Selbstadjungierte Fortsetzungen

Franziska Kraken

19.05.2014

Einleitung

In dieser Seminararbeit wird der Zusammenhang zwischen selbstadjungierten, unbeschränkten Operatoren und deren Fortsetzungen beschrieben. Dazu wurden die Quellen *John B. Conway - A course in functional analysis X § 1-3* und *Walter Rudin - Functional analysis 13.17 - 13.20* als Grundlage verwendet.

Im weiteren seien alle Hilbert Räume separabel.

1. Grundlegende Definitionen und Sätze

1.1 Definition Seien $\mathcal{H}, \mathcal{M}$ Hilberträume. Dann ist ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ eine Funktion, deren Definitionsbereich $domT$ eine lineare Mannigfaltigkeit in $\mathcal{H}$ ist und sodass

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) \quad \forall f, g \in domT, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

gilt.
T heißt beschränkt, wenn eine Konstante c existiert, sodass $\|Tf\| \leqslant c\|f\|$ gilt. T heißt dicht definiert, wenn $domT$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

1.2 Definition Seien T,S Operatoren von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{M}$. Dann heißt S Fortsetzung von T, wenn $domT \subseteq domS$ und $Tf = Sf$ für alle $f \in domT$ gilt. Wir schreiben dann $S \subseteq T$.

1.3 Definition Ein Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ heißt abgeschlossen, wenn sein Graph $graT = \{(h, Th) | h \in domT\} \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{M}$ abgeschlossen ist. Ein Operator heißt abschließbar, wenn er eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. Außerdem definieren wir,

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{M}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{M} | T \; dicht \; definierter, \; abgeschlossener \; Operator\}$$

und

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{H}).$$

1.4 Satz Ein Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ ist genau dann abschließbar, wenn $\overline{graT}$ ein Graph eines linearen Operators ist. Wenn T abschließbar ist, dann heißt der Operator, dessen Graph $\overline{graT}$ entspricht, der Abschluss von T.

1.5 Definition Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ ein dicht definierter Operator. Dann definieren wir $domT^* = \{k \in \mathcal{M} | h \mapsto \langle Th, k\rangle \ ist\ ein\ stetigesFunktional\}$. Da $domT$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt, gibt es für alle $k \in domT^*$ einen einzigen Vektor f in $\mathcal{H}$, sodass $\langle Th, k\rangle = \langle h, f\rangle$ für alle $h \in domT^*$ gilt. Wir setzen $f = T^*k$ und es gilt dann $\langle Th, k\rangle = \langle h, T^*k\rangle$ für alle $h \in domT,\ k \in domT^*$.

1.6 Satz Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ ein dicht definierter Operator. Dann gilt:
(i) T^* ist ein abgeschlossener Operator.
(ii) T^* ist genau dann dicht definiert, wenn T abschließbar ist.
(iii) Wenn T abschließbar ist, dann ist sein Abschluss $(T^*)^* = T^{**}$.

1.7 Korollar Sei $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{M})$. Dann ist $T^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{M})$ und $T^{**} = T$.

1.8 Satz Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ dicht definiert. Dann gilt $(ImT)^{\perp} = kerT^*$. Wenn T außerdem abgeschlossen ist, gilt auch $(ImT^*)^{\perp} = kerT$.

1.9 Definition Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ ein linearer Operator. Der Operator T heißt beschränkt invertierbar, wenn ein beschränkter Operator $S : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ existiert, sodass $TS = 1$ und $ST \subseteq 1$ gelten.

1.10 Satz Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ ein linearer Operator. Dann gelten:
(i) T ist genau dann beschränkt invertierbar, wenn $kerT = 0, ImT = \mathcal{M}$ und der Graph von T abgeschlossen ist.
(ii) Sei T beschränkt invertierbar. Dann ist sein Inverses eindeutig und wird mit T^{-1} bezeichnet.

1.11 Definition Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ ein linearer Operator. Dann ist die Resolventenmenge $\rho(T)$ von T definiert durch $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - T\ ist\ beschränkt\ invertierbar\}$. Das Spektrum von T ist die Menge $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

1.12 Satz Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ ein linearer Operator. Dann ist $\sigma(T)$ abgeschlossen und $z \mapsto (z - T)^{-1}$ eine analytische Funktion über $\rho(T)$.

1.13 Satz Sei $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{M})$.
(i) $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn $ker(T - \lambda) = 0$ und $Im(T - \lambda) = \mathcal{M}$.
(ii) $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} | \lambda \in \sigma(T)\}$ und für alle λ in $\rho(T)$ gilt $(T - \lambda)^{*-1} = [(T - \lambda)^{-1}]^*$.

1.14 Definition Ein Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt symmetrisch, wenn T dicht definiert ist und $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ für alle $f, g \in domT$ gilt.

1.15 Satz Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) T ist symmetrisch.
(ii) $\langle Tf, f \rangle \in \mathbb{R} \, \forall f \in domT$.
(iii) $T \subseteq T^*$.

1.16 Definition Ein dicht definierter Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ gilt.

1.17 Satz Sei T ein symmetrischer Operator über $\mathcal{H}$. Dann gelten:
(i) Wenn ImT dicht in $\mathcal{H}$ liegt, dann ist T injektiv.
(ii) Wenn $T = T^*$ gilt und T injektiv ist, dann liegt ImT dicht in $\mathcal{H}$ und T^{-1} ist selbstadjungiert.
(iii) Wenn $domT = \mathcal{H}$ gilt, dann ist T selbstadjungiert und beschränkt.
(iv) Wenn $ImT = \mathcal{H}$ gilt, dann ist T selbstadjungiert und $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2. Spektrum abgeschlossener, symmetrischer und selbstadjungierter Operatoren

2.1 Satz Sei T ein symmetrischer Operator und $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten:
(i) Für jedes $f \in domT$ gilt $\|(T - \lambda)f\|^2 = \|(T - \alpha)f\|^2 + \beta^2 \|f\|^2$.
(ii) Wenn $\beta \neq 0$, dann gilt $ker(T - \lambda) = 0$.
(iii) Wenn T abgeschlossen ist und $\beta \neq 0$ gilt, dann ist $Im(T - \lambda)$ abgeschlossen.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\|(T - \lambda)f\|^2 = \|(T - \alpha)f - i\beta f\|^2 &= \langle (T - \alpha)f - i\beta f, (T - \alpha)f - i\beta f \rangle \\ &= \|(T - \alpha)f\|^2 + 2Re\, i\langle (T - \alpha)f, \beta f \rangle + \beta^2 \|f\|^2.\end{aligned}$$

Aber

$$\langle (T - \alpha)f, \beta f \rangle = \beta \langle Tf, f \rangle - \alpha\beta \|f\|^2 \in \mathbb{R}$$

daraus folgt (i).
(ii) folgt durch:

$$f \in ker(T - \lambda) \Leftrightarrow (T - \lambda)f = 0 \Leftrightarrow 0 = \|(T - \lambda)f\|^2 = \|(T - \alpha)f\|^2 + \beta^2 \|f\|^2.$$

Da nun aber vorausgesetzt ist, dass $\beta \neq 0$ gilt, muss also $f = 0$ sein.
Um (iii) zu beweisen, bemerke, dass

$$\|(T - \lambda)f\|^2 \geq \beta^2 \|f\|^2.$$

Sei $\{f_n\} \subseteq domT$, sodass $(T - \lambda)f_n \to g$. Die vorherige Ungleichung schließt ein, dass $\{f_n\}$ eine Cauchy Folge in $\mathcal{H}$ ist. Sei $f = \lim f_n$. Aber es gilt $f_n \oplus (T - \lambda)f_n \in gra(T - \lambda)$ und $f_n \oplus (T - \lambda)f_n \to f \oplus g$. Daher gilt $f \oplus g \in gra(T - \lambda)$ und daher $g = (T - \lambda)f \in Im(T - \lambda)$. Das zeigt (iii). □

2.2 Korollar Sei T ein abgeschlossener, symmetrischer Operator. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(i) T ist selbstadjungiert.
(ii) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
(iii) $ker(T^* - i) = ker(T^* + i) = 0$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$ Wenn T selbstadjungiert ist, dann ist jeder Eigenwert von T reel, denn angenommen, dass ein Eigenwert $\lambda \notin \mathbb{R}$ existiert, dann ist nach 2.1 (ii) $ker(T - \lambda) = 0$, was einen Widerspruch zu den Eigenwertkriterien darstellt. Wenn T selbstadjungiert ist und $Im\lambda \neq 0$, gilt also $ker(T^* - \lambda) = ker(T - \lambda) = 0$. Daher ist $T - \lambda$ injektiv und das Bild von $T - \lambda$ liegt dicht. Mit 2.1 hat $T - \lambda$ ein abgeschlossenes Bild und ist somit beschränkt invertierbar, wenn $Im\lambda \neq 0$ ist (1.10).Es gilt also $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ und somit impliziert (i) (ii).
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Wenn $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt $ker(T^* \pm i) = [Im(T \mp i)]^\perp = \mathcal{H}^\perp = 0$. Also impliziert (ii) (iii).
$(iii) \Rightarrow (i)$ Wenn (iii) gilt, dann schließt dies zusammen mit 1.8 ein, dass das Bild von $T + i$ dicht liegt und $T + i$ somit surjektiv ist (2.1 (iii)). Sei $h \in domT^*$. Dann gibt es $f \in domT$, sodass $(T + i)f = (T^* + i)h$ gilt. Aber es gilt $T^* + i \supseteq T + i$, und daher $(T^* + i)f = (T^* + i)h$. Aber $T^* + i$ ist injektiv, und daher gilt $h = f \in domT$. Daher folgt $T = T^*$. □

2.3 Bemerkung Folgende Aussagen sind außerdem interessante Folgerungen aus vorherigen Ergebnissen, werden hier aber nicht weiter verwendet oder bewiesen:

(i) Sei T ein abgeschlossener, symmetrischer Operator. Dann ist $dim(ker(T^* - \lambda))$ konstant für $Im\lambda > 0$ und $Im\lambda < 0$.
(ii) Sei T ein abgeschlossener, symmetrischer Operator. Dann tritt genau eine der folgenden Eigenschaften auf:
a) $\sigma(T) = \mathbb{C}$
b) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | Im\lambda \geq 0\}$
c) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | Im\lambda \leq 0\}$

d) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

(iii) Sei T ein abgeschlossener, symmetrischer Operator, sodass $\sigma(T)$ nicht $\mathbb{R}$ enthält. Dann gilt $T = T^*$.

2.4 Satz

(i) Ein symmetrischer Operator hat eine maximale symmetrische Fortsetzung.

(ii) Maximale symmetrische Fortsetzungen sind abgeschlossen.

(iii) Ein selbstadjungierter Operator ist ein maximal symmetrischer Operator.

Beweis: Teil (i) ist eine einfache Folgerung aus dem Lemma von Zorn. Wenn T symmetrisch ist, dann gilt $T \subseteq T^*$ und damit ist T abschließbar. Der Abschluss eines symmetrischen Operators ist symmetrisch, daraus folgt Teil (ii). Sei A ein symmetrischer Operator und B eine symmetrische Fortsetzung von A. Dann gilt offensichtlich $B^* \subseteq A^*$ und somit $A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^*$. Man sieht nun leicht ein, dass T ein maximaler symmetrischer Operator ist, wenn gilt $T = T^*$. □

3. Defekträume und -indizes

3.1 Definition Sei T ein abgeschlossener, symmetrischer Operator. Die *Defekträume* von T sind die Räume

$$\mathcal{L}_+ = ker(T^* - i) = [Im(T + i)]^\perp$$
$$\mathcal{L}_- = ker(T^* + i) = [Im(T - i)]^\perp$$

Die *Defektindizes* von T sind die natürlichen Zahlen $n_\pm = dim\mathcal{L}_\pm$.

Bemerkung Ein stetig, linearer Operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt partielle Isometrie, wenn U eingeschränkt auf $ker(U)^\perp$ eine Isometrie ist, d.h. $\forall x \in ker(U)^\perp$: $\|Ux\| = \|x\|$. Dann heißt $ker(U)^\perp$ Initialraum, $Im(U)$ Finalraum von U.

3.2 Theorem

(i) Sei T ein abgeschlossener, dicht definierter, symmetrischer Operator mit Defekträumen $\mathcal{L}_\pm$. Sei $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definiert durch $S = 0$ auf $\mathcal{L}_+$ und

$$S = (T - i)(T + i)^{-1} \quad (1)$$

auf $\mathcal{L}_+^\perp$. Dann ist S eine partielle Isometrie mit Initialraum $\mathcal{L}_+^\perp$ und Finalraum $\mathcal{L}_-^\perp$ und es gilt, dass $(1-S)(\mathcal{L}_+^\perp)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

(ii) Sei S eine partielle Isometrie mit Initial- und Finalräumen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$, sodass $(1-S)\mathcal{M}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Dann ist

$$T = i(1+S)(1-S)^{-1} \tag{2}$$

ein dicht definierter, abgeschlossener, symmetrischer Operator mit Defekt Räumen $\mathcal{L}_+ = \mathcal{M}^\perp$ und $\mathcal{L}_- = \mathcal{N}^\perp$.

(iii) Sei T gegeben wie in (i) und S definiert durch (1). Dann genügen T und S der Gleichung (2). Sei S gegeben wie in (ii) und T definiert durch (2). Dann genügen T und S der Gleichung (1).

Beweis: (i) Wie in 2.1 (iii) gezeigt, ist $Im(T \pm i)$ abgeschlossen und somit $\mathcal{L}_\pm^\perp = Im(T\pm i)$. Mit 2.1 (ii) gilt $ker(T+i) = 0$, also ist $(T+i)^{-1}$ wohldefiniert auf $\mathcal{L}_+^\perp$. Außerdem gilt $(T+i)^{-1}\mathcal{L}_+^\perp \subseteq domT$, sodass der durch (1) definierte Operator S wohldefiniert ist. Wenn $h \in \mathcal{L}_+^\perp$ ist, dann gilt $h = (T+i)f$ für ein einziges f in domT. Daher gilt

$$\|Sh\|^2 = \|(T-i)f\|^2 = \|Tf\|^2 + \|f\|^2 = \|(T+i)f\|^2 = \|h\|^2.$$

Folglich ist S eine partielle Isometrie mit $(kerS)^\perp = \mathcal{L}_+^\perp$ und $ImS = \mathcal{L}_-^\perp$. Außerdem, wenn $f \in domT$ und $h = (T+i)f$, dann gilt

$$(1-S)h = h - (T-i)f = (T+i)f - (T-i)f = 2if$$

. Also gilt $(1-S)\mathcal{L}_+^\perp = domT$ und liegt dicht in $\mathcal{H}$, weil T dicht definiert ist.
(ii) Der Beweis lässt sich in der Quelle an der entsprechenden Quelle finden, ist aber zu ausführlich an dieser Stelle.
(iii) Seien S und T wie in (i) definiert. Wenn $g \in (1-S)\mathcal{L}_+^\perp$, setze $g = (1-S)h$, wobei $h \in \mathcal{L}_+^\perp = Im(T+i)$. Daher gilt $h = (T+i)f$ für ein $f \in domT$. Demnach gilt $g = h - Sh = (T+i)f - (T-i)f = 2if$. Also $f = -\frac{1}{2}ig$. Also

$$\begin{aligned} i(1+S)(1-S)^{-1}g &= i(1+S)h = i[h+Sh] \\ &= i[(T+i)f + (T-i)f] = 2iTf = Tg \end{aligned}$$

Der zweite Teil lässt sich analog zeigen. □

3.3 Definition Sei T ein dicht definierter, abgeschlossener, symmetrischer Operator. Dann heißt die durch (1) definierte partielle Isometrie *Cayley-Transformation* von T.

3.4 Bemerkung Seien S_1 und S_2 die Cayley-Transformationen der symmetrischen Operatoren T_1 und T_2. Dann ist klar, dass $T_1 \subset T_2 \Leftrightarrow S_1 \subset S_2$

gilt. Damit lassen sich Probleme von symmetrischen Fortsetzungen von symmetrischen Operatoren überführen auf Fortsetzungen von Isometrien. Aus der Theorie über Isometrien lässt sich somit folgern, dass jeder symmetrische Operator über $\mathcal{H}$ eine abgeschlossene symmetrische Fortsetzung hat.

3.5 Satz Sei T ein abgeschlossener, symmetrischer und dicht definierter Operator über $\mathcal{H}$. Dann gelten:

(i) T ist genau dann selbstadjungiert, wenn beide Defektindizes 0 sind.

(ii) T ist genau dann maximal symmetrisch, wenn mindestens einer der Defektindizes gleich 0 ist.

(iii) Sei T ein selbstadjungierter Operator und S seine Cayley-Transformation. Dann ist S ein unitärer Operator (d.h. $S^{-1} = S^*$) mit $ker(1 - S) = 0$. Andersherum sei S ein unitärer Operator mit $1 \notin \sigma_p(S)$. Dann ist der durch (2) definierte Operator T selbstadjungiert.

(iv) T hat genau dann eine selbstadjungierte Fortsetzung, wenn beide Defektindizes gleich sind.

Beweis: Die Beweise von (i) und (ii) sind offensichtlich. (iii) folgt aus dem voraus stehenden Theorem und (i), wenn man noch bemerkt, dass eine partielle Isometrie genau dann ein unitärer Operator ist, wenn sein Initial- und Finalraum $\mathcal{H}$ entsprechen. Für den Beweis von (iv) benutze (iii) und bemerke, dass jede unitäre Fortsetzung von S eine Isometrie von $[Im(T+i)]^\perp$ nach $[Im(T-i)]^\perp$ sein muss. $\square$