

# Quanten-Hall-Effekt

FELIX BEHRENS

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Seminar: Quantenmechanik

Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. Wolschin

Oktober 21, 2016

## Zusammenfassung

*Der Quanten-Hall-Effekt (QHE) wirft auch 36 Jahre nach seiner Entdeckung durch Klaus v. Klitzing 1980 der aktuellen Forschung Fragen auf. Zwar existieren verschiedene Erklärungsmodelle für das Phänomen des ganzzahligen QHE, der gebrochenzahlige QHE ist jedoch noch nicht vollständig verstanden. Dieses Paper zum Seminarvortrag soll die Grundlagen des QHE vermitteln, wobei der Schwerpunkt auf dem ganzzahligen QHE liegt.*

## I. KLASSISCHER HALL-EFFEKT

Betrachten wir zunächst den klassischen Fall eines sich frei in einem Festkörper bewegenden Elektrons unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes  $\mathbf{B}$ . Aus der Elektrodynamik ist für diesen Fall die Bewegungsgleichung bekannt.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m_b} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{p}}{\tau} \quad (1)$$

Wir fügen einen Dämpfungsterm  $\mathbf{p}/\tau$  hinzu, der berücksichtigt, dass Elektronen an Gitterfehlstellen gestreut werden können, was der Bewegung entgegenwirkt. Die Masse  $m_b$  ist eine effektive Masse, die das Elektron durch die Anwesenheit des Festkörpers besitzt. Sie ist im Allgemeinen viel kleiner als die freie Masse und berücksichtigt unter anderem die

Krümmung der Energieflächen im Festkörper. Es habe nun das Magnetfeld in unserem Versuch nur eine  $z$ -Komponente. Führt man das Kreuzprodukt aus und stellt nach der  $x$ - und  $y$ -Komponente des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  um, kann man die Bewegungsgleichung im stationären Fall  $d\mathbf{p}/dt = 0$  in die Form

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu en_{el}} & \frac{-B}{en_{el}} \\ \frac{B}{en_{el}} & \frac{1}{\mu en_{el}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad (2)$$

bringen, wobei wir  $\mathbf{v} = \mathbf{j}/en_{el}$  und  $\mu = e\tau/m_b$  benutzt haben. Für die Einträge des Widerstandstensors lesen wir für die Diagonaleinträge eine Konstante und für die Nebendiagonale eine Proportionalität zur Magnetfeldstärke ab. Abbildung 1 zeigt ei-

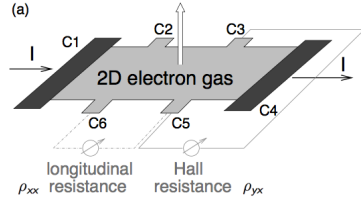


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Hallsonde [2](S.8)

nen schematischen Aufbau und den linearen Zusammenhang zwischen Längswiderstand und Magnetfeldstärke. Wie in Abbildung 2 zu sehen ist, nimmt der lineare Zusammenhang bei großen Magnetfeldstärken bestimmte Plateaus an.

## II. QUANTISIERUNGEN

### i. Landauniveaus

Um die Quantisierungen bei großen Magnetfeldstärken in Abbildung 2 zu verstehen, betrachten wir den Hamiltonoperator für ein freies Elektron im elektromagnetischen Potential.

$$H = \frac{(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m_b} + U(y) \quad (3)$$

Dabei wählen wir das Vektorpotential  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ , sodass  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, B)$

Da der Hamiltonoperator mit dem Impulsoperator kommutiert, können wir als Lösung für die stationäre Schrödingergleichung (SG1) den Ansatz einer ebenen Welle in  $x$ -Richtung machen:

$$\psi(x, y) = \phi(x)\chi(y) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx)\chi(y) \quad (4)$$

Dadurch vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\frac{1}{2m_b} [(\hbar k + eBy)^2 - p_y^2] \chi = E\chi. \quad (5)$$

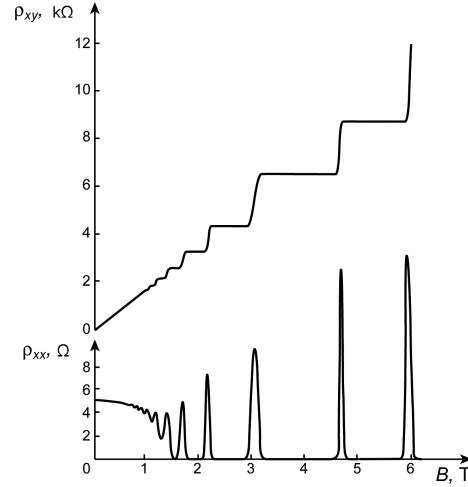


Abbildung 2: Quantisierung der Längs- und Querwiderstände beim ganzzahligen QHE [8]

Mit  $y_k = \hbar k / eB$ , einem Abstand im reziproken Raum, und  $\omega_C = eB / m_b$ , der Zyklotronfrequenz ergibt sich:

$$\left[ \frac{p_y^2}{2m_b} + \frac{1}{2} m_b \omega_c^2 (y - y_k)^2 \right] \chi(y) = E\chi(y). \quad (6)$$

Eigenfunktion und Energieeigenwerte sind vom harmonischen Oszillator bekannt:

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_C \quad (7)$$

Die diskreten Energiezustände werden Landauniveaus genannt.

### ii. Randkanäle

Aus der Energiequantisierung wird eine Strom- und damit eine Widerstandquantisierung, wenn wir uns ein Randpotential  $U(y)$  vorgeben und die Gruppengeschwindigkeit der Elektronen betrachten. Das Randpotential ergibt sich aus den endlichen Abmessungen der Hallsonde und beschreibt die Austrittsarbeit (siehe Abbildung 4). Es stellt eine Störung der

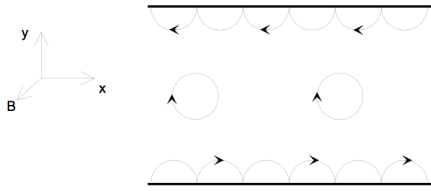


Abbildung 3: Skipping Orbits [6]

Energieeigenwerte dar, die wir nur bis zur ersten Ordnung mitnehmen.

$$E(n,k) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_C + U(y_k) \quad (8)$$

Die Gruppengeschwindigkeit der Elektronen ist definiert als:

$$\begin{aligned} v(n,k) &= \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} \\ &= \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U(y_k)}{\partial k} \\ &= \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U(y_k)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial k} \\ &= \frac{1}{eB} \frac{\partial U(y)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (9)$$

wobei  $y_k = \hbar k/eB$ , wie oben definiert. Dies bedeutet einerseits, dass die Gruppengeschwindigkeit nur am Rand nicht verschwindet und andererseits, dass an entgegengesetzten Rändern der Probe die Gruppengeschwindigkeit ein entgegengesetztes Vorzeichen besitzt. Halbklassisch kann man sich vorstellen, dass Elektronen sich auf Kreisbahnen um die Magnetfeldachse bewegen und an einer (in der Realität aufgeweichten) harten Wand reflektieren (vgl. Abbildung 3). Da sie ihren Drehsinn beibehalten, wandern die Elektronen am Rand der Probe in eine definierte Richtung.

Das Randpotential biegt die Landauniveaus am Rand der Hallsonde nach oben, dadurch schneiden diese die Fermienergie, wie in

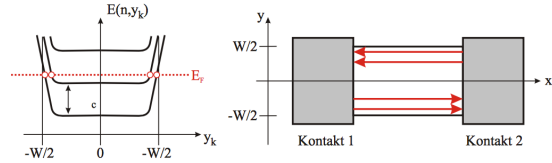


Abbildung 4: Randkanäle [10]

Abbildung 4 zu sehen ist. Die Fermienergie ist die maximale Energie, die ein besetzter Zustand in einem Festkörper (im Grundzustand) besitzen kann. Sie ist deshalb von Bedeutung, da sie im Energiediagramm die Grenze von besetzten zu unbesetzten Zuständen bildet. Wegen des Pauliprinzips kann nur an dieser Grenze eine makroskopische Bewegung der Elektronen stattfinden. Wir sehen also, dass sich an jedem Schnittpunkt eines Landauniveaus mit der Fermienergie ein Leitungskanal entsteht. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Fermienergie nicht mit einem Landauniveau zusammenfällt.

Der Strom  $I$  eines jeden solchen Leitungskanals ist gegeben durch:

$$I = e \cdot n_{el} \cdot v \quad (10)$$

mit der Elektronendichte  $n_{el}$ . Wenn wir die Integration über alle Impulse durch eine Energieintegration substituieren

$$I = \int_{\mu_u}^{\mu_0} e \cdot D_n(E) \cdot v_n(E) dE, \quad (11)$$

wobei die Integrationsgrenzen gleich den chemischen Potentialen der Messpunkte sind.

Mit  $D_n = \frac{1}{2\pi} \frac{dk}{dE_n}$  und  $v_n = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_n}{dk}$  ergibt sich

$$I = \frac{e}{h} (\mu_0 - \mu_u) = \frac{e^2}{h} U_H \quad (12)$$

Da wir von nicht untereinander wechselwirkenden Elektronen ausgehen, beträgt der

Gesamtstrom  $I_{ges}$  von  $\nu$  Leitungskanälen:

$$I_{ges} = \nu \frac{e}{h} (\mu_0 - \mu_u) = \nu \frac{e^2}{h} U_H \quad (13)$$

mit der Hallspannung  $U_H$ . Diese entsteht durch die Ladungverschiebung, verursacht durch das elektromagnetische Potential. Damit ist der Querwiderstand:

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} = \frac{1}{\nu} \cdot 25\,821,8 \, \Omega \quad (14)$$

Für den Längswiderstand gilt:

$$\rho_{xx} = 0, \quad (15)$$

da hier die Kontakte auf gleichem Potential liegen.

### iii. Lokalisierte Zustände

Die zuvor gemachte Annahme, dass die Fermienergie nicht mit einem Landauniveau zusammenfällt, scheint gar nicht möglich, wenn man bedenkt, dass die Schnittpunkte der beiden am Rand der Probe viel zu wenig Zustände beinhalten, damit sich die Fermienergie stabilisieren kann. Im  $x$ - $y$ -Impulsraum liegen die Zustände auf Kreisen, deren Abstand proportional zu  $B$  ist. Die Fermienergie entspricht dem äußersten besetzten Kreis. Bei Erhöhung des Magnetfeldes werden Radius und Umfang der Kreise größer, das heißt, dass mehr Zustände auf weiter innen liegenden Kreisen Platz finden. Mit dem letzten Elektron auf dem äußersten Kreis springt die Fermienergie auf den weiter innen liegenden. Die Fermienergie befindet sich also niemals zwischen zwei Landauniveaus. Betrachten wir jedoch einen realen Festkörper, so existieren keine perfekt räumlich konstanten Energieniveaus. Durch Gitterfehlstellen innerhalb der Probe oder inhomogene Bedingungen außerhalb werden die Landauniveaus ausgebeult.

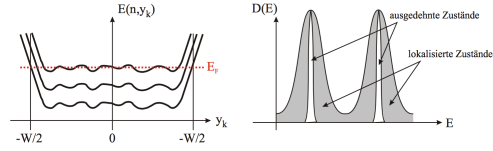


Abbildung 5: Störpotentiale [10]

Dies führt zu einem dazu, dass die scharfen Peaks in der Zustandsdichte sich verbreitern, zum anderen existieren nun im Inneren der Probe Schnittpunkte der Landauniveaus mit der Fermienergie (vgl. Abbildung 5). Diese Zustände bilden in sich geschlossene Leitungskanäle, bei denen sich die Fermienergie stabilisieren kann.

Wird die Magnetfeldstärke erhöht, vergrößern sich die Abstände zwischen den besetzten Zuständen in der Energie; die Fermienergie bleibt konstant. Effektiv schieben sich die Landauniveaus also durch die Fermienergie. Wenn sich ein Landauniveau dieser annähert, bewegt sich sein Leitungskanal vom Rand der Probe weg und die Wahrscheinlichkeit für Rückstreuung steigt. Fallen Fermienergie und ein Landauniveau zusammen, haben die Elektronen dieses Leitungsbandes die Möglichkeit, auf die entgegengesetzte Seite der Probe zu gelangen, der Längswiderstand weist ein Maximum auf, welches größer ist, je weniger Leitungskanäle existieren. Bei weiterer Erhöhung der Magnetfeldstärke finden Elektronen auf niederenergetischeren Niveaus Platz und der Leitungskanal bricht komplett ein. Liegt die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus, ist die Zahl  $\nu$  der Leitungskanäle konstant, damit auch Quer- und Längswiderstand.

---

### III. ZUSAMMENFASSUNG

Der ganzzahlige QHE lässt sich mithilfe der Energiequantisierung, die aus einer einfachen quantenmechanischen Rechnung folgt, verstehen. Wesentlich ist jedoch, dass die Quanteneffekte nur mit Verschmutzungen auftreten. Das Quantenregime lässt sich abschätzen, indem man annimmt, dass ein Elektron innerhalb einer charakteristischen Zeit  $\tau$  sehr viele 'skipping orbits' durchführen muss, um zum Ladungstransport beitragen zu können. Diese Bedingung lässt sich mit der Definition der Zyklotronfrequenz  $\omega_C$  und der Mobilität  $\mu$  in die technischen Größen Temperatur und Magnetfeldstärke umschreiben.  $2\pi \ll \tau\omega_C = \tau eB/m_b = \mu B \sim B/T$ . Für eine gute Auflösung des Querwiderstandes benötigt man also tiefe Temperaturen und große Magnetfeldstärken.

### IV. WEITERE ASPEKTE

#### i. Metrologie

Da der Hallwiderstand nur von Naturkonstanten und natürlichen Zahlen abhängt und sich die Plateaus sehr exakt vermessen lassen, eignet sich der QHE zur Bestimmung von Naturkonstanten. Klitzing selbst hat vorgeschlagen, über die Plateauabstände die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante genau zu bestimmen:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (16)$$

Seit 1990 wird außerdem die SI-Einheit Ohm über den QHE definiert (siehe (14)).

#### ii. Gebrochenrationaler QHE

Bei größeren Magnetfeldstärken reicht es nicht mehr aus, nur die Bewegung der Elektronen als quantisiert zu betrachten. Man muss auch die Quantisierung des Magnetfeldes in Magnetflussquanten berücksichtigen. Deren Wechselwirkung mit den Leitungselektronen kann durch Quasiteilchen beschrieben werden, wodurch sich neue Grundzustandsenergien und Energieaufspaltungen ausbilden, wenn das unterste Landauniveau weniger als ganz besetzt ist. Wenn es genau so viele Magnetflussquanten gibt, dass sich jeweils zwei mit einem Elektron verbinden können und kein Magnetflussquant übrig ist, wiederholen sich die Strukturen analog zum Punkt  $B = 0$ , da das effektive Feld verschwindet. Bis heute werden in neuen Festkörpern, wie z.B. Graphen, Strukturen im Widerstand entdeckt, die nicht vollständig verstanden sind. Verwandte Phänomene sind z.B. der Spin-QHE, der bei topologischen Festkörpern auftritt und kein externes Magnetfeld benötigt. Hier entstehen Spinströme aufgrund intrinsischer topologischer Eigenschaften.

### LITERATUR

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, New method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, Phys. Rev. Lett., 45 (5) (1980)
- [2] M. Goerbig, Quantum Hall Effects, arXiv:0909.1998v2 [cond-mat.mes-hall]
- [3] S.Datta: Electronic Transport in mesoscopic systems, Cambridge University Press 1995

- 
- [4] Siegfried Hunklinger: Festkörperphysik, De Gruyter 2014
- [5] Peter Pfänder, Diplomarbeit "Seperat kontaktierte Randzustände im QHE", Duisburg 2005
- [6] [www.physik.uni-regensburg.de/studium/praktika/f/Anleitung-QHE.pdf](http://www.physik.uni-regensburg.de/studium/praktika/f/Anleitung-QHE.pdf), aufgerufen 11.Okt16
- [7] AlexanderAIUS <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Graphen.jpg>
- [8] Anton Ikonnikov [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quantum\\_Hall\\_effect.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quantum_Hall_effect.png)
- [9] Glenton Jelbert de. [wikipedia.org/wiki/Datei:QuantumHallEffectExplanationWithLandauLevels.ogv](http://wikipedia.org/wiki/Datei:QuantumHallEffectExplanationWithLandauLevels.ogv)
- [10] FP Uni Gießen <http://www.uni-giessen.de/fbz/fb07/fachgebiete/physik/lehre/fprak/anleitungen/quantenhall>