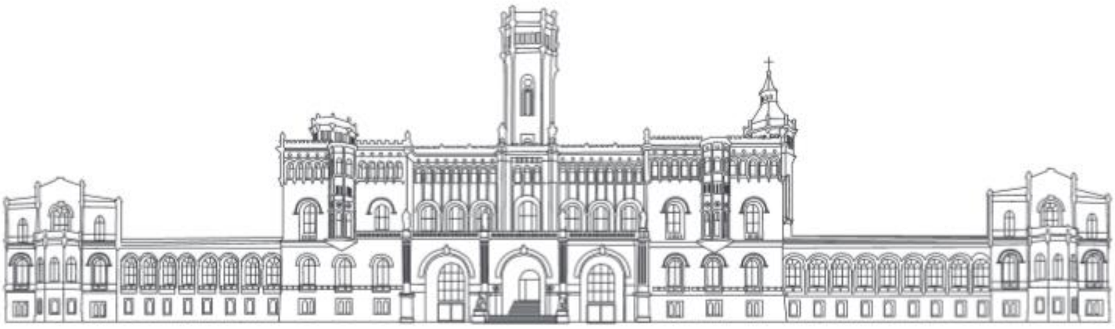

Leibniz Universität Hannover
Institut für Theoretische Informatik

Bachelorarbeit

Einführung in die Beweisbarkeitslogik

Marius Mühlen
(Matrikel-Nr.: 3068610)
08.02.2017

Erstprüfer: Prof. Dr. Heribert Vollmer
Zweitprüfer: Dr. Arne Meier

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die hier angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Datum Marius Mühlen

Inhaltsverzeichnis

1. Historischer Hintergrund ... 8
2. Modallogik ... 10
   2.1. Grundlagen ... 10
   2.2. Verschiedene modallogische Systeme ... 13
      2.2.1. Das modallogische System T ... 13
      2.2.2. Das modallogische System B ... 13
      2.2.3. Das modallogische System K4 ... 13
      2.2.4. Das modallogische System S4 ... 14
      2.2.5. Das modallogische System S5 ... 14
3. Einführung in die Peano Arithmetik ... 15
4. Beweisbarkeitslogik ... 17
   4.1. Satz von Löb ... 18
   4.2. Der Henkinsatz ... 20
   4.3. Arithmetische Vollständigkeit von GL ... 21
   4.4. Das Fixpunkttheorem ... 22
   4.5. Das System GLS ... 24
   4.6. Selbstreferenz in GL ... 25
5. Anwendungsbereich ... 27
   5.1. Grenzen ... 27
   5.2. Erweiterungen ... 28
   5.3. Aussagenquantifizierer ... 29
   5.4. Prädikaten-Beweisbarkeitslogik ... 29
6. Fazit ... 30
7. Literatur ... 31
8. Internetquellen ... 31

Aufgabenstellung

Aufbauend auf grundlegenden Kenntnissen der Mathematik – respektive der Modallogik – soll die abzufassende Arbeit eine Einführung in die Beweisbarkeitslogik darstellen.
Zunächst sorgt ein historischer Hintergrund dafür, dass eine zeitliche Einordnung gegeben und das Thema präsent ist. Um einen reibungslosen Einstieg zu gewährleisten ist daraufhin eine kurze Wiederholung zur Modallogik geboten. Hierzu sollen insbesondere Axiome erläutert und die Begriffe „Notwendigkeit“ und „Möglichkeit“ behandelt werden. Die zugrunde liegende Literatur beinhaltet eine Untermenge an modallogischen Systemen, deren Überblick anschaulich dargestellt werden soll. Hier wird großen Wert auf die Axiome gelegt, die die verschiedenen modallogischen Systeme charakterisieren. Ableitend daraus soll sich das modallogische System Gödel Lob (GL) ergeben und erklärt werden. Bevor dann, vertieft auf die Beweisbarkeitslogik eingegangen wird, erfolgt eine Darstellung der Peano Arithmetik. Diese dient in der Beweisbarkeitslogik meistens als zugrunde liegende Theorie. Anschließend sollen die wichtigsten Axiome von GL skizziert werden, darunter beispielsweise das Axiom von Löb. Daraufhin soll die Betrachtung der Vollständigkeit des Systems GL verständlich erläutert werden. Weiterhin soll eine eingehende aber verständliche Abhandlung zum Fixpunkttheorem (Diagonalisierungslemma) erfolgen. Dazu gilt es u.a. auch die Formel $Bew_T(x,y)$ einzuführen. Als abschließender Teil dieses Kapitels wird noch auf das System GLS eingegangen und die Selbstreferenz von GL genauer erklärt. Eine Abrundung des Themas soll durch die Skizzierung von Anwendungsbereichen erfolgen, denen die Beweisbarkeitslogik als Grundlage dient.

1. Historischer Hintergrund

Die Beweisbarkeitslogik wurde hauptsächlich durch zwei Fortschritte in der Forschung ins Leben gerufen. Der Erste wurde in einem Paper von Kurt Gödel im Jahre 1933 verfasst. In dieser Arbeit übersetzt er die intuitionistische Aussagenlogik in die modale Logik, genauer gesagt in das heutige S4, worauf später noch eingegangen wird.
In seiner Arbeit erwähnt er beiläufig, dass Beweisbarkeit auch als ein modaler Operator ausgedrückt werden kann. C. I. Lewis startete schon etwas früher eine damals moderne Studie über die modale Logik. Dort führte er eine strenge Implikation als eine Art Ableitbarkeit ein. Er nutze vermutlich das formale System Principia Mathematica, dies geht aber nicht klar aus seinen Aufzeichnungen hervor.
Die Forschung in der Meta-Mathematik ist der zweite Fortschritt. Die Frage, die sich dazu stellt, lautet:
Was können mathematische Theorien über sich selbst sagen, wenn sie interessante Eigenschaften kodieren?
L. Henkin stellte 1952 eine einfache Frage, inspiriert von Gödels Unvollständigkeitssätzen. Gödels erster Unvollständigkeitssatz besagt, dass in einer hinreichend starken formalen Theorie wie die Peano Arithmetik, jeder Satz der seine Unbeweisbarkeit behauptet, auch tatsächlich unbeweisbar ist. Auch die Peano Arithmetik (PA) wird später genauer erklärt. Von außerhalb der formalen Theorie betrachtet, ist zu erkennen, dass ein solcher Satz im Standardmodell wahr ist, was auf eine wichtige Trennung zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit hinweist.
Folgende Inhalte werden hier nur kurz genannt um eine Einleitung zu bieten. Sie werden im Laufe der Arbeit intensiver erklärt, eventuell in leicht abgeänderter Form.
$\#\varphi$ sei die Gödelzahl zu einer arithmetischen Formel φ. Sei *Bew* das Beweisbarkeitsprädikat für die Peano Arithmetik, welches die Form $\exists p Proof(p,x)$ hat. Das bedeutet, die Gödelzahl p kodiert einen korrekten Beweis aus den Axiomen der Peano Arithmetik für die Formel mit Gödelzahl x.
Angenommen, die Peano Arithmetik beweist

$$\varphi \leftrightarrow \neg Bew(\#\varphi),$$

dann ist nach Gödels Beweis φ nicht beweisbar in der Peano Arithmetik, und somit ist es wahr, denn der selbstreferentielle Satz φ sagt „Ich bin nicht beweisbar".
Henkin war andererseits daran interessiert herauszufinden, ob man über Sätze, die ihre eigene Beweisbarkeit behaupten, noch mehr Aussagen zu treffen seien. Wenn man annimmt, dass die Peano Arithmetik

$$\psi \leftrightarrow Bew(\#\psi)$$

beweist, was sagt das dann über ψ aus?

M. Löb überraschte drei Jahre später mit seiner Antwort:
Obwohl alle in der Peano Arithmetik beweisbaren Sätze über den natürlichen Zahlen wahr sind, zeigte Löb, dass die formalisierte Version dieser Tatsache, also $Bew(\#\psi) \rightarrow \psi$, nur in PA bewiesen werden kann, wenn der triviale Fall besteht, dass PA ψ bereits selbst beweist. Und genau dieses Ergebnis ist auch bekannt als Satz von Löb oder Löb's Theorem. Im späteren Verlauf dieser Arbeit wird der Satz von Löb formal präsentiert und erläutert, inklusive drei relevanter Bedingungen, die für bestimmte Theorien T gelten, beispielsweise auch für die Peano Arithmetik.[i1]

2. Modallogik

2.1. Grundlagen

Vor Behandlung der Beweisbarkeitslogik soll an dieser Stelle eine Wiederholung der Modallogik erfolgen, da die Beweisbarkeitslogik auf der Modallogik aufbaut.[3]
Die Modallogik beschäftigt sich zum größten Teil mit den Begriffen der Notwendigkeit und der Möglichkeit. Diese beiden Begriffe werden durch zwei Symbole ausgedrückt.
Das erste Symbol ist das „Box“-Symbol, dargestellt durch folgendes Zeichen: $\Box$. Dieses Symbol vertritt den Begriff der Notwendigkeit. So bedeutet $\Box\varphi$ also „φ ist notwendig“ oder auch „notwendigerweise gilt φ“, wobei φ eine beliebige aussagenlogische Formel ist.
Der Begriff der Möglichkeit wird durch das Zweite, dem „Diamant“-Symbol dargestellt: $\Diamond$. Hier bedeutet $\Diamond\varphi$ „φ ist möglich“ oder „möglicherweise gilt φ“. Der $\Diamond$-Operator ist definiert als Abkürzung für $\neg\Box\neg$. Es gilt also:

$$\Diamond\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$$

Ebenso gilt auch:

$$\Box\varphi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$$

Diese beiden Gesetze sind grundlegende Gesetzte der Modallogik.

Kommen wir nun zur Semantik der Modallogik. Zunächst wählen wir eine Menge W, als Menge der möglichen Welten und eine Relation $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ ist eine binäre Relation auf W. Solche Strukturen werden als Kripke-Rahmen[1] bezeichnet. Die Einführung einer Relation drückt aus, was in einer Welt w existiert. Dafür wird das „$\vDash$“ – Symbol genutzt. So kann ausgedrückt werden, dass eine modallogische Formel φ in einer Welt w liegt: $w \vDash \varphi$.
$(W, \mathcal{R})$ ist ein Rahmen $\mathcal{F}$, bestehend aus einer nichtleeren Menge W, der Grundmenge von $(W, \mathcal{R})$, und einer zweistelligen Relation $\mathcal{R}$ auf W, der Zugänglichkeitsrelation. Die Elemente von W werden als Welten bezeichnet.

Folgende Regelungen gelten in den Welten:[3]

i. $w \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow w \nvDash \varphi$;
ii. $w \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (w \vDash \varphi \Leftrightarrow w \vDash \psi)$;
iii. $w \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (w \vDash \varphi \text{ und } w \vDash \psi)$;
iv. $w \vDash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (w \vDash \varphi \text{ oder } w \vDash \psi)$;

[1] Im Folgenden nur Rahmen genannt.

Definition:
Ein Modell $\mathcal{M}$ der Modallogik ist ein Paar $(\mathcal{F}, \mathrm{V})$ mit

(1) $\mathcal{F} = (W, \mathcal{R})$ ist ein Rahmen
(2) V: Var → P(W) ist eine Abbildung, die jedem Atom a eine Menge V(a) von Welten zuordnet (P(W) ist die Potenzmenge von W).[5]

Nun werden verschiedene modallogische Systeme etwas genauer betrachtet.[4]

Zuerst das modallogische System **K**:
Es gelten folgende Axiome:

(Taut)	Alle aussagenlogischen Tautologien in der Sprache L_M[2]
(K)	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (Distributionsaxiom)

Und zusätzlich gelten folgende Regeln:

(MP)	$\alpha, \alpha \to \beta$ / β (Modus Ponens)
(Subst)	α / α^x für jede Substitution x (Substitutionsregel)
(N)	α / $\Box\alpha$ (Notwendigkeitsregel[3])

Man schreibt „**K** ⊢ φ“ für eine Formel φ, wenn sie aus dem System **K** abgeleitet werden kann mit Hilfe der oben genannten gültigen Axiome und Regel.
Am folgenden Beispiel wird gut dargestellt, wie ein solches Theorem bewiesen werden kann.
Solch ein Theorem gilt beispielsweise im System **K**:

$$\mathbf{K} \vdash \alpha \to \beta \Rightarrow \mathbf{K} \vdash \Box\alpha \to \Box\beta, \text{ da}$$

(1)	$\alpha \to \beta$	Voraussetzung
(2)	$\Box(\alpha \to \beta)$	(N) mit (1)
(3)	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	(K)
(4)	$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	(Subst) (α / p, β / q) mit (3)
(5)	$\Box\alpha \to \Box\beta$	(MP) mit (2), (4)

Dies ist ein **K**-Beweis, eine endliche (nichtleere) Folge von Formeln, von denen jede ein Axiom ist oder durch eine oder mehrere in der Folge vorangehende Formeln durch Anwendung einer der Regeln entsteht.

---

[2] Die Sprache der Modallogik, die alle modallogischen Systeme enthält.
[3] Auch Gödelregel oder Nezessisierungsregel.

Definition:
Eine *normale* modale Logik enthält die Formeln der Art

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \text{ (K)}$$

und ist abgeschlossen unter der Notwendigkeitsregel (N). **K** ist gerade die kleinste *normale* modale Logik.
Für alle folgenden modallogischen Systeme bietet das System **K** immer die Grundlage.

Es gibt eine Reihe von Regeln und Theoremen, die in **K** gelten:

(1) $\mathbf{K} \vdash \alpha \to \beta \Rightarrow \mathbf{K} \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$
(2) $\mathbf{K} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \mathbf{K} \vdash \Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$
(3) $\mathbf{K} \vdash \alpha \to \beta \Rightarrow \mathbf{K} \vdash \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$
(4) $\mathbf{K} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \mathbf{K} \vdash \Diamond\alpha \leftrightarrow \Diamond\beta$
(5) $\mathbf{K} \vdash \Box(p \land q) \leftrightarrow (\Box p \land \Box q)$
(6) $\mathbf{K} \vdash \Box(p_1 \land \ldots \land p_n) \leftrightarrow (\Box p_1 \land \ldots \land \Box p_n)$
(7) $\mathbf{K} \vdash \alpha_1 \land \ldots \land \alpha_n \to \beta \Rightarrow \mathbf{K} \vdash \Box\alpha_1 \land \ldots \land \Box\alpha_n \to \Box\beta$
(8) $\mathbf{K} \vdash (\Box p \lor \Box q) \to \Box(p \lor q)$
(9) $\mathbf{K} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \mathbf{K} \vdash \varphi(\alpha / p) \leftrightarrow \varphi(\beta / p)$
(10) $\mathbf{K} \vdash \Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$
(11) $\mathbf{K} \vdash \Diamond(p \lor q) \leftrightarrow (\Diamond p \lor \Diamond q)$
(12) $\mathbf{K} \vdash \Diamond(p \to q) \leftrightarrow (\Box p \to \Diamond q)$
(13) $\mathbf{K} \vdash \Diamond(p \land q) \to (\Diamond p \land \Diamond q)$
(14) $\mathbf{K} \vdash \Box(p \lor q) \to (\Box p \lor \Diamond q)$
(15) $\mathbf{K} \vdash (\Diamond p \land \Box q) \to \Diamond(p \land q)$

Diese 15 Regeln und Therme gelten in jedem *normalen* System, da jedes *normale* System **K** enthält.
Nun zur Korrektheit und Vollständigkeit von **K**:
Jedes Theorem von **K** ist **K**-gültig, bedeutet: Für jede Formel φ gilt

$$\mathbf{K} \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{K} \models \varphi,$$

also gilt die Korrektheit für **K**.
Jede **K**-gültige Formel ist ein Theorem von **K**, bedeutet:

$$\mathbf{K} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{K} \vdash \varphi,$$

also gilt auch die Vollständigkeit von **K**.[4]

2.2. Verschiedene modallogische Systeme

Bevor weitere modallogische Systeme genannt werden sollen, erfolgt hier eine kurze Wiederholung der Definitionen von transitiven, reflexiven und symmetrischen Rahmen.[5]

Definition:
Ein Rahmen $\mathcal{F} = (W, \mathcal{R})$ ist

(1) transitiv genau dann, wenn für alle Formeln φ gilt $\mathcal{F} \vDash \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$.
(2) reflexiv genau dann, wenn für alle Formeln φ gilt $\mathcal{F} \vDash \varphi \to \Diamond\varphi$.
(3) symmetrisch genau dann, wenn für alle Formeln φ gilt $\mathcal{F} \vDash \varphi \to \Box\Diamond\varphi$.

2.2.1. Das modallogische System T

Bilde mit folgendem Axiom (auch Notwendigkeitsaxiom)

(T) $\Box p \to p$ oder auch $p \to \Diamond p$

das modallogische System **T**.
Da **K** $\nvdash \Box p \to p$ ist **T** eine echte Erweiterung von **K**, also **K** $\subset$ **T**. **T** ist genauso wie **K** vollständig und korrekt. Außerdem ist **T** gültig auf allen reflexiven Rahmen.[4]

2.2.2. Das modallogische System B

Bilde mit folgendem Axiom

(B) $p \to \Box\Diamond p$

das modallogische System **B**.
Da **T** $\nvdash p \to \Box\Diamond p$ ist **B** eine echte Erweiterung von **T**, also **T** $\subset$ **B**. **B** ist vollständig und korrekt.
Dieses modallogische System ist gültig auf allen symmetrischen Rahmen.[4]

2.2.3. Das modallogische System K4

Bilde mit folgendem Axiom

(K4) $\Box p \to \Box\Box p$

das modallogische System **K4**.
Da **K** $\nvdash \Box p \to \Box\Box p$ ist **K4** eine echte Erweiterung von **K**, also **K** $\subset$ **K4**. **K4** ist ebenfalls vollständig und korrekt. **K4** ist gültig auf allen transitiven Rahmen.
Hier wird das $\Box$-Symbol nun als „beweisbar“ interpretiert. Aus **K4** wird später mit zusätzlichen Theoremen und Regeln das modallogische System **GL** gebildet. Dort wird dann mehr auf das System **GL** eingegangen, da es der Kern der Beweisbarkeitslogik ist.[4]

2.2.4. Das modallogische System S4

Bilde mit folgenden Axiomen

(T)	$\Box p \rightarrow p$
(K4)	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$

das modallogische System **S4**. **S4** entsteht also aus **K** unter der Hinzunahme von (T) und (K4). Außerdem ist **S4** eine echte Erweiterung der Systeme **T** und **K4**. **S4** ist korrekt und vollständig.[4]

2.2.5. Das modallogische System S5

Bilde mit folgendem Axiom

(S5)	$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$

das modallogische System **S5**.

Da **S4** $\nvdash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ ist **S5** eine echte Erweiterung von **S4**, also gilt wieder **S4** $\subset$ **S5**. Auch **S5** ist vollständig und korrekt.[4]

3. Einführung in die Peano Arithmetik

Dieses besondere mathematische System soll kurz erläutert werden, da es in den meisten Fällen als Bezugssystem benutzt wird, wenn es um die Beweisbarkeitslogik geht.
Die Peano Arithmetik ist eine formale Definition für die Menge der natürlichen Zahlen. Hier wird die Definition aufgeführt und die Axiome genannt und erklärt. Die 0 wird hier als eine natürliche Zahl betrachtet. Die unten aufgelisteten Axiome lassen sich aber auch auf die natürlichen Zahlen ohne 0 anwenden.
Es muss ein Startelement und einen Nachfolger zu jeder Zahl geben, da die natürlichen Zahlen sehr eng mit dem Prinzip der Induktion zusammenhängen. Nun folgen die Peano-Axiome, erst einmal in weniger formaler Form:

i. 0 ist eine natürliche Zahl
ii. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger f, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist
iii. Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist
iv. Zwei Verschiedene natürliche Zahlen n und m besitzen stets verschiedene Nachfolger f und f'
v. Enthält eine Menge M die Zahl 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch stets deren Nachfolger f, so enthält M bereits alle natürlichen Zahlen

Das letzte Axiom wird auch Induktionsaxiom genannt, dieses bildet die Grundlage für den Beweis durch vollständige Induktion. Nun folgt eine formalisierte Variante der oben aufgeführten Peano-Axiome:

i. $0 \in \mathbb{N}$
ii. $\forall \mathrm{n}: \mathrm{n} \in \mathbb{N} \rightarrow f \in \mathbb{N}$
iii. $\forall \mathrm{n}: \neg(f = 0)$
iv. $\forall \mathrm{n}\ \forall \mathrm{m}: f = f' \rightarrow \mathrm{n} = \mathrm{m}$
v. $\forall \mathrm{M}: ((\mathrm{M}(0) \wedge \forall \mathrm{n}: \mathrm{M}(\mathrm{n}) \rightarrow \mathrm{M}(f)) \rightarrow \forall \mathrm{n}: \mathrm{M}(\mathrm{n}))$

Jetzt können die Peano-Axiome genutzt werden, um auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die Addition und Multiplikation zu definieren:

(1) $\mathrm{n} + 0 = \mathrm{n}$
(2) $\mathrm{n} + f' = (\mathrm{n} + f)'$

und

(1) $\mathrm{n} \cdot 0 = 0$
(2) $\mathrm{n} \cdot f' = (\mathrm{n} \cdot \mathrm{m}) + \mathrm{n}$

Setzt man nun noch $1 = 0'$, ergibt sich $f = \mathrm{n} + 1$.

Guiseppe Peano selbst begann die natürlichen Zahlen in seinen Axiomen mit der 1 statt der 0.
Diese Peano-Axiome bilden ein Axiomensystem der Prädikatenlogik zweiter Stufe, da es nicht nur Variablen für Zahlen gibt. Im Induktionsaxiom kommt auch die Variable M für die Menge vor. Ersetzt man aber nun dieses Axiom durch die entsprechenden unendlich vielen Axiome erster Stufe, so gelangt man zur Peano-Arithmetik.[i4]

4. Beweisbarkeitslogik

Wir betrachten an dieser Stelle das System **GL**, benannt nach den Logikern Kurt Gödel und Martin Löb. Oft wird es auch G oder L genannt. Das „$\Box$"-Symbol wir nun als „beweisbar" interpretiert. $\Box\varphi$ bedeutet jetzt also „φ ist beweisbar". **GL** ist eine *normale* modallogische Logik aufbauend auf dem modallogischen System **K**. In **GL** sind alle aussagenlogischen Tautologien enthalten.
Zunächst wird das **Löb-Axiom** gebildet:

$$\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$$

Intuitiv gesprochen bedeutet es:
Wenn bewiesen werden kann, dass eine Formel φ gilt, wenn sie beweisbar ist, dann beweist dies die Formel φ selbst.
Später wird noch einmal etwas ausführlicher auf den Satz von Löb eingegangen.
Da in **GL** alle Tautologien gelten und $\varphi \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \varphi)$ eine Tautologie ist, gilt nach der für **GL** gültigen Regeln die erste der 15 Regeln vom System **K**, also GL $\vdash \Box\varphi \rightarrow \Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi)$.
Daraus kann geschlussfolgert werden, dass sogar

$$\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \Box\varphi$$

gilt.
Das nächste Theorem zeigt, dass **K4** in **GL** enthalten ist. Demnach sind die Regeln und Theoreme von **K4** ebenfalls welche von **GL**:

$$\mathbf{GL} \vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$$

Dieses Theorem wurde bereits bei der Vorstellung des Systems **K4** genannt. Es wird jedoch auch öfter als ein Theorem von **GL** behandelt.
Nun ein Überblick über **GL**:
Axiome:

(Taut)	Alle aussagenlogischen Tautologien in der Sprache L_M
(K)	$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (Distributionsaxiom)
(K4)	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$
(Löb)	$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

Regeln:

(MP)	$\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ / β (Modus Ponens)
(Subst)	α / α^x für jede Substitution x (Substitutionsregel)
(N)	α / $\Box\alpha$ (Notwendigkeitsregel)

Die Regeln wurden bereits bei der Einführung des modallogischen Systems **K** genannt.

Da

$$\mathbf{GL} \nvdash \Box p \rightarrow p$$

und

$$\mathbf{S5} \nvdash \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$$

gilt, ist **GL** eine echte Erweiterung von **K4** und nicht kompatibel mit **T**.[4]

4.1.Satz von Löb

Bei der Einführung von **GL** wurde das Löb-Axiom in modallogischer Syntax präsentiert. Hier wird jedoch jetzt auf die mathematische Herkunft eingegangen.
Martin Löb bewies 1955 den Satz von Löb, ein Ergebnis der mathematischen Logik. Dieser Satz besagt, dass in einer Theorie T, die bestimmte einfache Eigenschaften erfüllt und die Beweisbarkeit in T repräsentieren kann, für jede Formel φ die Aussage „wenn φ beweisbar ist, dann φ" nur dann beweisbar ist, wenn φ beweisbar ist. Diese Aussage entspricht der Aussage die im vorherigen Kapitel zur modallogischen Syntax getätigt wurde. Formal bedeutet das:

$$\text{Wenn } T \vdash Bew_T(Bew_T(\#\varphi) \rightarrow \varphi), \text{ dann } T \vdash Bew_T(\varphi).$$

Bew ist das Beweisbarkeitsprädikat. Es ist bereits aus dem 1. Kapitel bekannt. Hier wird lediglich eine leicht abgeänderte Syntax verwendet. $Bew_T(\#\varphi)$ bedeutet, dass die Formel φ in T beweisbar ist, wobei #φ die Gödelnummer zur Formel φ ist. Die Voraussetzungen sind in allen hinreichend mächtigen mathematischen Theorien erfüllt, wie zum Beispiel auch in der Peano Arithmetik.
Der Satz von Löb lässt sich ausgehend von wenig abstrakten Eigenschaften von Beweisbarkeit zeigen.
Es folgt nun ein kurzer verständlicher Beweis.
Zuerst die Voraussetzungen:
Bew heißt Beweisbarkeitsprädikat für eine Theorie T, wenn es für alle Formeln φ, ψ folgende drei Bedingungen erfüllt:

i. Wenn $T \vdash \varphi$, dann $T \vdash Bew(\#\varphi)$
ii. $T \vdash Bew(\#(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (Bew(\#\varphi) \rightarrow Bew(\#\psi))$
iii. $T \vdash Bew(\#\varphi) \rightarrow Bew(\#Bew(\#\varphi))$

Nun hat die Theorie T folgende Eigenschaften:

(1) T besitzt ein Beweisbarkeitsprädikat *Bew*
(2) Diagonalisierung: In dieser Theorie T hat jede Formel mit freier Variable einen Fixpunkt im folgenden Sinne: Ist $\varphi(x)$ eine Formel mit freier Variable x, dann gibt es eine Formel ψ, sodass gilt: $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\#\psi)$, das bedeutet, ψ hat die intuitive Bedeutung „Ich habe die Eigenschaft $\varphi(x)$."

Mit den genannten Voraussetzungen lässt sich der Satz von Löb nun wie folgt beweisen:
Sei φ eine Formel mit

$$\text{(A)} \qquad T \vdash \mathit{Bew}(\#\varphi) \to \varphi$$

Durch Diagonalisierung erhält man aus der Formel

$$(\mathit{Bew}(x) \to \varphi)$$

eine Formel ψ mit

$$\text{(D)} \qquad T \vdash \psi \leftrightarrow (\mathit{Bew}(\#\psi) \to \varphi)$$

(1)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#(\psi \to (\mathit{Bew}(\#\psi) \to \varphi)))$	durch i.
(2)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#(\psi \to (\mathit{Bew}(\#\psi) \to \varphi)))$ $\to (\mathit{Bew}(\#\psi) \to \mathit{Bew}(\#\mathit{Bew}(\#\psi) \to \varphi))$	durch ii.
(3)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#\psi) \to \mathit{Bew}(\#(\mathit{Bew}(\#\psi) \to \varphi)))$	(1) und (2)
(4)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#(\mathit{Bew}(\#\psi) \to \varphi))$ $\to (\mathit{Bew}(\#\mathit{Bew}(\#\psi)) \to \mathit{Bew}(\#\varphi))$	durch ii. und (D)
(5)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#\psi) \to (\mathit{Bew}(\#\mathit{Bew}(\#\psi)) \to \mathit{Bew}(\#\varphi))$	(3) und (4)
(6)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#\psi) \to \mathit{Bew}(\#\mathit{Bew}(\#\psi))$	durch iii.
(7)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#\psi) \to \mathit{Bew}(\#\varphi)$	(5) und (6)
(8)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#\psi) \to \varphi$	(A) und (7)
(9)	$T \vdash \psi$	(D) und (8)
(10)	$T \vdash \mathit{Bew}(\#\psi)$	durch i.
(11)	$T \vdash \varphi$	(8) und (10)

Der Satz von Löb ist ein wichtiges und grundlegendes Theorem in der Beweisbarkeitslogik. Er spielt aber auch an anderen Stellen eine wichtige Rolle. So zum Beispiel beim Henkinsatz. Dieser drückt seine eigene Beweisbarkeit aus. Der Satz von Löb wird hier als Mittel genutzt um zu zeigen, dass jeder Henkinsatz beweisbar ist.

Ist φ ein Henkinsatz, dann gilt

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathit{Bew}_T(\#\varphi),$$

also gilt nach Löbs-Theorem

$$T \vdash \varphi.$$

Auch eine Rolle spielt der Satz von Löb im zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Dieser besagt, dass ein hinreichend starkes und konsistentes formales System die eigene Konsistenz nicht beweisen kann. Nun kann man aus dem Satz von Löb folgern:
Angenommen T beweist die eigene Konsistenz, bedeutet

$$T \vdash \neg Bew_T(\#\bot),$$

dann gilt äquivalent dazu

$$T \vdash (Bew(\#\bot) \to \bot).$$

Nach dem Satz von Löb ist somit $T \vdash \bot$ und T ist inkonsistent.[i6]

4.2. Der Henkinsatz

An dieser Stelle der Bachelorarbeit soll ein kleiner Exkurs zum Henkinsatz erfolgen.[1]
Ein Henkinsatz, oder auch Satz von Henkin, behauptet seine eigene Beweisbarkeit in einem formalen System. Benannt ist dieser Satz nach dem mathematischen Logiker Leon Henkin.
Formal bedeutet diese Aussage über die eigene Beweisbarkeit: wenn φ ein Henkinsatz ist, dann gilt

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow Bew_T(\#\varphi).$$

In oben referenzierter Quelle wird den Lesern die Frage gestellt, ob sie herausfinden können, wie sich der Henkinsatz vom Gödelsatz unterscheidet. Der Unterschied liegt in der Ableitbarkeit.
Der Henkinsatz gibt kein vollständiges Rezept für seine eigene Ableitung an. Er besagt nur, dass eine existiert. Folgendes Zitat dazu stammt auch aus dieser Quelle:

„Man kann sich wohl fragen, ob diese Behauptung gerechtfertigt ist. Besitzen Henkin-Sätze Ableitungen? Sind sie, wie behauptet, SÄTZE? Es ist nützlich sich daran zu erinnern, daß man einem Politiker, der „Ich bin ehrlich“ sagt, nicht zu glauben braucht. Vielleicht ist er ehrlich, vielleicht auch nicht. Sind Henkin-Sätze vertrauenswürdiger als Politiker? Es stellt sich heraus, daß diese Henkin-Sätze so unbezweifelbar, wie Menschen fünf Finger an einer Hand haben, die Wahrheit sagen. Warum dem so ist, ist nicht so leicht zu erkennen, aber wir wollen diese kuriose Tatsache unbewiesen zur Kenntnis nehmen.“[4]

[4] Gödel, Escher, Bach 2008, 578.

Es wird zwischen impliziten und expliziten Henkinsätzen unterschieden. Implizite Henkinsätze sind in der Form:

„Es existiert eine Folge von Zeichenketten die eine Ableitung von mir ist."

Wohingegen explizite Henkinsätze eher so aussehen:

„ Die hier beschriebene Folge von Zeichenketten . . . ist eine Ableitung von mir."

Der implizite Henkinsatz beweist sich selbst, sagt aber nichts über den Beweis aus. Die expliziten Henkinsätze hingegen geben Anweisungen zum Aufbau ihrer Beweise.[1]

4.3.Arithmetische Vollständigkeit von GL

Nun soll die arithmetische Vollständigkeit von **GL** dargestellt werden.[4]

Genutzt wird - wie gewohnt - eine Theorie T, die rekursiv axiomatisierbar ist in der Prädikatenlogik erster Stufe und die in der Sprache der elementaren Arithmetik EA formuliert ist und diese auch enthält. Außerdem ist das bereits bekannte Beweisbarkeitsprädikat $Bew_T(x)$ relevant und folgende, so definierte Konsistenzaussage:

$$\mathrm{Con}_T \coloneqq \mathrm{Con}(T) \coloneqq \neg Bew_T(\#\bot).$$

Wird nun ein Satz φ betrachtet, der seine eigene Beweisbarkeit aussagt, für den also

$$\mathrm{EA} \vdash \varphi \leftrightarrow Bew_T(\#\varphi)$$

gilt, so ergibt sich mit dem Satz von Löb, dass φ tatsächlich beweisbar ist.
Nun kann ein Zusammenhang zwischen Theorien T und der Modallogik hergestellt werden.
Folgende Abbildung wird dafür definiert:

Eine Abbildung f von der Menge der Aussagenvariablen in die Menge der arithmetischen Sätze (also aller prädikatenlogischen Aussagen in der Sprache von EA) heißt eine (arithmetische) Realisierung. Mit Hilfe einer Realisierung f lässt sich für jede Theorie T induktiv eine Abbildung definieren, die jede Formel φ der modalen Aussagenlogik in einen arithmetischen Satz $f_T(\varphi)$ übersetzt:

$$f_T(\bot) = \bot,$$
$$f_T(p) = f(p),$$
$$f_T(\alpha \to \beta) = f_T(\alpha) \to f_T(\beta),$$
$$f_T(\Box\alpha) = Bew_T(\#f_T(\alpha)).$$

$f_T(\varphi)$ heißt T-Interpretation von φ.

Es gilt insbesondere

$$\text{EA} \vdash f_T(\neg\Box\bot) \leftrightarrow \text{Con}_T \qquad \text{und} \qquad \text{EA} \vdash f_T(\Diamond\top) \leftrightarrow \text{Con}_T,$$

wobei $\top = \neg\bot$ ist.

Arithmetische Korrektheit von **GL**:
Sei φ eine Formel der modalen Aussagenlogik. Dann gilt

$$\mathbf{GL} \vdash \varphi \Rightarrow \text{Für jede Realisierung } f \text{ gilt EA} \vdash f_T(\varphi).$$

Ein Beispiel dazu:
Da

$$\mathbf{GL} \vdash \neg\Box\bot \rightarrow \neg\Box\neg\Box\bot$$

gilt, gilt nach arithmetischer Korrektheit auch

$$\text{EA} \vdash \text{Con(T)} \rightarrow \neg \mathit{Bew}_T(\#\text{Con(T)})$$

Falls die Theorie T korrekt ist, gilt auch die Umkehrung zu oben genanntem Satz:

$$\mathbf{GL} \vdash \varphi \Leftarrow \text{Für jede Realisierung } f \text{ gilt EA} \vdash f_T(\varphi).$$

Das bedeutet, dass **GL** gerade die Prinzipien der Beweisbarkeit in T axiomatisiert, die mit den Mitteln einer in T enthaltenen und EA umfassenden (rekursiv axiomatisierbaren und korrekten) Theorie verifiziert werden können.
Man kann also schlussfolgern:
Sei T korrekt. Dann gilt für alle modallogischen Formeln φ
(Arithmetische Vollständigkeit von **GL**)

$$\mathbf{GL} \vdash \varphi \Leftrightarrow \text{Für jede Realisierung } f \text{ gilt T} \vdash f_T(\varphi).$$

Man sagt zu diesem Sachverhalt auch, **GL** sei die Beweisbarkeitslogik von T.[4]

4.4.Das Fixpunkttheorem

An dieser Stelle soll über einen etwas weniger formalen Weg in das Fixpunkttheorem eingeführt werden. Es wird später benötigt um die Selbstreferenz von **GL** zu erläutern.
Nun wird ein Satz formuliert, der von sich selbst besagt, dass er nicht beweisbar ist. Das berühmteste Beispiel dafür ist der Lügner Satz: „Dieser Satz ist nicht wahr“. Dazu muss allerdings gegeben sein, dass man selbstreferentielle Sätze im Rahmen der zugrunde

gelegten Sprache formulieren kann. Kurt Gödel erreichte dies mit Hilfe der sogenannten Diagonalisierungsfunktion. Vereinfacht bedeutet das:
Die Diagonalisierung eines Ausdrucks a, in dem die freie Variable x vorkommt, ist das Ergebnis der Ersetzung einer Bezeichnung von a für jedes freie Vorkommen von x in a. So ist beispielsweise (ii) das Ergebnis der Diagonalisierung von (i):

(i) x ist lang
(ii) „x ist lang“ ist lang

Nun eine Verdeutlichung, wie mit Hilfe der Diagonalisierungsfunktion selbstreferentielle Sätze gebildet werden können:

(iii) Die Diagonalisierung von x ist lang
(iv) Die Diagonalisierung von „Die Diagonalisierung von x ist lang“ ist lang

(iv) behauptet, dass die Diagonalisierung von (iii) lang ist. Da (iv) aber gerade das Ergebnis der Diagonalisierung von (iii) ist, behauptet (iv) somit von sich selbst, lang zu sein.
Durch die Diagonalisierung kann jetzt also für jede Eigenschaft, die durch eine arithmetische Formel φ(x) ausgedrückt werden kann (wie beispielsweise die Eigenschaft der Beweisbarkeit), ein Satz gebildet werden, der von sich selbst behauptet, er habe die fragliche Eigenschaft φ. Dieses Ergebnis wird als Diagonalisierungslemma oder auch Fixpunktsatz bezeichnet. Er ist von Bedeutung für den Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem.
So erschließt sich die **Definition** des Diagonalisierungslemmas:

Sei T wieder eine Theorie, in der die Diagonalisierungsfunktion dargestellt werden kann. Dann gilt für jede Formel φ(x), die in der Sprache der Theorie T formulierbar ist und nur die freie Variable x enthält, dass es einen Satz ψ gibt, sodass folgendes erfüllt ist:

$$T \vdash \varphi(\#\psi) \leftrightarrow \psi$$

Die Objektsprache ist hierbei die Prädikatenlogik erster Stufe mit den Peano-Axiomen. Diese Form der Selbstreferenz für das von Gödel konstruierte Beweisbarkeitsprädikat. *Bew*(x) ist die Grundlage seines Beweises, indem gezeigt wird, dass der Satz „Dieser Satz ist nicht beweisbar“ bewiesen werden kann, was zum Widerspruch führt.[i3]

4.5. Das System GLS

Im Folgenden soll das System GLS beschrieben werden und daraufhin in die Selbstreferenz eingeleitet werden.[4]

Die Beweisbarkeitslogik hat mehrere Ziele. Eines davon ist die Charakterisierung der Gesetzmäßigkeiten der formalen Beweisbarkeit in einer Theorie T. Kurt Gödel hat jedoch durch seine Unvollständigkeitssätze gezeigt, dass das nicht eindeutig möglich ist. Es hängt von den verwendeten Mitteln ab, mit deren Hilfe Aussagen über die Theorie T getroffen werden. Hier unterscheidet Adrian Pigors zwischen der untersuchten Theorie T und der verwendeten Metatheorie U.

Auch hier ist die Theorie T wie bekannt definiert, rekursiv axiomatisierbar, in der Prädikatenlogik erster Stufe und der Sprache der elementaren Arithmetik EA, die zusätzlich die Arithmetik EA enthält. U sei dagegen eine beliebige Theorie, jedoch auch in der Prädikatenlogik erster Stufe, in der Sprache der elementaren Arithmetik und sie enthält ebenfalls EA.

Nun wird eine neue Menge definiert:

$$PL_T(U) \coloneqq \text{Die Beweisbarkeitslogik von T relativ zu U}$$

Sie enthält alle modalen Formeln φ, sodass $U \vdash f_T(\varphi)$ für jede Realisierung f gilt. Anschaulich gesagt, $PL_T(U)$ axiomatisiert diejenigen Prinzipien der Beweisbarkeit in T, die mit den Mitteln von U verifiziert werden können.

Nach dem ersten Satz von Solovay über die arithmetische Vollständigkeit für **GL** gilt:

$$PL_T(T) = \mathbf{GL}$$

Welche Prinzipien der Beweisbarkeit in T sind wahr? Diese Frage kann man auch formaler formulieren. Definiert man eine Menge TA als Menge aller wahren zahlentheoretischen Aussagen in der Sprache der elementaren Arithmetik, die nicht rekursiv axiomatisierbar ist, so kann man die Frage auch folgendermaßen stellen: Was ist $PL_T(TA)$?

Der zweite Satz von Solovay liefert darauf die Antwort:

GLS sei diejenige Modallogik, die als Axiome alle Theoreme von **GL** besitzt sowie das Reflexionsaxiom

$$\Box\varphi \rightarrow \varphi$$

enthält und die abgeschlossen ist unter der Regel Modus Ponens und der Substitutionsregel.

Man beachte: **GLS** ist keine normale Logik, da dieses System nicht unter der Notwendigkeitsregel abgeschlossen ist, sonst wäre es inkonsistent.

Ist T korrekt und φ eine modale Formel, so gilt:

$$\mathbf{GLS} \vdash \varphi \Leftrightarrow \text{Für jede Realisierung } f \text{ ist } f_T(p) \text{ eine wahre Aussage.}$$

Also gilt auch:

$$PL_T(TA) = \mathbf{GLS}.$$

$PL_T(U)$ ist allgemein gesprochen nicht notwendigerweise eine normale Modallogik, die **GL** umfasst. Außerdem gibt es noch andere Typen von Beweisbarkeitslogiken.[4]

4.6. Selbstreferenz in GL

Zunächst eine **Definition:**
Eine Aussagenvariable p, die in einer modalen Formel φ vorkommt heißt modalisiert in φ, wenn p in φ nur in gebundener Form an den Modaloperator $\Box$ auftaucht.
Beispielsweise ist p in den Formeln $\neg\Box p$ und $\Box(p \to q)$ modalisiert, aber nicht in $\Box p \to p$.

Hier noch eine Erläuterung folgender Syntax:

$$\varphi(q_1, \ldots, q_n).$$

Diese Schreibweise bedeutet, dass in der Formel φ genau die Aussagenvariablen $q_1, \ldots, q_n$ vorkommen. Außerdem stehe $\varphi(\alpha, q_1, \ldots, q_n)$ für die Substitution von α für p in der Formel

$$\varphi = \varphi(p, q_1, \ldots, q_n).$$

Wichtig für die Selbstreferenz ist der Fixpunktsatz von De Jongh und Sambin. Dieser besagt:
Ist p modalisiert in $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$, so gibt es eine modale Formel $\psi(q_1, \ldots, q_n)$ mit

i. $\mathbf{GL} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\psi, q_1, \ldots, q_n)$
ii. $\mathbf{GL} \vdash \Box(p \leftrightarrow \varphi(p, q_1, \ldots, q_n)) \land (p \leftrightarrow \varphi(p, q_1, \ldots, q_n)) \to (p \leftrightarrow \psi)$

Der Fixpunktsatz zeigt, dass der Gödelsche Satz

$$EA \vdash \tau \leftrightarrow \neg \mathit{Bew}_T(\#\tau),$$

indem τ seine eigene Unbeweisbarkeit besagt, äquivalent ist zum Satz Con(T).

Wenn

$$\varphi(p) \coloneqq \neg\Box p$$

ist, so ist p modalisiert in φ, und τ ist gerade eine arithmetische Lösung der modalen Äquivalenz

$$p \leftrightarrow \varphi(p)$$

da τ nach dem Diagonalisierungslemma bestimmt ist durch

$$T \vdash \tau \leftrightarrow \neg \mathit{Bew}_T(\#\tau),$$

für eine passende Realisierung f also $\tau = f_T(p)$ ist. Nach dem Fixpunktsatz gibt es nun eine modale Formel ψ, die die Aussagenvariable p nicht mehr enthält, die gerade ein Fixpunkt von φ ist, es gilt also:

$$\mathbf{GL} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\psi).$$

Diese modale Formel ist bis auf beweisbare Äquivalenz eindeutig bestimmt. $\psi = \neg\Box\bot$ ist in diesem Beispiel ein Fixpunkt von $\neg\Box p$, und es gilt tatsächlich $f_T(\psi) = Con(T)$ sowie

(1) $T \vdash Con(T) \leftrightarrow \neg \mathit{Bew}_T(\#Con(T))$ und
(2) $T \vdash \tau \leftrightarrow Con(T)$.[4]

5. Anwendungsbereich

Die Beweisbarkeitslogik vertritt einige Bereiche in der aktuellen Forschung. In diesem Kapitel soll darauf eingegangen werden, wo die Beweisbarkeitslogik ihre Bedeutung vertritt und welche Anreize sie für weitere Forschungen bietet. Dabei wird hauptsächlich auf die Grenzen des Geltungsbereiches von GL eingegangen. Es wird sich die Frage gestellt, für welche weiteren Theorien, außer der Peano Arithmetik, die Beweisbarkeitslogik die entsprechende Aussagenlogik ist.[i1]

5.1.Grenzen

Logiker haben in den letzten Jahren viele andere Systeme der Arithmetik untersucht, die schwächer als die Peano Arithmetik sind. Berechenbarkeitsprobleme dienten als Inspiration für sie, beispielsweise die Untersuchung von Funktionen die in Polynomialzeit berechenbar sind. Es wurde eine partielle Antwort auf die Frage gegeben: „Für welche Theorien der Arithmetik hält Solovay's arithmetisches Vollständigkeitstheorem, im Hinblick auf das entsprechende Beweisbarkeitsprädikat?".
Um über diese Frage nachzudenken, sollten zunächst zwei Konzepte erläutert werden.

Definition:
Δ_0-Formeln sind arithmetische Formeln, in denen alle Quantifizierer an einen Term gebunden sind. Z. B.

$$\forall y \leq ss0\ \forall z \leq y\ \forall x \leq y+z\ (x+y \leq (y+(y+z))),$$

wobei s der Nachfolgeoperator ("+1") ist.
Die arithmetische Theorie $I\Delta_0$ (I für Induktion) ähnelt der Peano Arithmetik, nur erlaubt sie weniger Induktion. Das Induktionsschema

$$A(0) \wedge \forall x\ (A(x) \rightarrow A(sx)) \rightarrow \forall x\ A(x)$$

ist beispielsweise auf die Δ_0-Formeln A beschränkt.

Es wurde von De Jongh und anderen 1991 vorgestellt, dass die arithmetische Vollständigkeit sicher für Theorien T gilt, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

(1) T beweist die Induktion für Δ_0-Formeln und T beweist EXP, also die Formeln, die ausdrücken, dass alle x auch 2^x stark sind. Insgesamt bedeutet das also: T erweitert $I\Delta_0 + EXP$.
(2) T beweist keine falschen Sätze der Form $\exists x\ A(x)$, mit $A(x)$ als Δ_0-Formel.

Es ist noch nicht klar, ob die erste Bedingung eine untere Schranke für den Bereich der Beweisbarkeitslogik ist. Eine offene Frage ist zum Beispiel noch, ob GL die Beweisbarkeitslogik von $I\Delta_0 + \Omega_1$, eine Theorie die etwas schwächer ist als $I\Delta_0 + EXP$, da Ω_1 das Axiom ist, dass besagt, dass für alle x auch $x^{\log(x)}$ gilt. Die Beweisbarkeitslogik GL ist in Bezug auf $I\Delta_0 + \Omega_1$ arithmetisch, mit Ausnahme einiger Ergebnisse von Berarducci (1991).

Durch das eben genannte Ergebnis von De Jongh wird ein starkes Merkmal der Beweisbarkeitslogik gezeigt: Für viele verschiedene arithmetische Theorien erfasst GL genau das, was solche Theorien über deren eigenes Beweisbarkeitsprädikat aussagen. Dies ist aber auch eine Schwäche. Beispielsweise deutet die Beweisbarkeitslogik nicht auf Unterschiede zwischen Theorien die endlich axiomatisierbar und denen, die es nicht sind, hin.[i1]

5.2.Erweiterungen

Forscher haben die Beweisbarkeitslogik auf vielfältige Weisen erweitert, um über Unterschiede zwischen Theorien sprechen zu können. Hier sollen ein paar genannt werden. Eine Erweiterung ist das Hinzufügen einer binären Modalität $\rhd$, die für eine gegebene arithmetische Theorie ausdrücken kann, dass der modale Satz $A \rhd B$ gilt.
Das bedeutet:

$$T + B \text{ ist interpretierbar in } T + A.$$

De Jongh und Veltman untersuchten die modale Semantik für mehrere Interpretationslogiken. Visser charakterisierte die Interpretationslogik der gebräuchlichsten endlich axiomatisierten Theorien und Berarducci und Shavrukov charakterisierten unabhängig voneinander die für die Peano Arithmetik, die nicht endlich axiomatisierbar ist. Es scheint also so, dass sich die Interpretationslogik von endlich axiomatisierbaren Theorien unterscheidet von der Interpretationslogik der Peano Arithmetik (vgl. Visser 1990, 1997; Berarducci 1990, Shavrukov 1988).[i1]

5.3.Aussagenquantifizierer

Eine andere Möglichkeit den Rahmen der Beweisbarkeitslogik zu erweitern, sind Aussagenquantifizierer, sodass man Prinzipien ausdrücken kann wie beispielsweise Goldfarb's:

$$\forall p \forall q \exists r \Box((\Box p \vee \Box q) \leftrightarrow \Box r),$$

der besagt, dass es für zwei Sätze einen dritten Satz gibt, der nur dann beweisbar ist, wenn einer der beiden ersten Sätze beweisbar ist. Dieses Prinzip ist sogar in der Peano Arithmetik beweisbar. Die Menge der Sätze von GL mit Aussagenquantifizierern, die arithmetisch gültig sind, erweist sich als eine unentscheidbare Menge.[i1]

5.4.Prädikaten-Beweisbarkeitslogik

Natürlich lässt sich auch die Prädikaten-Beweisbarkeitslogik näher betrachten. Diese Sprache entstammt hauptsächlich der Prädikatenlogik, nur ohne Funktionssymbole und mit dem $\Box$-Operator. Hier wird die Situation etwas komplexer als in der Beweisbarkeitslogik. Gibt es eine gut axiomatisierte Prädikaten-Beweisbarkeitslogik die adäquat ist und genau die gültigen Prinzipien der Beweisbarkeit beweist? Nein. Vardanyan hat 1986 auf der Basis von Ideen von Artemov bewiesen, dass die Menge der Sätze der Prädikaten-Beweisbarkeitslogik, die in PA beweisbar ist, nicht rekursiv aufzählbar ist, also hat sie keine vernünftige Axiomatisierung.[i1]

6. Fazit

Die vorliegende Arbeit führte in die Beweisbarkeitslogik ein. Die erforderlichen Grundlagen wurden erläutert und die wichtigste Arithmetik dargestellt. Durch Hinzunahme unterschiedlichster Axiome bekam der Leser nunmehr mehrere Erweiterungen des modallogischen Systems K „an die Hand“.
Der Kern der Arbeit bildete die strukturierte Darstellung ausgewählter Teilgebiete der Beweisbarkeitslogik. Exemplarisch erfolgte eine nähere Betrachtung des Satz von Löb bzw. des Henkinsatzes.
Eine mögliche Vertiefung dieses Themas könnten die Gödelschen Unvollständigkeitssätze, die Ableitbarkeit von Aussagen in formalen Systemen bieten um die Grenzen der formalen Systeme ab einer bestimmten Leistungsfähigkeit aufzuzeigen, darstellen.
Ein möglicher Anreiz zur Weiterbildung in diesem Thema bietet das Kapitel 5 „Anwendungsbereich“, in dem aufwandsbegründet lediglich eine aggregierte Sicht das Interesse wecken soll.
Zusammenfassend ist zu sagen, dass dieser Bereich der Modallogik – insbesondere auch außerhalb der ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen – eine vermehrtes Diskussionsaufkommen begründet und allein dadurch noch sehr viele Möglichkeiten bietet, sich weiterhin damit zu befassen.

7. Literatur

[1] J. S. Bach, M. C. Escher, K. Gödel, ein Endloses Geflochtenes Band, Stuttgart 2008.

[2] G. Boolos, The Logic of Provability, Cambridge 1993.

[3] C. v. Bülow, Beweisbarkeitslogik, Berlin 2006.

[4] A. Pigors, Seminar „Modallogik und Selbstreferenz", Hannover 2004/05.

[5] Prof. Dr. H. Vollmer, Skript zur Vorlesung „Logik und formale Systeme", Hannover 2015.

8. Internetquellen

[i1] http://plato.stanford.edu (22.01.2017)

[i2] https://math.berkeley.edu (22.01.2017)

[i3] https://www.philosophie.uni-bonn.de (22.01.2017)

[i4] http://www.mathepedia.de (22.01.2017)

[i5] https://www2.informatik.hu-berlin.de (22.01.2017)

[i6] http://vikimy.com (22.01.2017)