zur Formulierung der allgemeinen Postulate der QM benötigen wir:

- Dirac-Notation
- Hermitescher Operator
- Hermitesche Adjunktion

Dirac-Notation:

(i) $\boxed{\psi \in \mathcal{H}} \longrightarrow \boxed{|\psi\rangle \quad (\text{„ket } \psi\text{"})}$

$\varphi \longrightarrow |\varphi\rangle$

$\alpha\psi + \beta\varphi \longrightarrow \alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle$ usw.

(ii) der <u>duale Vektor</u> zu $|\psi\rangle$ wird geschrieben als

$$\boxed{\langle\psi| \qquad \text{„bra } \psi\text{"}}$$

und ist definiert durch Wirkung auf bel. $|\varphi\rangle$ gemäß

$$\boxed{\langle\psi|\varphi\rangle := \langle\psi,\varphi\rangle}$$

„bra" „ket" = „bracket"

⌈ d.h. $\langle\psi|$ ist die <u>lineare Abb.</u> $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$

$$|\varphi\rangle \mapsto \langle\psi|\varphi\rangle := \langle\psi,\varphi\rangle$$ ⌋

$\longrightarrow$ erlaubt einfache Notation von Operatoren!

Beispiele:

1) Projektion auf φ: $\quad P_\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$
$(\|\varphi\| = 1)$ $\quad \psi \mapsto P_\varphi \psi := \langle \varphi, \psi \rangle \varphi$

in Dirac-Notation: $\boxed{P_\varphi := |\varphi\rangle\langle\varphi|}$

$$\longrightarrow \quad P_\varphi |\psi\rangle = |\varphi\rangle \underbrace{\langle\varphi|\psi\rangle}_{=\langle\varphi,\psi\rangle} = \langle\varphi,\psi\rangle |\varphi\rangle$$

2) $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ seien orthonormal, P_1, P_2 seien Projektion auf $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$

dann etwa: (i) $P_1 P_1 = |\varphi_1\rangle \underbrace{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}_{=1} \langle\varphi_1| = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| = P_1$,

(ii) $P_1 P_2 = |\varphi_1\rangle \underbrace{\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle}_{=0} \langle\varphi_2| = 0$.

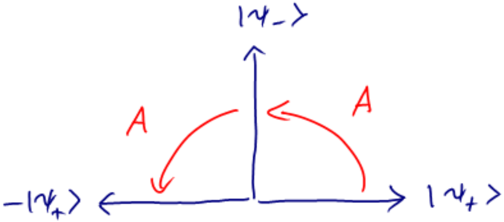
3) $|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$ sei ONB von $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

betrachte Operator $\boxed{A := |\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|}$

dann

- $A|\psi_+\rangle = (|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|)|\psi_+\rangle$
  $= |\psi_-\rangle\underbrace{\langle\psi_+|\psi_+\rangle}_{=1} - |\psi_+\rangle\underbrace{\langle\psi_-|\psi_+\rangle}_{=0} = |\psi_-\rangle$

- $A|\psi_-\rangle = (|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|)|\psi_-\rangle$
  $|\psi_-\rangle\underbrace{\langle\psi_+|\psi_-\rangle}_{=0} - |\psi_+\rangle\underbrace{\langle\psi_-|\psi_-\rangle}_{=1} = -|\psi_+\rangle$



d.h. $A \,\hat{=}\,$ Drehung um $\pi/2$

Hermitescher Operator

Hintergrund: physikalische Größen (auch: Observablen) wie etwa magnetisches Moment, Impuls, Ort, Energie, werden in der Quantenmechanik durch hermitesche Operatoren beschrieben!

Def.: A hermitescher Operator

$:\Longleftrightarrow$ es gibt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und ONB $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$ derart, dass

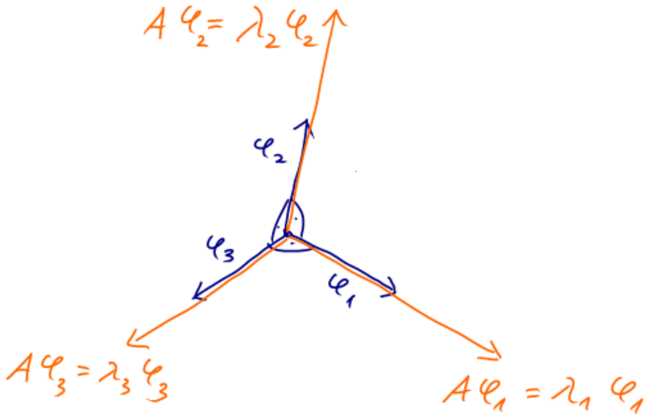
$$A = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \, |\varphi_\ell\rangle\langle\varphi_\ell| \; .$$

„Spektraldarstellung" von A

offenbar λ_i Eigenwert von A mit Eigenvektor $|\varphi_i\rangle$

⌜ denn $$A|\varphi_i\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell |\varphi_\ell\rangle \underbrace{\langle\varphi_\ell|\varphi_i\rangle}_{\hat{=}\,\delta_{\ell i}} = \lambda_i |\varphi_i\rangle$$

→ Jeder hermitesche Operator A besitzt orthonormale Eigenbasis $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$ und reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$



Bsp.: Projektion auf φ : P_φ

⌜ ergänze $|\varphi\rangle$ zu ONB

$|\varphi_1\rangle \equiv |\varphi\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$

dann $$P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi| \overset{!}{=} \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{1\ell} |\varphi_\ell\rangle\langle\varphi_\ell|$$ ⌟

Hermitesche Adjunktion

Def: der zu A hermitesch adjungierte Operator A^+ ist definiert durch

$$(*) \qquad \boxed{\langle A\psi, \varphi\rangle \overset{!}{=} \langle \psi, A^+\varphi\rangle}$$

für bel. $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$

typ. Anwendung:

$$\langle A\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, A^+\varphi\rangle$$

? !

Bemerkung: $(*) \iff \langle \varphi, A\psi\rangle^* = \langle \psi, A^+\varphi\rangle$

$\rightarrow$ $(*)$ in Dirac-Notation:

$$\boxed{\langle \varphi | A | \psi\rangle^* = \langle \psi | A^+ | \varphi\rangle} \qquad (*')$$

Beispiel:

$$\boxed{\left(|x_1\rangle\langle x_2|\right)^+ = |x_2\rangle\langle x_1|}$$

$$\langle\psi|\underbrace{\left(|x_1\rangle\langle x_2|\right)^+}|\varphi\rangle \overset{\text{Def. }(*')}{=} \left(\langle\varphi|x_1\rangle\langle x_2|\psi\rangle\right)^* \overset{!}{=} \langle\psi|\underbrace{x_2\rangle\langle x_1}|\varphi\rangle$$

$\overset{!}{=}$

Rechenregeln:

- $(A^+)^+ = A$
- $(A+B)^+ = A^+ + B^+$
- $(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$
- $(AB)^+ = B^+ A^+$!
- $(A^n)^+ = (A^+)^n$
- $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l x^l, \quad f_l \in \mathbb{R}$

$\rightarrow (f(A))^+ = f(A^+)$

Def: A selbstadjungiert $:\Leftrightarrow A^+ = A$

Satz: A selbstadjungiert $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ A hermitesch

$\ulcorner$ „$\Leftarrow$" folgt sofort mit $A = \sum_\ell \lambda_\ell |\varphi_\ell\rangle\langle\varphi_\ell|$; $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$

„$\Rightarrow$" vgl. Lineare Algebra: Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter Abbildungen / Matrizen $\lrcorner$

Beispiel: $P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ selbstadjungiert (denn $|\varphi\rangle\langle\varphi|^+ = |\varphi\rangle\langle\varphi|$)

und damit hermitesch ✓