$ bzw. $\mathsf{R}\mathbf{K}$ durch $\mathbf{B}$ und $\mathsf{R}\mathbf{B}$.

Lemma 29 *Wenn* $\Box C \in \boldsymbol{S}$ *oder* $\Diamond(\Box C, \boldsymbol{E}) \in \boldsymbol{S}$ *und* $\boldsymbol{S} \cup \{C\}$ *ist widerlegbar, so ist auch* $\boldsymbol{S}$ *widerlegbar.*

Beweis. Der Fall $\Box C \in \boldsymbol{S}$ wurde im Beweis für Lemma 17 gezeigt.

Für den Fall $\Diamond(\Box C, \boldsymbol{E}) \in \boldsymbol{S}$ wird die von C abhängige Widerlegung von $\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S} \cup \{C\}$ auf ähnliche Weise modifiziert. Zunächst werden alle Sequenzen von (R1)-Regeln, die mit der Klausel C beginnen und jeweils in irgendeiner Klausel D enden, betrachtet. Mittels der Γ-$\Box$-Regel werden diese Sequenzen in Sequenzen, die von $\Box C$ nach $\Box D$ führen, abgeändert. Anschließend werden diese Sequenzen mittels der Γ-$\Diamond$2-Regel erneut angepasst. Jetzt führen sie von $\Diamond(\Box C)$ nach $\Diamond(\Box D, \Box C)$. Wenn $D = \bot$ ist, dann folgt mittels der Vereinfachungsregeln erneut die gewünschte Widerlegung. Anderenfalls muss D als Prämisse in einer (R2)-Regel vorkommen:

$$\frac{D \qquad D'}{D''} \quad \text{mit } \Sigma(D, D') \to D''$$

In diesem Fall folgt mittels der $\mathbf{B}$-Regel: $\Sigma(\Diamond(\Box D, \Box C), D') \to D''$. Anschließend wird mit dem Rest der Widerlegung für $\boldsymbol{S}'$ fortgefahren. $\square$

Schließlich folgt die Analogie zum Lemma 7.

Lemma 30 *In einem* $\mathbf{B}$*-Baum ist jeder abgeschlossene Knoten* $\mathsf{R}\mathbf{B}$*-widerlegbar.*

Beweis. Der Beweis läuft analog zu dem Beweis für Lemma 7. Der Unterschied ist, dass u ein „Typ 1"-Knoten sein kann, wobei $\Box C \in u$ oder $\Diamond(\Box C, \boldsymbol{E}) \in u$ und $u = u \cup \{C\}$. An dieser Stelle wird auf das Lemma 29 zurückgegriffen. $\square$

Der Beweis vom Lemma 30 vervollständigt den Beweis für die Vollständigkeit des Systems $\mathsf{R}\mathbf{B}$.

9 Resolution für **S5**-Rahmen

Das Axiom **E**, $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, bedeutet, dass wenn eine Welt w eine Welt erreichen kann, in der φ gilt, so können *alle* Welten, die aus w aus erreichbar sind, diese ebenfalls erreichen. Die somit geforderte Eigenschaft, dass eine erreichbare Welt auch von allen anderen erreichbaren Welten erreicht werden kann, wird als *euklidisch* bezeichnet.

Das System **S5**, zusammengesetzt aus **T** und eben diesem **E**, ist die Klasse reflexiver und euklidischer Rahmen. Eine reflexive und euklidische Relation ist ebenfalls symmetrisch und transitiv [FMHV03]. Somit handelt es sich bei **S5** um die Klasse der *Äquivalenzrelationen*. Mit anderen Worten sind im **S5**-Rahmen alle Welten miteinander verbunden und bei jeder Welt existiert eine Kante zu sich selbst.

Wie das folgende Lemma zeigt, können die Formeln in **S5** vereinfacht werden. Das Lemma und der Beweis basieren auf [HC96].

Lemma 31 *Seien φ, ψ modale Formeln. Folgende logische Äquivalenzen gelten in* **S5**:

(i) $\Box\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$

(ii) $\Diamond\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$

(iii) $\Box\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$

(iv) $\Diamond\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$

(v) $\Box(\varphi \vee \Box\psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \vee \Box\psi)$

(vi) $\Box(\varphi \vee \Diamond\psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \vee \Diamond\psi)$

(vii) $\Diamond(\varphi \wedge \Diamond\psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$

(viii) $\Diamond(\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Box\psi)$

Beweis. Wie der Tabelle 2.1 zu entnehmen ist, beinhaltet das System **S5** die Axiome **T** ($\Box\varphi \to \varphi$), **K**4 ($\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$) und **E** ($\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$).

(i): $\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$ folgt direkt aus dem Axiom **T** mit $\psi = \Diamond\varphi$.

$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ ist das Axiom **E**.

(ii): $\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$ lässt sich durch folgende Umformungen aus $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ herleiten. Zunächst wird φ mit $\neg\varphi$ substituiert, und die Implikation wird aufgelöst entsprechend der Beschreibung in Abschnitt 2.2.2. Das Resultat sieht wie folgt aus: $\neg\Diamond\neg\varphi \vee \Box\Diamond\neg\varphi$. Jetzt werden $\Box$ durch $\neg\Diamond\neg$ und $\Diamond$ durch $\neg\Box\neg$ ersetzt. Das Ergebnis ist: $\neg\neg\Box\neg\neg\varphi \vee \neg\Diamond\neg\neg\Box\neg\neg\varphi$. Die doppelte Negation wird jeweils beseitigt: $\Box\varphi \vee \neg\Diamond\Box\varphi$. Nun wird die Kommutativität des logischen Oders ausgenutzt, um den Ausdruck mithilfe der Implikation darstellen zu können: $\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$.

$\Box\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ lässt sich auf die gleiche Weise aus $\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$ herleiten.

(iii): $\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$ folgt direkt aus dem Axiom **T** mit $\psi = \Box\varphi$.

$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ ist das Axiom **K4**.

(iv): Die Implikationen lassen sich wie in (ii) gezeigt aus (iii) herleiten.

(v): $\Box(\varphi \vee \Box\psi) \to (\Box\varphi \vee \Box\psi)$:

$$\begin{aligned}
\Box(\varphi \vee \Box\psi) &\to \Box(\neg\Box\psi \to \varphi) & \\
&\to (\Box\neg\Box\psi \to \Box\varphi) & \text{(Axiom } \mathbf{K}\text{)} \\
&\to (\neg\Diamond\neg\neg\Box\psi \to \Box\varphi) & \\
&\to (\Diamond\Box\psi \vee \Box\varphi) & \\
&\to (\Box\psi \vee \Box\varphi) & \text{(folgt aus (ii))}
\end{aligned}$$

$(\Box\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \vee \Box\psi)$:

$$\begin{aligned}
(\Box\varphi \vee \Box\psi) &\to (\Box\varphi \vee \Box\Box\psi) & \text{(folgt aus (iii))} \\
&\to \Box(\varphi \vee \Box\psi) & \text{(folgt aus } (\Box\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \vee \psi))
\end{aligned}$$

(vi): Aus (v) folgt:

$$\Box(\varphi \vee \Box\Diamond\psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \vee \Box\Diamond\psi)$$

Und aus (i) folgt dann:

$$\Box(\varphi \vee \Diamond\psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \vee \Diamond\psi)$$

(vii): Die Aussage folgt aus (v) durch folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
\Box(\neg\varphi \vee \Box\neg\psi) &\leftrightarrow (\Box\neg\varphi \vee \Box\neg\psi) \\
\neg\Box(\neg\varphi \vee \Box\neg\psi) &\leftrightarrow \neg(\Box\neg\varphi \vee \Box\neg\psi) \\
\neg\neg\Diamond\neg(\neg\varphi \vee \Box\neg\psi) &\leftrightarrow \neg(\Box\neg\varphi \vee \Box\neg\psi) \\
\Diamond(\varphi \wedge \Diamond\psi) &\leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)
\end{aligned}$$

(viii): Aus (vii) folgt:

$$\Diamond(\varphi \wedge \Diamond\Box\psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\Box\psi)$$

Nun folgt aus (ii):

$$\Diamond(\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Box\psi)$$

□

Folgende zwei Sätze erleichtern die Definition der Resolution für **S5**-Rahmen.

Satz 32 *Jede Formel φ mit* $\mathrm{md}(\varphi) > 1$ *ist in* **S5** *zu einer Formel φ' mit* $\mathrm{md}(\varphi') = 1$ *reduzierbar.*

In [HC96] wird der Satz für beliebige Formeln in **S5** bewiesen, also auch für solche, die nicht in KNF sind. Wie im Abschnitt 3.2 beschrieben, werden an dieser Stelle jedoch nur Formeln in KNF betrachtet. Dies findet in der folgenden Version des Beweises Berücksichtigung.

Beweis. Wenn $\mathrm{md}(\varphi) \leq 1$ dann ist $\varphi' := \varphi$. Für den Fall, dass $\mathrm{md}(\varphi) > 1$ ist, genügt es zu zeigen, dass eine Formel mit $\mathrm{md}(\varphi) = 2$ sich auf eine Formel mit $\mathrm{md}(\varphi) = 1$ reduzieren lässt. Durch wiederholte Anwendung dieser Operation lassen sich auch Formeln mit $\mathrm{md}(\varphi) > 2$ in Formeln mit $\mathrm{md}(\varphi) = 1$ umformen. Dabei spielen folgende Umformungen eine entscheidende Rolle.

Mithilfe des Distributivgesetzes für den Box-Operator $(\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi))$ lässt sich $\Box$ auf die Konjunktionsterme aufteilen. Wenn einer der Konjunktionsterme mit einem modalen Operator beginnt, dann lässt sich die $\Box$ mittels Lemma 31 entfernen. Das bedeutet, dass z.B. aus $\Box(p \wedge \Diamond q)$ nach der Distribution $\Box p \wedge \Diamond q$ und nicht $\Box p \wedge \Box\Diamond q$ wird. Der Operator $\Box$ wird vom Operator $\Diamond$ *absorbiert*.

Mittels (v) und (vi) des vorherigen Lemmas lässt sich die Disjunktion auf ähnliche Weise vereinfachen, vorausgesetzt eines der Disjunkte beginnt mit einem modalen Operator. Zu beachten ist, dass diese Regeln nur für Disjunktionen mit zwei Disjunktionstermen gelten. Für den Fall, dass eine Disjunktion mehr als zwei Disjunktionsterme besitzt, müssen diese zuvor geklammert werden[1]. Bei der Klammerung wird ein mit einem modalen Operator beginnender Disjunktionsterm ausgewählt und alle anderen zusammen als ein zweiter Disjunktionsterm betrachtet. Zum Beispiel kann die Formel $\Box(p \vee \Diamond q \vee r \vee \Box s)$ wie folgt geklammert werden: $\Box((p \vee r \vee \Box s) \vee \Diamond q)$. Dies kann nun zu $\Box((p \vee r) \vee \Box s) \vee \Diamond q$ umgeformt werden. Die nächste Umformung ergibt dann $\Box(p \vee r) \vee \Box s \vee \Diamond q$. Es wäre jedoch nicht korrekt, die ursprüngliche Formel zu $\Box p \vee \Diamond q \vee \Box p \vee \Box s$ umzuformen.

Analog lässt sich $\Diamond$ mittels des entsprechenden Distributivgesetzes $(\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi))$ und den Äquivalenzen (vii) sowie (viii) aufteilen und absorbieren.

Die Tatsache, dass nur Formeln in KNF betrachtet werden, bedeutet insbesondere, dass die Formeln nur folgende Operatoren beinhalten: $\Box, \Diamond, \wedge, \vee$ und $\neg$. Des Weiteren wurde die Negation nach innen gezogen. Nun werden hintereinander vorkommende modale Operatoren, wie im Lemma 31 (i)-(iv) beschrieben, ersetzt. Wenn die dadurch entstehende Formel immer noch $\mathrm{md}(\varphi) = 2$ aufweist, so muss sie selbst oder eine ihre Teilformel von der Form $\Box\alpha$ oder $\Diamond\alpha$ sein: Dabei ist α je nach dem entweder in DNF oder in KNF, und hat $\mathrm{md}(\varphi) = 1$.

Angenommen, es handelt sich hierbei um $\Box\alpha$. Da die ursprüngliche Formel in KNF ist, muss α in DNF sein. Auch durch die Anwendung der Umformungen aus dem Lemma 31 (i)-(iv) entsteht keine Formel, bei der α nicht in DNF ist. Da α modale Tiefe von eins hat, muss mindestens einer der Disjunktionsterme in α mit einem modalen Operator beginnen. In diesem Fall wird $\Box$, wie weiter oben beschrieben, auf die Disjunktionsterme verteilt und von jedem modalen Operator absorbiert, auf den es trifft.

Falls es sich dagegen um $\Diamond\alpha$ handelt, so ist α in KNF. Es müssen drei Fälle betrachtet werden:

Fall 1: Mindestens einer der Konjunktionsterme beginnt mit einem modalen Operator. In diesem Fall wird $\Diamond$ wie in Lemma 31 gezeigt aufgeteilt und absorbiert.

Fall 2: Keiner der Konjunktionsterme beginnt mit $\Box$ oder $\Diamond$. Da $\mathrm{md}(\alpha) = 1$, ist es nur möglich, wenn einer der Konjunktionsterme eine Disjunktion ist, die mindestens einen modalen Operator beinhaltet. In diesem Fall wird die α mittels des Distributivgesetzes $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ aus der Aussagenlogik umgeformt, anschließend kann $\Diamond$ auf die Disjunktionsterme aufgeteilt werden. Nun wird wie im ersten Fall verfahren. Zum Beispiel wird $\Diamond(p \wedge (q \vee \Box r))$ erst zu $\Diamond((p \wedge q) \vee (p \wedge \Box r))$ umgeformt. Daraufhin wird $\Diamond$ aufgeteilt: $\Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(p \wedge \Box r)$. Jetzt kann diese Formel zur folgenden Formel mit $\mathrm{md}(\varphi) = 1$ umgeformt werden: $\Diamond(p \wedge q) \vee (\Diamond p \wedge \Box r)$. Zum Schluß kann diese Formel noch in KNF gebracht werden: $(\Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond p) \wedge (\Box r \vee \Diamond(p \wedge q))$.

Fall 3: α ist eine Disjunktion. Das ist nur dann möglich, wenn α aus einem einzigen Konjunktionsterm besteht. In diesem Fall kann das Distributivgesetz für den $\Diamond$-Operator verwendet werden um $\Diamond$ auf die Disjunktionsterme aufzuteilen. Hierbei wird $\Diamond$ von jedem modalen Operator absorbiert, auf den er trifft. Z.B. wird aus $\Diamond(p \vee \Box q \vee \Diamond r)$ am Ende $\Box q \vee \Diamond p \vee \Diamond r$. □

Bemerkung *Es kann vorausgesetzt werden, dass die Formel φ' folgende Form hat:*

$$C \vee \Box D_1 \vee \cdots \vee D_n \vee \Diamond \boldsymbol{E}_1 \vee \cdots \vee \Diamond \boldsymbol{E}_r$$

wobei $C, D_1, \ldots, D_n$ Klauseln ohne modale Operatoren und $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_r$ Mengen von Klauseln ohne modale Operatoren sind.

Satz 33 *Sei φ eine modale Formel mit $\mathrm{md}(\varphi) \leq 1$. Es gilt: φ ist* **S5***-erfüllbar gdw. φ ist* **T***-erfüllbar.*

[1] Zu beachten ist in diesem Zusammenhang die Erklärung in Abschnitt 2.2.2, laut der das Weglassen der Klammern um binäre Operatoren lediglich eine Kurzschreibweise ist, und eine Klammerung theoretisch immer implizit existiert.

Beweis. „⊇": Wenn eine Formel **S5**-Erfüllbar ist, dann ist das Modell, welches die Formel erfüllt notwendigerweise reflexiv.

„⊆": Sei $M = ((W,R),V)$ ein T-Modell mit $w_0 \in W$ sodass $M,w_0 \models \varphi$. Das gesuchte **S5**-Modell ist $M' = ((W,R'),V)$, wobei R' die transitive und symmetrische Hülle von R ist. Mittels Induktion über die Länge der Teilformeln von φ kann gezeigt werden, dass $M',w_0 \models \varphi$. □

Die Unerfüllbarkeit einer Formel φ in **S5** kann also in folgenden zwei Schritten geprüft werden:

1. Reduzierung der Formel φ zur Formel φ' mit $\mathrm{md}(\varphi') \leq 1$.
2. Herleitung von $\perp$ aus φ' mittels des Systems R**T**.

9.1 Das System R**S5**

Das System R**T** kann für Formeln mit modaler Tiefe von eins so umformuliert werden, dass die $\vee$-Regel mit den anderen Regeln kombiniert wird. Folgende Definition listet die dadurch entstehenden Inferenzregeln auf:

Definition (Das System R**S5**) *Seien C, C_1, C_2, D, D_1, D_2 Klauseln und $\boldsymbol{E}$ eine Klauselmenge, ferner seien l und l' zwei zueinander komplementäre Literale. Die Inferenzregeln sind*

$$\Box\Diamond\textit{-Regel}\ \frac{C_1 \vee \Box(l \vee D_1) \qquad C_2 \vee \Diamond(l' \vee D_2, \boldsymbol{E})}{C_1 \vee C_2 \vee \Diamond(D_1 \vee D_2, l' \vee D_2, \boldsymbol{E})}$$

$$\Box\Box\textit{-Regel}\ \frac{C_1 \vee \Box(l \vee D_1) \qquad C_2 \vee \Box(l' \vee D_2)}{C_1 \vee C_2 \vee \Box(D_1 \vee D_2)}$$

$$\Box\textit{-Regel}\ \frac{C_1 \vee \Box(l \vee D) \qquad C_2 \vee l'}{C_1 \vee C_2 \vee D}$$

$$\Diamond\textit{-Regel}\ \frac{C \vee \Diamond(l \vee D_1, l' \vee D_2, \boldsymbol{E})}{C \vee \Diamond(D_1 \vee D_2, l \vee D_1, l' \vee D_2, \boldsymbol{E})}$$

$$\Box\bot\textit{-Regel}\ \frac{C \vee \Box\bot}{C}$$

$$\Diamond\bot\textit{-Regel}\ \frac{C \vee \Diamond(\bot, \boldsymbol{E})}{C}$$

$$\textit{Klassische Regel}\ \frac{C_1 \vee l \qquad C_2 \vee l'}{C_1 \vee C_2}$$

$$\textit{Faktorisierung}\ \frac{\boldsymbol{E}[D \vee D \vee C]}{\boldsymbol{E}[D \vee C]}$$

Die Schreibweise $\boldsymbol{E}[\varphi]$ bedeutet, dass φ eine Teilformel von $\boldsymbol{E}$ ist.

Satz 34 *Das System* R**S5** *ist vollständig für Widerlegung von Klauselmengen mit modaler Tiefe* $\mathrm{md}(\varphi') \leq 1$.

Der Beweis folgt aus der Vollständigkeit des Systems R**T** und den Sätzen 32 und 33.

10 Fazit und Ausblick

Dieses Kapitel fasst die Ziele und Kerninhalte dieser Arbeit und stellt Ansatzpunkte für weitere Forschung dar.

10.1 Fazit

Ziel dieser Arbeit war die anschauliche Beschreibung der Resolution für die normalen modallogischen Systeme **K**, **D**, **T**, **S4** und **S5** und die Erweiterung des Verfahrens auf ein weiteres System. Als Erstes wurde die konjunktive Normalform für modallogische Formeln definiert. Für jedes normale System wurde dann eine Menge an Schluss- und Vereinfachungsregeln definiert. Diese Regeln führen zu den eigentlichen Inferenzregeln, mit denen die modallogische Resolution in Analogie zur Aussagenlogik beschrieben wird.

Als Spezialfall in diesem Zusammenhang wurde das modallogische System **S5** beschrieben, innerhalb dessen Formeln beliebiger modallogischer Tiefe auf eine Tiefe von höchstens eins umgeformt werden können. Somit können die Resolutionsregeln im Resolutionssystem R**S5** in einer Form angegeben werden, die der Resolution in der Aussagenlogik entspricht.

Für andere modallogische Systeme ist dieser einfache Weg ausgeschlossen, es wurden stattdessen Resolutionssysteme angegeben, die auf einem grundlegenden System R**K** für das System **K** basieren. Den in der Literatur bekannten Resolutionssystemen wurde R**B** hinzugefügt, indem die Resolution für **T** um eine weitere Regel erweitert und deren Korrektheit im Rahmen dieser Arbeit bewiesen wurde.

10.2 Ausblick

Die Erweiterung des Basissystems R**K** auf andere Systeme ist, wie gezeigt wurde, nicht trivial. So genügt etwa für die Erweiterung von R**K** zu R**D** die Hinzunahme einer Vereinfachungsregel; im Gegensatz dazu erfordert die Erweiterung auf R**T** eine Erweiterung der gegebenen Regeln, R**S4** eine Ersetzung. Die Literatur beschreibt eine große Vielfalt unterschiedlicher modallogischer Systeme, für die zu einem beträchtlichen Teil kein naheliegendes Resolutionssystem gegeben ist.

Insbesondere stellt sich daher, neben der Angabe der jeweiligen individuellen Resolutionssysteme, die Frage nach einem übergreifenden Prinzip, das aus gegebenen Beschreibungen eines modallogischen Systems das zugehörige Resolutionssystem eindeutig bestimmt. Entsprechende Beschreibungen modallogischer Systeme liegen, wie in dieser Arbeit beschrieben, in unterschiedlichen Formen vor: Axiome können Rahmeneigenschaften definieren und umgekehrt, jedoch lassen sich unterschiedliche Charakterisierungen sowohl von Axiomen als auch von Grapheneigenschaften geben, die tatsächlich dasselbe System beschreiben. Zur Bestimmung des Resolutionssystems können beide Beschreibungsformen, die axiomatische und die topologische, gleichwertig verwendet werden; offen ist, welche Beschreibung besser geeignet ist und in welcher Form sie genutzt werden kann.

multimodale Logik

Weiterhin existiert die sogenannte *multimodale Logik*, die statt eines Operators $\Box$ (mit dualem Operator $\Diamond$) mehrere Operatoren $\Box_i$ enthält (mit jeweiligen dualen Operatoren $\Diamond_i$). Auch hier können Resolutionssysteme angegeben werden, wie in [EFdC89] für die multimodale Variante von **S4**, der sogenannten epistemischen Logik, beschrieben. In [AdNdR01] wurde

Resolution für multimodale und *hybride Logik* sowie für *Beschreibungslogik angegeben*. Und schließlich wird in [Ohl88] ein Unifikationsalgorithmus angegeben, mit dem die Resolution für modale Logik erster Stufe definiert wird. In allen diesen Fällen existiert beträchtliches Potential für die Aufstellung von Resolutionssystemen in Analogie zu den hier vorgestellten Methoden, zudem stellt sich in diesen Gebieten ebenso die Frage, ob Regeln zur Aufstellung von Resolutionssystemen aufgestellt werden können.

Literaturverzeichnis

[AdNdR01] Carlos Areces, Hans de Nivelle, and Maarten de Rijke. Resolution in Modal, Description and Hybrid Logic. *Journal of Logic and Computation*, 11(5):717–736, 2001.

[BdRV02] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2002.

[EFdC89] Patrice Enjalbert and Luis Fariñas del Cerro. Modal Resolution in Clausal Form. *Theoretical Computer Science*, 65(1):1–33, 1989.

[FdC82] Luis Fariñas del Cerro. A Simple Deduction Method for Modal Logic. *Information Processing Letters*, 14(2):49–51, 1982.

[FdC85] Luis Fariñas del Cerro. Resolution Modal Logics. *Logics and Models of Concurrent Systems*, 13:27–55, 1985.

[FMHV03] Ronald Fagin, Yoram Moses, Joseph Y. Halpern, and Moshe Y. Vardi. *Reasoning About Knowledge*. MIT Press, 2003.

[Gar00] James W. Garson. Modal Logic, 2000. [Online; Stand 18. August 2014]. URL: `http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/`.

[HC96] George E. Hughes and Max J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.

[Hed08] Anton Hedin. Modal Logic. *Lecture Notes for Applied Logic 2008, Department of Mathematics, Uppsala University*, 2008.

[Lad77] Richard E. Ladner. The Computational Complexity of Provability in Systems of Modal Propositional Logic. *SIAM Journal on Computing, vol. 6, no. 3*, pages 467–480, 1977.

[Mül09] Julian-Steffen Müller. Vollständigkeit in modalen Logiken. *Bachelorarbeit, Institut für Theoretische Informatik, Universität Hannover*, 2009.

[Ohl88] Hans Jürgen Ohlbach. A Resolution Calculus for Modal Logics. *9th International Conference on Automated Deduction*, 310:500–516, 1988.

[Sch02] Thomas Schneider. Komplexität modaler Logiken. *Diplomarbeit, Fakultät für Mathemaik und Informatik, Universität Jena*, 2002.

[VK14] Heribert Vollmer and Thorsten Kluge. Logik und formale Systeme. *Skript zur Vorlesung SS 2014, Institut für Theoretische Informatik, Leibniz Universität Hannover*, 2014.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen genutzt habe.

Hannover, 2. Oktober 2014

Sergey Kartamyshev