

# Vorlesung: Klassische Theoretische Physik II

M. Zirnbauer  
Institut für Theoretische Physik  
Universität zu Köln

Wintersemester 2015/16

## Contents

<b>6</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>3</b>
6.1	Überblick . . . . .	3
6.2	Visualisierung . . . . .	3
6.3	Inneres Produkt . . . . .	4
6.4	Lorentz-Kraft . . . . .	5
6.5	Messvorschrift für $B$ . . . . .	5
6.6	Unendlich lange, gerade Stromlinie . . . . .	6
6.7	Anschlussbedingungen an Grenzflächen . . . . .	7
6.8	Magnetostatische Aufgaben mit Euklidischen Symmetrien . . . . .	8
6.9	Messvorschrift für $H$ . . . . .	9
6.10	Dualität zwischen Elektro- und Magnetostatik . . . . .	12
6.11	Laplace-Operator auf Formen . . . . .	14
6.12	Vektorpotential und Coulomb-Eichung . . . . .	15
6.13	Induktionskoeffizienten . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Elektrodynamik: Grundgesetze</b>	<b>17</b>
7.1	Induktionsgesetz . . . . .	17
7.2	Ampere-Maxwell-Gesetz . . . . .	18
7.3	Lie-Ableitung . . . . .	19
7.4	Allgemeine Form des Induktionsgesetzes . . . . .	21
7.5	Energiesatz . . . . .	21
7.6	Spule in Bewegung: Relativitätsprinzip . . . . .	22
7.7	Wellengleichung (für $B$ ) und Minkowski-Metrik . . . . .	29
7.8	Bremsstrahlung einer Punktladung . . . . .	31
7.9	Raum-Zeit-Formulierung der Elektrodynamik . . . . .	31
7.10	Poincaré-Gruppe und Lorentz-Gruppe . . . . .	32
7.11	Elektrodynamik in Materie . . . . .	34

7.12	Skin-Effekt . . . . .	40
7.13	Fourier-Transformation . . . . .	41
7.14	Lösung der 1D Wellengleichung . . . . .	43
7.15	Lösung der 3D Wellengleichung . . . . .	45
<b>8</b>	<b>Lagrange-Mechanik</b>	<b>46</b>
8.1	Variationsrechnung . . . . .	46
8.2	Lagrange-Systeme . . . . .	48
8.3	Invarianz unter Punkttransformationen . . . . .	51
8.4	Zwangsbedingungen . . . . .	52
8.5	Begründung der Gebrauchsanweisung . . . . .	56
8.6	Parametrische Resonanz . . . . .	58
<b>9</b>	<b>Hamiltonsche Formulierung der Mechanik</b>	<b>62</b>
9.1	Legendre-Transformation . . . . .	62
9.1.1	Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	64
9.2	Die kanonischen Gleichungen . . . . .	65
9.3	Die Symplektische Gruppe $Sp(2f)$ . . . . .	68
9.4	Hamiltonsche Systeme . . . . .	70
9.4.1	Der klassische Spin . . . . .	71
9.4.2	Satz von Darboux . . . . .	73
9.5	Kanonische Transformationen . . . . .	74
9.6	Hamiltonsche Flüsse . . . . .	76
9.7	Symmetrien und Erhaltungssätze . . . . .	79
9.8	Die Poisson-Klammer . . . . .	81
9.8.1	Koordinatendarstellung der Poisson-Klammer . . . . .	82
9.8.2	Woher kommt die symplektische Struktur? . . . . .	83
9.9	Liouvillescher Satz . . . . .	84
9.10	Erzeugende Funktionen . . . . .	85
9.11	Elektrodynamik als Lagrange-System . . . . .	86
9.12	Elektrodynamik als Hamiltonsches System . . . . .	87
9.13	Nachtrag zur Magnetostatik: Biot-Savart-Gesetz . . . . .	89

**Literatur:**

H. Grauert, I. Lieb, *Differential- und Integralrechnung III*, Springer-Verlag (1968); IV. Kapitel  
F. Scheck, *Mechanik*, Springer-Verlag (1988)  
N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Lecture Notes in Physics, vol. 289, Springer (1987)  
V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1978)

## 6 Magnetostatik

### 6.1 Überblick

Akteure: magnetische Feldstärke  $B$  (2-Form vom geraden Typ),  
 magnetische Erregung  $H$  (1-Form vom ungeraden Typ),  
 elektrische Stromdichte  $j$  (2-Form vom ungeraden Typ).

Gesetze:  $dB = 0$  ("keine magnetischen Monopole"),  
 $dH = j$  ("Ampere'sches Gesetz"),  
 $B = \mu_0 * H$  ("Materialgleichung").

Bemerkungen: 1) Ampere-G. nur gültig im statischen Limes ( $\dot{D} = 0$ ).  
 2) Ampere  $\stackrel{d^2=0}{\sim} dj = 0$  ("Stromerhaltung").

### 6.2 Visualisierung

Wiederholung. Gitterkomplex  $K$  (Zellen mit innerer Orientierung),  
 dualer Komplex  $\tilde{K}$  (Zellen mit äußerer Orientierung).













Tautologische Paarung:  $C_k(K) \otimes C^k(K) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $c \otimes \omega \mapsto \int_c \omega$ .

Schnittpaarung:  $C^{d-k}(\tilde{K}) \otimes C^k(K) \rightarrow \mathbb{R}$  (hier:  $d=3$ ),  
 $\gamma \otimes \omega \mapsto \int \gamma \wedge \omega$ .

Kanonischer Isomorphismus  $\mathcal{I}: C_k(K) \rightarrow C^{d-k}(\tilde{K})$

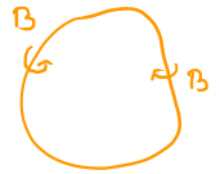
wird bestimmt durch die Forderung  $\int_c \omega = \int \mathcal{I}(c) \wedge \omega$  (für alle Test- $k$ -Koketten  $\omega$ ).

Tabelle (jetzt  $d=3$ ).

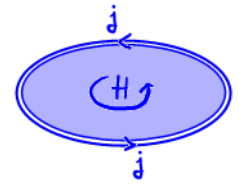
phys. Größe	Visualisierung	Bild	Rechnen	duals Bild	Kontinuum
$D$	$C_1(K)$		$C^2(\tilde{K})$		$\tilde{\Omega}^2(E_3)$
$E$	$C_2(\tilde{K})$		$C^1(K)$		$\Omega^1(E_3)$
$\rho$	$C_0(K)$		$C^3(\tilde{K})$		$\tilde{\Omega}^3(E_3)$
$B$	$C_1(\tilde{K})$		$C^2(K)$		$\Omega^2(E_3)$
$H$	$C_2(K)$		$C^1(\tilde{K})$		$\tilde{\Omega}^1(E_3)$
$j$	$C_1(K)$		$C^2(\tilde{K})$		$\tilde{\Omega}^2(E_3)$

## Veranschaulichung der magnetostatischen Gesetze.

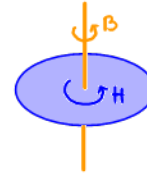
$dB = 0$  : die 1-Kette  $B \in C_1(\mathbb{R}^3)$  ist geschlossen (randlos); oder :  
 $\text{div } \vec{B} = 0$   
 magnetische Flusslinien haben keinen Anfang und kein Ende.



$dH = j$  : die 2-Kette  $H \in C_2(K)$  der magnetischen Erregung wird berandet  
 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$   
 von der 1-Kette  $j \in C_1(K)$  der elektrischen Stromdichte.



$B = \mu_0 * H$  : die (Fluss-)linien von  $B$  stehen senkrecht auf den  
 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$   
 (Erregungs-)flächen von  $H$ .



Bemerkung. Die Geometrie des Raumes geht nur in die Materialgleichung ein.

## 6.3 Inneres Produkt

1-Form  $\alpha = \sum \alpha_i dx^i$   
 Vektorfeld  $v = \sum v^i \partial_i$  } Kontraktion zu Funktion  $\alpha(v) = \sum \alpha_i v^i$ .

Neue Notation:  $\alpha(v) \equiv \iota(v) \alpha$  und

Erweiterung zu linearem Operator  $\iota(v) : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$

als Anti-Derivation (d.h. Leibnizregel mit alternierendem Vorzeichen):

$$\iota(v) (\alpha \wedge \beta) = (\iota(v) \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge (\iota(v) \beta)$$

Beispiel.  $B = \sum_{i < j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j$  ( $B_{ij} = -B_{ji}$ ).

$$\iota(v) B = \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} (v^i dx^j - dx^i v^j) = \sum_j \left( \sum_i v^i B_{ij} \right) dx^j.$$

Regel.  $\iota(v) \omega = \omega(v, \underbrace{\dots}_{k-1 \text{ freie Argumente}})$  ( $k$ -Form  $\omega$ )

Aufgabe. Visualisierung des Operators  $\iota(v)$  im Kettenbild.

## 6.4 Lorentz-Kraft

Ladung  $q$  am Ort  $p$  mit Geschwindigkeit  $v$  erfährt die (Lorentz-) Kraft

$$\vec{F} = q (\vec{E}_p - \iota(v) \vec{B}_p). \quad \vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

In (irgendwelchen) Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} B &= \sum_{i < j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ E &= \sum_j E_j dx^j \end{aligned} \right\} \vec{F}_j = q \left( E_j(p) - \sum_i v^i B_{ij}(p) \right).$$

Bemerkung.  $\iota(v)B = 0$ , falls  $v$  parallel zu den Flusslinien von  $B$ .

Frage: Wie steht's hier mit dem (uns aus der Mechanik bekannten) Relativitätsprinzip?

A: Das Relativitätsprinzip gilt (allerdings Lorentz statt Galilei) und hat folgende Konsequenz:

Inertialsystem/Beobachter 1:

$v=0$  (Ladung ruht),  $E^{(1)} = 0$ ,

$B^{(1)}$  zeitunabhängig (Flusslinien in Ruhe)

$\leadsto F^{(1)} = 0$  (Kraft gleich Null)

Inertialsystem/Beobachter 2:

Ladung (und magn. Flusslinien) in Bewegung mit Geschwindigkeit  $v$

Relativitätsprinzip  $\leadsto F^{(2)} = 0 = F^{(1)}$  (Kraft immer noch Null)

$\Rightarrow E^{(2)} = \iota(v) B^{(2)}$ .

Deutung (Vorwegnahme des Induktionsgesetzes): die bei der Bewegung magnetischer Flusslinien überstrichenen (infinitesimalen) Flächen sind (aktuelle) Flächenstücke der elektrischen Feldstärke.

## 6.5 Messvorschrift für $B$

Magnetische Feldstärke  $B$ , Fläche  $\Sigma$  mit innerer Orientierung,

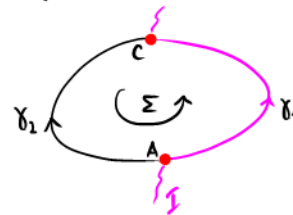


magnetischer Fluss durch  $\Sigma$ :  $\Phi_m(\Sigma) = \int_{\Sigma} B$ .

Messung von  $\int_{\Sigma} B$ .

1. Teile die Randlinie von  $\Sigma$  in zwei Hälften  $\gamma_1, \gamma_2$  (gleich lang) mit  $\partial\Sigma = \gamma_1 - \gamma_2$ .

2. Verlege stromführendes Kabel (flexibel) längs  $\gamma_1$ .



3. Bewege Kabel (bei festgehaltenem Teststrom  $I \neq 0$  und festgehaltenen Positionen  $A, C$  — siehe Skizze)

vom Anfangsverlauf  $\gamma_1$  längs  $\Sigma$  zum Endverlauf  $\gamma_2$  und messe die dabei verrichtete Arbeit  $W$ .

Behauptung:  $W/I = \int_{\Sigma} B$ .

**Beweis.** Parametrisiere  $\Sigma$  orientierungstreu durch  $[0,1]^2 \rightarrow E_3$ ,  $(s,t) \mapsto \varphi(s,t)$ ,  
 mit  $\varphi(s,0) = \gamma_1(s)$ ;  $\varphi(s,1) = \gamma_2(s)$ ;  $\varphi(0,t) = A$ ;  $\varphi(1,t) = C$ .

Dabei sei  $t \in [0,1]$  der Zeitparameter und  $s \in [0,1]$  die Kabelkoordinate, d.h.  $s \mapsto \varphi(s,t)$   
 parametrisiert den Kabelverlauf zur Zeit  $t$ . Es gelte  $\left| \frac{d}{ds} \varphi(s,t) \right| = v = \text{const.}$

Dann wirkt zur Zeit  $t$  auf das (infinitesimale) Kabelstück vom Punkt  $\varphi(s,t)$  zum Punkt  $\varphi(s+\delta s, t)$   
 die (infinitesimale) Lorentzkraft  $-\mathcal{I} \mathcal{B}_{\varphi(s,t)} \left( \frac{d}{ds} \varphi(s,t), \cdot \right) \delta s$ .

Die Verschiebung dieses Kabelstücks um den (infinites.) Translationsvektor  $\frac{d}{dt} \varphi(s,t) \delta t$  für den (infinites.)  
 Zeitschnitt  $\delta t$  erfordert die Energie  $+\mathcal{I} \mathcal{B}_{\varphi(s,t)} \left( \frac{d}{ds} \varphi(s,t), \frac{d}{dt} \varphi(s,t) \right) \delta s \delta t$ .

Die gesamte zu verrichtende Arbeit  $W$  ergibt sich durch Integration:

$$W = \mathcal{I} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{B}_{\varphi(s,t)} \left( \frac{d}{ds} \varphi(s,t), \frac{d}{dt} \varphi(s,t) \right) ds dt = \int_{\Sigma} \mathcal{B} \quad \blacksquare$$

**Bemerkung.** Aus der Reparametrisierungsinvarianz des Integrals folgt, dass die Arbeit  $W$  nicht von der  
 Schnelligkeit der Kabelbewegung abhängt und auch nicht von den Details des Kabelverlaufs für Zeiten  
 $0 < t < 1$ . Wichtig sind nur der Anfangs- und Endverlauf und dass die Kabelstellen  $A$  und  $C$   
 festgehalten werden.

## 6.6 Unendlich lange, gerade Stromlinie

Stromlinie  $j = \mathcal{I} \gamma$  (Strom  $\mathcal{I}$ , Gerade  $\gamma$ ).

Ansatz für die magnetische Erregung:

$$H = \frac{\mathcal{I}}{N} \sum_{i=1}^N \Sigma_i \quad \left( \begin{array}{l} \text{Halbebenen } \Sigma_i, \\ \text{alle mit Rand } \partial \Sigma_i = \gamma \end{array} \right).$$

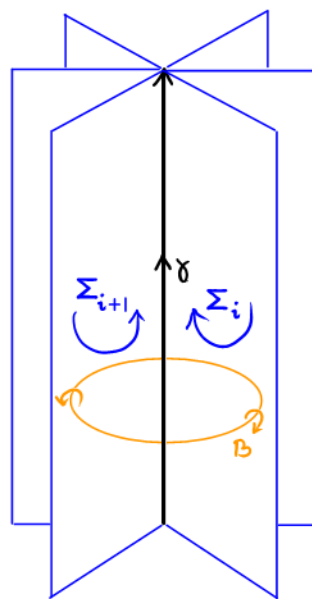
Dieser Ansatz erfüllt offensichtlich das Ampere-Gesetz.

Im Limes  $N \rightarrow \infty$  (und bei rotationssymmetrischer Anordnung der Halbebenen) gilt auch  
 $d\mathcal{B} = 0$ , denn die durch  $\mathcal{B} = \mu_0 * H$  ermittelten Linienstücke von  $\mathcal{B}$  fügen sich randlos  
 zu geschlossenen (um die Stromachse zentrierten) Kreislinien zusammen.

**Ausdrücke in Zylinderkoordinaten  $r, \theta, z$  (für  $\gamma = z$ -Achse):**

$H = \frac{\mathcal{I}}{2\pi} [d\theta; R]$  (denn es sind  $N$  Halbebenen, jede mit Faktor  $1/N$ , über die Bogenlänge  $2\pi$  zu verteilen).

$$\mathcal{B} = \mu_0 * H \rightsquigarrow \mathcal{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi r} dz \wedge dr.$$

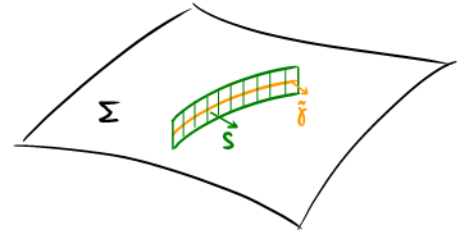


## 6.7 Anschlussbedingungen an Grenzflächen

Hier betrachten wir Situationen, wo Stromfluss nur innerhalb einer Fläche (nicht in offenen 3-dimensionalen Gebieten) stattfindet oder jedenfalls in guter Näherung so modelliert werden kann. Das führt zum Begriff der Linienstromdichte  $k$  (verhält sich zur elektrischen Stromdichte  $j$  so wie die Flächenladungsdichte  $\sigma$  zur elektrischen Ladungsdichte  $\rho$ ).

(Test-)Fläche  $S$  verlaufe transversal zur (Grenz-)Fläche  $\Sigma$  (s. Bild).

Schnittlinie  $\tilde{\gamma} = S \cap \Sigma$  trage äußere Orientierung (bzgl.  $\Sigma$  und induziert durch die äußere Orientierung von  $S$ ).



Bestimmungsgleichung für  $k$ : 
$$\int_{\tilde{\gamma}} k = \iint_S j.$$

Als Differentialform ist  $k$  eine 1-Form (auf  $\Sigma$ ) vom ungeraden Typ.

Im Kettenbild ist  $k$  eine 1-Kette (in  $\Sigma$ ) mit innerer Orientierung.

Anschlussbedingungen. Grenzfläche  $\Sigma$  verlaufe zwischen Gebiet/Medium 1 und Gebiet/Medium 2.

Die Fläche  $\Sigma$  trage die Linienstromdichte  $k \in \tilde{\Omega}^1(\Sigma)$ . Dann haben wir:

- (a)  $H_{\text{tang}}$  springt (durch  $\Sigma$ ) um  $k$ ,
- (b)  $B_{\text{tang}}$  ist stetig durch  $\Sigma$ .

Bemerkung.  $H_{\text{tang}}, B_{\text{tang}}$  meint jeweils den zu  $\Sigma$  tangentialen Anteil. Vermöge der Materialgleichung

$B = \mu_0 * H$  entspricht  $B_{\text{tang}}$  der Normalkomponente  $H_{\text{perp}}$ .

Im Folgenden erläutern wir die Anschlussbedingung (a).

Kettenbild.

$\partial \sigma^{(1)} = \gamma = \partial \sigma^{(2)}$

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)} &= \mathcal{I}^{(1)} \sigma^{(1)} \\ H^{(2)} &= \mathcal{I}^{(2)} \sigma^{(2)} \\ k &= \mathcal{I} \gamma \end{aligned} \right\} \text{(Ampere:)} \quad \mathcal{I}^{(1)} + \mathcal{I}^{(2)} = \mathcal{I}.$$

Spezialfälle:

$H^{(1)} = \mathcal{I} \sigma^{(1)}$   
 $k = \mathcal{I} \gamma$   
 $H^{(2)} = 0$

$H^{(1)} = 0$   
 $k = \mathcal{I} \gamma$   
 $H^{(2)} = \mathcal{I} \sigma^{(2)}$

Im Kalkül mit Differentialformen:

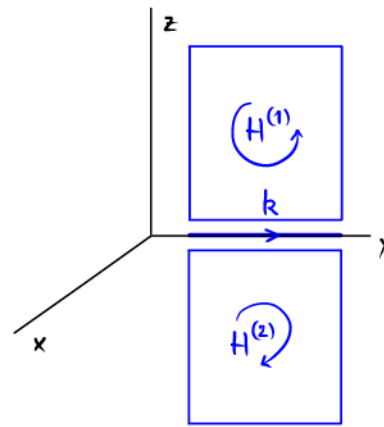
$H^{(i)}$  := Grenzwert von  $H$  bei Annäherung an die Fläche  $\Sigma$  vom Gebiet  $i$  ( $i = 1, 2$ ).

Anschlussbedingung:  $H^{(1)}, H^{(2)}$  unterscheiden sich um  $\pm k$ .

↖ Welches Vorzeichen?

Um das richtige Vorzeichen zu ermitteln, genügt es, eine möglichst einfache Situation zu betrachten:

Kartesische Koordinaten  $x, y, z$ ;  
 Grenzfläche:  $z=0$ ,  
 Gebiet 1:  $z > 0$ ,  
 Gebiet 2:  $z < 0$ .



$$H^{(1)} = \tilde{H}_x^{(1)} [dx; \mathcal{R}] \quad (\mathcal{R} \equiv \text{rechte Hand}),$$

$$H^{(2)} = \tilde{H}_x^{(2)} [dx; \mathcal{L}] \quad (\mathcal{L} \equiv \text{linke Hand}) \\ = -\tilde{H}_x^{(2)} [dx; \mathcal{R}].$$

$$\approx H^{(1)} + H^{(2)} = (\tilde{H}_x^{(1)} - \tilde{H}_x^{(2)}) [dx; \mathcal{R}] \\ \text{GUZ} = dx \wedge dy \quad k = \tilde{k}_x [dx; \text{GUZ}] \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} H^{(1)} + H^{(2)} \\ \text{GUZ} \end{matrix}} \right\} \tilde{H}_x^{(1)} - \tilde{H}_x^{(2)} = \tilde{k}_x.$$

Konvention:  $\left[ \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} ; \begin{matrix} \text{GUZ} \equiv \\ \text{"zuerst } x, \\ \text{dann } y" \end{matrix} \right] = \rightarrow$

### Koordinatenfreie Formulierung.

Wähle eine Raum-Orientierung  $Or_{E_3} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}\}$  und setze  $H^{(i)} = [\tilde{H}^{(i)}, Or_{E_3}]$ .

Wähle eine Grenzflächen-Orientierung  $Or_\Sigma$  und setze  $k = [\tilde{k}, Or_\Sigma]$ .

Wähle einen zu  $\Sigma$  transversalen Vektor  $v$  mit  $(Or_\Sigma; v) \hat{=} Or_{E_3}$  (z.B.  $\begin{matrix} v \\ \uparrow \\ \text{Or}_\Sigma \end{matrix} \hat{=} \mathcal{R} = Or_{E_3}$ ).

**Bemerkung.** Die Größen  $\tilde{H}^{(1)}$ ,  $\tilde{H}^{(2)}$  und  $\tilde{k}$  sind (von der Orientierungswahl abhängige) 1-Formen auf  $\Sigma$ .

$$\text{Setze } \begin{cases} \tilde{H}^{(+)} := \tilde{H}^{(1)} \text{ und } \tilde{H}^{(-)} := \tilde{H}^{(2)}, & \text{falls } v \text{ vom Gebiet 2 zum Gebiet 1 zeigt;} \\ \tilde{H}^{(+)} := \tilde{H}^{(2)} \text{ und } \tilde{H}^{(-)} := \tilde{H}^{(1)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:  $\boxed{\tilde{H}^{(+)} - \tilde{H}^{(-)} = \tilde{k}}$ .

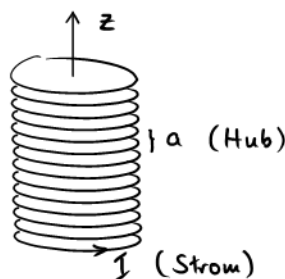
### 6.8 Magnetostatische Aufgaben mit Euklidischen Symmetrien

- Unendlich lang, gerade Stromlinie (✓ s. Abschn. 6.6)
- Unendlich lange, gerade Spule:

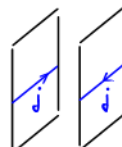
$\chi_{Zyl}$  := charakteristische Funktion für das Zylindergebiet der Spule

$$H = \frac{I}{a} \chi_{Zyl} [dz; \mathcal{R}],$$

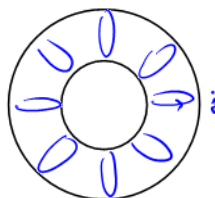
$$B = \frac{\mu_0 I}{a} \chi_{Zyl} dx \wedge dy.$$



- Aufgabe: zwei parallele stromführende Ebenen



- Aufgabe: Spule in Torusgeometrie





**Bemerkung.** Dass die obigen Aufgaben leicht in geschlossener Form lösbar sind, liegt in allen Fällen an der Existenz einer 1-Parameter-Symmetriegruppe von Euklidischen Bewegungen (also Translationen oder Drehungen), die den  $E_3$  jeweils in 2-dimensionale Blätter einteilt (Ebenen bzw. Halbebenen) und zwar so, dass jede Stromlinie in 1 Blatt liegt. In einer solchen Situation lässt sich die 3-dimensionale magnetostatische Aufgabe auf eine einfachere Aufgabe in 2 Dimensionen (genauer: irgend-einem Blatt) reduzieren. (Q: Wie?)

### Magnetostatik in 2 Dimensionen.

$B$  ist immer noch 2-Form vom geraden Typ (wegen  $\Omega^3(E_2) \equiv 0$  ist  $dB=0$  automatisch erfüllt).

$$\left. \begin{array}{l} H: 0\text{-Form} \\ j: 1\text{-Form} \end{array} \right\} \text{ vom ungeraden Typ; } dH=j.$$

Besteht die elektrische Stromdichte aus einer einzigen Stromlinie  $j = I\gamma$  (mit  $d\gamma=0$ ), welche das (orientierte) Gebiet  $\Sigma$  umschließt (mit  $\partial\Sigma = \gamma$ ), so ist  $H$  gleich  $I$  mal der (pseudoskalaren) charakteristischen Funktion zu  $\Sigma$ .

**Aufgabe ( $d=2$ ).** Sei  $j \in \tilde{\Omega}_c^1(E_2)$  eine glatte Stromdichte mit kompaktem Träger und  $dj=0$ .

Wie bestimmt man dann  $H$  aus  $dH=j$  (zur Randbedingung  $H=0$  im Unendlichen)?

(Hinweis: das Vorgehen ähnelt der Bestimmung eines Potentials zu einem konservativen Kraftfeld.)

### 6.9 Messvorschrift für $H$

Sei  $\tilde{\gamma}$  eine Kurve im  $E_3$  mit äußerer Orientierung.



Beachte: im Fall einer solchen Kurve kann man nicht von ihrem Anfang und/oder Ende sprechen.

Stattdessen hat  $\tilde{\gamma}$  zwei Randpunkte, von denen einer rechtshändig und der andere linkshändig ist.

Das Kurvenintegral  $\int_{\tilde{\gamma}} H$  heißt die magnetische Spannung längs  $\tilde{\gamma}$ .

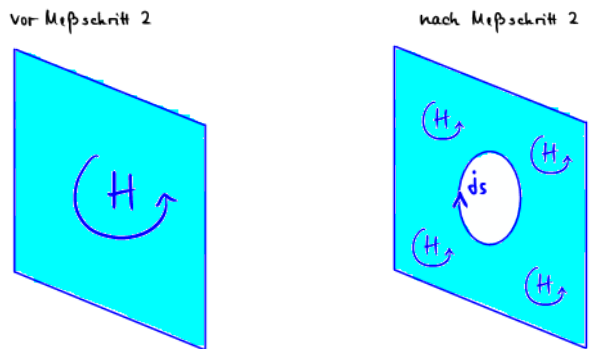
**Aufgabenstellung:** Messung der magnetischen Spannung  $\int_{\tilde{\gamma}} H$ .

**Lösung** (analog zur Messung von  $\int_S D$  mittels Maxwell'scher Doppelplatten):

1. Supraleitendes Vollrohr (dünn) der Kurve  $\tilde{\gamma}$  nachbilden.
2. Das SLVR entmagnetisieren ("zero-field quench") und an den Messort  $\tilde{\gamma}$  bringen.
3. Den um das SLVR zirkulierenden Gesamtstrom  $I_s$  messen.

(mit Vorzeichenkonvention für  $I_s$  gemäß der Zirkulation von  $\tilde{\gamma}$ )

**Erläuterungen.** Wir nehmen hier an, dass sich der Supraleiter in der sog. Meißner-Phase befindet. (Das heißt insbesondere, dass die Stärke des zu messenden Magnetfelds einen bestimmten kritischen Wert nicht überschreiten darf.) An der Oberfläche des Supraleiters fließt dann (bis zu einer gewissen Eindringtiefe) ein elektrischer (Supra-)Strom. Aus energetischen Gründen stellt sich die Supra-Stromdichte  $j_s$  genau so ein, dass die magnetische (Gesamt-)Erregung im Inneren des Supraleiters zu Null gemacht wird:



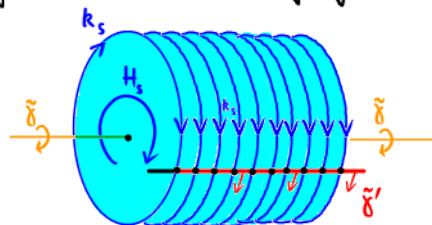
**Behauptung:**  $-\mathcal{I}_s = \int_{\tilde{\gamma}} H$ .

**Beweis.** Notation:  $H \equiv H^{(\text{vorher})}$ , die zu messende magnetische Erregung.  
 $H_s =$  der vom Suprastrom verursachte Beitrag zur magnetischen Erregung.  
 $H + H_s =$  die gesamte magnetische Erregung.

Im Inneren des Supraleiters (die Kurve  $\tilde{\gamma}$  eingeschlossen) gilt  $H + H_s = 0$ .

Es folgt  $\int_{\tilde{\gamma}} H = - \int_{\tilde{\gamma}} H_s = - \int_{\tilde{\gamma}'} k_s = -\mathcal{I}_s$ .

vermöge der Anschlussbedingung zwischen  $H_s$  und der Linienstromdichte  $k_s$  auf der Oberfläche des Supraleiters.



**Bemerkungen.** Aus der Messvorschrift für  $H$  leitet man direkt das natürliche mathematische Modell für  $H$  ab:

Als Summe vieler Teilspannungen ist die magnetische Spannung ein Integral. Damit das Kurvenintegral  $\int_{\tilde{\gamma}} H$  unmittelbar definiert werden kann (ohne Hinzunahme von zusätzlicher Information wie Raugeometrie, die hier an sich nicht hingehört<sup>\*)</sup>), muss  $H$  eine 1-Form sein. Zur eindeutigen Festlegung des Vorzeichens für den gemessenen Stroms  $\mathcal{I}_s$  benötigt man eine Orientierungskonvention; diese wird mit der Wahl eines Zirkulationsinnes für die Kurve  $\tilde{\gamma}$  getroffen. Die Integrationslinie  $\tilde{\gamma}$  trägt demnach notwendig eine äußere/transversale Orientierung. Sinnvoll als Integranden für Integrale  $\int_{\tilde{\gamma}} H$  mit transversal orientierter Kurve  $\tilde{\gamma}$  sind nur 1-Formen vom ungeraden Typ. Es folgt  $H \in \tilde{\Omega}^1(E_3)$ .

<sup>\*)</sup> William v. Ockham (13. Jhd.): PRINCIPIA NON MULTIPLICANDA SUNT PRAETER NECESSITATEM.

Natur der elektromagnetischen Feldgrößen. Mit der gleichen Argumentationsweise wie für  $H$  folgert man aus den Messvorschriften für  $E, D, B, H$  die natürlichen Modelle für alle Feldgrößen:

$$E \in \Omega^1(E_3) \quad (\text{gerade 1-Form}), \quad D \in \tilde{\Omega}^2(E_3) \quad (\text{ungerade 2-Form}),$$

$$B \in \Omega^2(E_3) \quad (\text{gerade 2-Form}), \quad H \in \tilde{\Omega}^1(E_3) \quad (\text{ungerade 1-Form}).$$

Physikalische Dimensionen.

1. Absolute Dimension. Als sofortige Konsequenz der jeweiligen Messvorschrift hat man

$$[E] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}, \quad [D] = \text{Ladung},$$

$$[B] = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom}}, \quad [H] = \text{Strom}.$$

2. Relative Dimension. Wähle Koordinatenfunktionen  $x_i$  mit phys. Dimension Länge.

$$E = \sum_{i=1}^3 E_i dx^i \sim [E_i] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung} \cdot \text{Länge}}, \quad D = \sum_{i<j} D_{ij} [dx^i \wedge dx^j; Or] \sim [D_{ij}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}},$$

$$B = \sum_{i<j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j \sim [B_{ij}] = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom} \cdot \text{Fläche}}, \quad H = \sum_{i=1}^3 H_i [dx^i; Or] \sim [H_i] = \frac{\text{Strom}}{\text{Länge}}.$$

Aufgabe. Was ist hier zu ändern, wenn die Raumdimension nicht gleich 3 ist?

3. Einheiten.

$$[\epsilon_0] = \frac{[D_{ij}]}{[E_k]} = \frac{\text{Ladung}^2}{\text{Energie} \cdot \text{Länge}} = \frac{\text{Kapazität}}{\text{Länge}}, \quad \epsilon_0 = 8,854 \dots \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Jm}},$$

$$[\mu_0] = \frac{[B_{ij}]}{[H_k]} = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom}^2 \cdot \text{Länge}} = \frac{\text{Induktivität}}{\text{Länge}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{A}^2 \text{m}}.$$

$$[(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}, \quad (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 2,998 \dots \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{Lichtgeschwindigkeit})$$

$$[(\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2}] = \frac{\text{Ladung}^2}{\text{Energie} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{Strom}}{\text{Spannung}}, \quad (\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} = 0,2654 \dots \cdot 10^{-2} \frac{\text{C}^2}{\text{Js}}.$$

Mittelung. Leitwert-Quantum ( $\rightarrow$  Quanten-Halleffekt)  $:= \frac{e^2}{h}$ , wobei

$$e = 1,602 \dots \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{Ladung des Elektrons})$$

$$h = 6,626 \dots \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{Planck'sches Wirkungsquantum}).$$

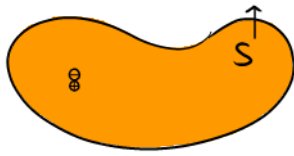
$$(\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} = \frac{e^2}{h} \cdot \frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha \approx \frac{1}{137} \quad (\text{Feinstrukturkonstante}).$$

## 6.10 Dualität zwischen Elektro- und Magnetostatik

Beispiel.

Elektrostatik:

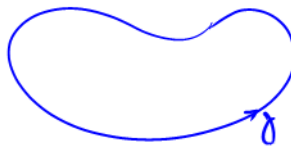
Dipolschicht



Berechne  $E, D$

Magnetostatik:

Stromschleife



Berechne  $B, H$

elektrische Ladungsdichte der Dipolschicht:

$$\rho = \nu d * S \quad \text{mit } \nu = \text{Dipolmoment/Fläche}$$

$$\text{Ansatz: } D = \nu * S + D_1.$$

$$\text{Aus } dD = \rho \text{ folgt } dD_1 = 0.$$

$$\epsilon_0 E = *D = \nu S + *D_1.$$

$$\text{Aus } dE = 0 \text{ folgt } d * D_1 = -\nu ds$$

elektrische Stromdichte der Stromschleife:

$$j = I \gamma \quad \text{mit } \gamma = \partial \Sigma, \quad S = [\Sigma; Or] \\ (\text{hier: } Or = R)$$

$$dB = 0.$$

$$\mu_0 H = *B$$

$$\text{Aus } dH = j \text{ folgt } d * B = \mu_0 I \partial \Sigma$$

Dieselben Gleichungen haben dieselben Lösungen. Deshalb folgt

$$\boxed{-\frac{1}{\nu} D_{\text{Dipolschicht}} = \frac{1}{\mu_0 I} [B_{\text{Stromschleife}}; Or]}$$

Beachte:  $dS$  für  $S$  als 1-Form entspricht genau (ohne Vorzeichenwechsel)  $\partial S$  für  $S$  als 2-Kette,

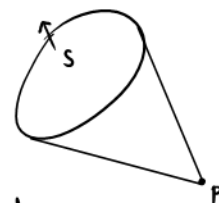
$$\text{denn } \int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega \stackrel{!}{=} \int I(S) \wedge d\omega \stackrel{P.S.}{=} \int dI(S) \wedge \omega, \quad \text{also } I(\partial S) = dI(S).$$

**WARNUNG:** meist sind wir schlampig und unterscheiden nicht zwischen  $c$  und  $I(c)$ .

Rechnung. Wir berechnen das elektrische Skalarpotential  $\Phi$  der Dipolschicht mit der aus der

Elektrostatik bekannten Lösungsformel für die Poisson-Gleichung (zu  $\Phi(\infty) = 0$ ):

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \int_{E_3} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r_p} = \int_{E_3} \frac{\nu d * I(S)}{4\pi\epsilon_0 r_p} = \frac{\nu}{4\pi\epsilon_0} \int_{E_3} \frac{1}{r_p} d * I(S) = \frac{\nu}{4\pi\epsilon_0} \int_{E_3} \left(-d \frac{1}{r_p}\right) \wedge * I(S) \\ &= \frac{\nu}{4\pi\epsilon_0} \int_{E_3} I(S) \wedge * \frac{dr_p}{r_p^2} = \frac{\nu}{4\pi\epsilon_0} \int_S * \frac{dr_p}{r_p^2} = \frac{\nu}{\epsilon_0} \int_S \frac{I_p}{4\pi}. \end{aligned}$$



Somit ist  $\Phi(p)$  gleich der elektrischen Spannung  $\frac{\nu}{\epsilon_0}$  mal dem

Raumwinkel  $/4\pi$ , unter dem die Fläche  $S$  vom Punkt  $p$  aus gesehen wird.

Nach der obigen Dualität folgt, dass das magnetische (Pseudo-) Skalarpotential  $\bar{\Psi}$  ( $H = d\bar{\Psi}$  auf  $E_3 \setminus S$ )

der Stromschleife  $j = I \gamma$  gleich  $I$  mal dem Raumwinkel  $/4\pi$  ist, unter dem die Schleife  $\gamma$  gesehen wird.

**Verallgemeinerung.** Sei  $\rho$  eine singuläre Ladungsdichte mit  $\int_{E_3} \rho = 0$ .

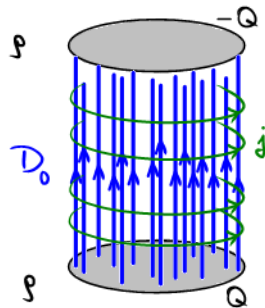
(Neben der Dipolschicht von oben verweisen wir auf weitere Beispiele, die unten gebracht werden.)

Dann wählen wir eine möglichst einfache (typisch singuläre) elektrische Erregung  $D_0$ , die das Gaußsche Gesetz erfüllt:  $dD_0 = \rho$ . Für das Restfeld  $D_1 = D - D_0$  folgen die Gleichungen  $dD_1 = 0$  und  $d * D_1 = d * (D - D_0) = \epsilon_0 dE - d * D_0 = -d * D_0$ .

Dieses Gleichungssystem  $dD_1 = 0$ ,  $dE_1 = -d * D_0 / \epsilon_0$  ( $E_1 \equiv * D_1 / \epsilon_0$ ) wird mit der Identifikation  $D_1 \equiv g [B_1; Or]$  (nach Wahl einer Orientierung  $Or$  und einer Konstanten  $g$  der Dimension  $\frac{\text{Strom}}{\text{Spannung}}$ ) zu  $dB = 0$ ,  $dH = j$  mit  $j = -(g\mu_0)^{-1} [d * D_0; Or]$ , also einer magnetostatischen Aufgabe.

**Beispiel.**

Kondensator aus zwei dünnen Platten



**Gegenrichtung.** Das Dualitätsargument funktioniert natürlich auch in der anderen Richtung.

Ausgehend vom Ampere-Gesetz  $dH = j$  mit einer singulären Stromdichte  $j$  (Beispiel aus den Übungen zur Vorlesung: dünne lange Spule,  $j = m d * \tilde{\gamma}$ ) wählt man eine singuläre magnetische Erregung  $H_0$  mit der Eigenschaft  $dH_0 = j$  (im Beispiel:  $H_0 = m * \tilde{\gamma}$ ). Für das Restfeld  $H_1 = H - H_0$  folgt  $dH_1 = 0$  und  $dB_1 = -\mu_0 d * H_0$  ( $B_1 \equiv \mu_0 * H_1$ ).

Nach Wahl einer Raum-Orientierung  $Or$  und einer Konstanten  $g$  setzt man wieder

$$D \equiv g [B_1; Or], \quad E = * D / \epsilon_0 \quad \text{und erhält das elektrostatische Problem}$$

$$dE = 0 \quad \text{und} \quad dD = \rho \quad \text{mit} \quad \rho = -\mu_0 g [d * H_0; Or].$$

So sieht man z.B., dass das Außenfeld  $(B_1, H_1)$  der langen dünnen Spule gleich dem Feld von zwei, an den Spulenden positionierten Punktladungen ist ( $\rho = q [d \tilde{\gamma}; Or]$ ,  $q = -\mu_0 g m$ ).

## 6.11 Laplace-Operator auf Formen

Auf den  $k$ -Formen in einem Raum  $M$  mit Hodge-Operator  $*$  haben wir das Skalarprodukt

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta.$$

(Ist  $M$  nichtkompakt, so verlangen wir, dass mindestens einer der Faktoren  $\alpha, \beta$  kompakten Träger hat.)

Hiermit definieren wir den zur äußeren Ableitung  $d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$

adjungierten Operator  $-\delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  (für  $k \geq 1$ ) in der bekannten Weise:

$$(\alpha, d\omega) = (-\delta\alpha, \omega) \quad \text{für alle } \alpha \in \Omega^k(M) \text{ und } \omega \in \Omega^{k-1}(M).$$

$$\text{Explizit: } (-\delta\alpha, \omega) = \int_M \alpha \wedge * d\omega = \int_M d\omega \wedge * \alpha = -(-1)^{\deg(\omega)} \int_M \omega \wedge d* \alpha$$

$$= (-1)^k \int_M *^{-1} d* \alpha \wedge * \omega = (-1)^k (*^{-1} d* \alpha, \omega).$$

Hieraus lesen wir ab:  $\delta = (-1)^{k-1} *^{-1} d *$  (auf  $k$ -Formen).

Der so definierte Operator  $\delta$  heißt Ko-Ableitung. Beachte:  $d^2 = 0 \leadsto \delta^2 = 0$ .

**Definition** (Laplace-Operator auf Differentialformen):

$$\Delta = \delta d + d \delta.$$

**Behauptung.** In kartesischen Koordinaten  $x^i$  gilt:

$$\Delta \left( \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) = \sum \left( \Delta \omega_{i_1 \dots i_k} \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

**Beweis** für  $k=1$ ,  $M = E_3$ .

$$d(f dx) = (\partial_y f) dy \wedge dx + (\partial_z f) dz \wedge dx.$$

$$\begin{aligned} \delta d(f dx) &= - * d \left( \partial_y f [dz, L] + \partial_z f [dy, R] \right) \\ &= - * \left( \partial_x \partial_y f [dx \wedge dz, L] + \partial_y^2 f [dy \wedge dz, L] \right. \\ &\quad \left. + \partial_z^2 f [dz \wedge dy, R] + \partial_x \partial_z f [dx \wedge dy, R] \right) \\ &= - (\partial_x \partial_y f) dy + (\partial_y^2 f) dx + (\partial_z^2 f) dx - (\partial_x \partial_z f) dz. \end{aligned}$$

$$\delta(f dx) = + * d * (f dx) = * d(f [dy \wedge dz, R]) = \partial_x f.$$

$$d\delta(f dx) = (\partial_x^2 f) dx + (\partial_y \partial_x f) dy + (\partial_z \partial_x f) dz.$$

$$\text{Es folgt } \Delta(f dx) = (\delta d + d\delta)(f dx) = (\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f) dx = (\Delta f) dx. \blacksquare$$

Vergleich mit Vektorkalkül.

$$k=0 \text{ (Funktionen)}: \Delta = \delta d = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}.$$

$$k=1 \text{ (1-Formen)}: \Delta = \delta d + d\delta \text{ entspricht } \Delta = -\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} + \operatorname{grad} \circ \operatorname{div} \text{ (auf Vektorfeldern).}$$

## 6.12 Vektorpotential und Coulomb-Eichung

Löse jetzt  $dB=0$  durch den Ansatz  $B=dA$  (A "Vektorpotential" oder Eichpotential).

Die 1-Form A ist nicht eindeutig bestimmt:  $B=dA=d(A+df)$ , Funktion f beliebig.

$$\text{Coulomb-Eichung: } \delta A = 0 \quad (\Leftrightarrow d * A = 0). \\ \text{div } \vec{A} = 0$$

Aufgabe. Warum läßt sich zu vorgebenem B immer ein A finden, das die Coulomb-Eichung erfüllt?

Poisson-Gleichung für A.

$$\mu_0 j = \mu_0 dH = d * B = d * dA \sim \mu_0 * j = * d * dA = -\delta dA.$$

Erfüllt A die Coulomb-Eichbedingung  $\delta A = 0$ , so kann  $-d\delta A = 0$  auf der rechten Seite hinzugefügt werden,

und es folgt

$$\boxed{-\Delta A = \mu_0 * j}. \quad (\text{Vgl. mit Elektrostatik: } -\Delta \Phi = * \rho / \epsilon_0.)$$

In kartesischen Koordinaten ( $A = \sum A_i dx_i$ ) zerfällt diese Gleichung gemäß  $\Delta \sum A_i dx_i = \sum (\Delta A_i) dx_i$

in 3 Poisson-Gleichungen für die Komponenten von A:  $-\Delta A_i = \mu_0 (*j)_i \quad (i=1,2,3).$

$$\text{Lösung: } A_i(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{(*j)_i}{r_p} d\text{vol}.$$

Aufgabe. In kartesischen Koordinaten gilt  $(*j)_i d\text{vol} = j \wedge dx_i$ .

$$\text{Alternative Lösungsformel: } A_i(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{j \wedge dx_i}{r_p}.$$

$$\text{Spezialfall. Für eine Stromlinie } j = I \gamma \text{ hat man } A_i(p) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dx_i}{r_p}.$$

Multipolentwicklung. Geht analog zum Vorgehen in der Elektrostatik: Stromdichte lokalisiert in Gebiet U;

U zentriert um Koordinatenursprung; Beobachtungspunkt p weit außerhalb von U.

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_U \left( \frac{1}{r(p)} + \sum_l \frac{x_l(p)}{r(p)^3} x_l(\cdot) + \dots \right) j \wedge dx_k = 0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_l \frac{x_l(p)}{r(p)^3} \int_U j \wedge x_l dx_k + \dots \\ \text{wegen } \int j \wedge dx_k = - \int x_k dj = 0$$

$$\text{Ergebnis: } A_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_l \frac{x_l}{r^3} m_{lk} + \dots \quad \text{mit } m_{lk} = \int_U j \wedge x_l dx_k = -m_{kl}.$$

Der schiefsymmetrische Tensor zweiter Stufe  $m_{kl} = -m_{lk}$  heißt das magnetische Dipolmoment der Stromverteilung j.

(Er ähnelt in seiner mathematischen Natur einem Drehimpuls.)

**Aufgabe.** Hat  $j$  die physikalische Bedeutung einer Massenstromdichte, so sind  $L_{ke} = \int j \wedge x_k dx_e$  die Komponenten des Drehimpulses (als Element von  $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ ) der Massenstromverteilung.

(Hinweis: Massendichte  $\rho$ , Massenstromdichte  $j$  und Geschwindigkeitsfeld  $v$  hängen zusammen über  $j = \rho(v)$ .)

## 6.12 Induktionskoeffizienten

Mitteilung. Die im Magnetfeld enthaltene Energie ist

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int B \wedge H \quad (\text{Beweis benützt Induktionsgesetz; wird später nachgeholt}).$$

Wähle ein Vektorpotential ( $B = dA$ )  $\leadsto E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int dA \wedge H = \frac{1}{2} \int A \wedge dH = \frac{1}{2} \int A \wedge j$ .

$$(\text{Vgl. mit } E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int E \wedge D = \frac{1}{2} \int \Phi \rho.)$$

Für ein System von  $N$  Stromlinien ( $j = \sum_{k=1}^N I_k \gamma_k$ ) erhält man

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \int_{\gamma_k} A.$$

Nun drücken wir  $A$  (in Coulomb-Eichung) als Summe über die  $N$  Stromlinien aus:

$$A_i(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\ell=1}^N I_\ell \int_{\gamma_\ell} \frac{dx_i}{r_p}.$$

Einsetzen in den obigen Ausdruck ergibt dann eine Summe über Paare  $\gamma_k, \gamma_\ell$  von Stromlinien.

Zur Notation des Doppelintegrals ( $\gamma_k \times \gamma_\ell \subset E_3 \times E_3$ ) verwenden wir kartesische Koordinaten  $x_i$

im linken Faktor  $E_3$  und  $x'_i$  im rechten Faktor  $E_3$ . Es folgt

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} L_{ke} I_k I_\ell \quad \text{mit} \quad L_{ke} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma_k} \int_{\gamma_\ell} \frac{\sum dx_i dx'_i}{\sqrt{\sum (x_i - x'_i)^2}} \quad (\text{Induktionskoeffizient}).$$

**Beachte:** die Selbstinduktionskoeffizienten  $L_{ee}$  divergieren in der mathematischen Idealisierung von  $j$  als System von Stromlinien. (In diesem Fall muss die endliche Dicke des stromführenden Drahts berücksichtigt werden.)