4. Quotienten und finale Topologien

Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir wollen für jedes $x \in X$ alle Punkte der Äquivalenzklasse

$$[x] := \{x' \in X : x \sim x'\}$$

zu einem Punkt "zusammenziehen" und definieren auf $X/_\sim = \{[x] : x \in X\}$ mit Hilfe der Quotientenabbildung

$$q\colon X \to X/_\sim,\ x \mapsto [x],$$

die *Quotiententopologie*

$$q_*\tau := \left\{V \subseteq X/_\sim : q^{-1}(V) \text{ offen in } X\right\}.$$

Dass dies eine Topologie ist, kann man leicht sehen oder nachher aus Satz 4.2 folgern.

Beispiel 4.1.

(1) Im Fall
$$X = [0,1], \qquad t \sim t' \Leftrightarrow t = t' \text{ oder } \{t,t'\} = \{0,1\}$$
ist $[0,1]/_\sim \cong S^1$ via $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$.

(2) Sei $\sim$ wie in (1). Im Fall
$$X = [0,1]^2, \qquad (x,y) \sim_2 (x',y') \Leftrightarrow (x \sim x') \text{ und } (y \sim y')$$
ist $X/_{\sim_2} \cong S^1 \times S^1$.

(3) Sei $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, versehen mit der normalen Topologie. Im Fall
$$X = \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}, \qquad x \sim x' \Leftrightarrow \mathbb{k}x = \mathbb{k}x'$$
ist $\mathbb{k}P^n := X/_\sim$ der *n-dimensionale projektive Raum*.

(4) Sei Y ein topologischer Raum und $f\colon Y \to Y$ stetig. Im Fall
$$X = Y \times [0,1], \qquad (y,0) \sim (f(y),1) \text{ für alle } y \in Y$$
ist $T_f := X/_\sim$ der *Abbildungstorus* von f. Für $Y = [-1,1]$ und $f(y) = -y$ ist T_f das Möbiusband.

Obige Konstruktion ist ein Spezialfall von folgendem Gegenstück zu Satz 3.5:

Satz 4.2 (Finale Topologie)**.** *Sei X eine Menge und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume mit Abbildungen $q_i\colon X_i \to X$.*

(1) *Es gibt eine feinste Topologie τ auf X, die alle Abbildungen q_i stetig macht, gegeben durch*
$$\tau = \{U \subseteq X : q_i^{-1}(U) \subseteq X_i \text{ offen für jedes } i \in I\}.$$

(2) *Für jeden topologischen Raum Y ist eine Abbildung $g\colon X \to Y$ stetig genau dann, wenn für jedes $i \in I$ die Verknüpfung $g \circ q_i\colon X_i \to Y$ stetig ist.*

Man nennt τ die *finale Topologie* auf X bzgl. $(q_i)_i$.

Beweis. (1) τ ist eine Topologie, weil für jedes $i \in I$

$$q_i^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = q_i^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap q_i^{-1}(U_n), \qquad q_i^{-1}(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} q_i^{-1}(U_j).$$

Offensichtlich ist τ die feinste.
(2) Sei $V \subseteq Y$ offen und $U := g^{-1}(V) \subseteq X$. Nach (1) ist U offen genau dann, wenn für jedes $i \in I$ die Menge $q_i^{-1}(U) = (g \circ q_i)^{-1}(V)$ offen ist. $\square$

Beispiel 4.3. (1) Die Quotiententopologie auf $X/_\sim$ ist die finale Topologie bzgl. der Quotientenabbildung $q\colon X \to X/_\sim$.

(2) Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die finale Topolgie auf der disjunkten Vereinigung $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ bzgl. der Inklusionen $q_i\colon X_i \to X$ heißt die *Summentopologie*.

5. Abschluss, Rand und Trennungseigenschaften

Beim Übergang zu Quotienten können merkwürdige Dinge passieren, z.B. Folgen mehrere Grenzwerte erhalten:

Beispiel 5.1. (1) Wir betrachen

$$\mathbb{R}/_{\sim} \quad \text{mit} \quad x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oder } x, y < 0.$$

Die Äquivalenzklassen sind $(-\infty, 0)$ und $\{x\}$ mit $x \geq 0$, und die konstante Folge $[-1/n] = (-\infty, 0)$ konvergiert gegen $\{0\}$.

(2) Wir betrachten

$$(R \times \{0,1\})/_{(x,k)\sim(x,k') \text{ für } x \neq 0},$$

die reelle Achse mit verdoppeltem Ursprung $[(0,0)] \neq [(0,1)]$. Hier gilt

$$[(0,0)] \xleftarrow{\infty \leftarrow n} [(1/n,0)] = [(1/n,1)] \xrightarrow{n \to \infty} [(0,1)].$$

(3) Die Quotiententopologie auf $\mathbb{R} \xrightarrow{q} \mathbb{R}/\mathbb{Q} = \mathbb{R}/_{\sim}$ mit $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ ist die grobe Topologie: ist $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ abgeschlossen, so auch $q^{-1}(A) = q^{-1}(A) + \mathbb{Q}$, aber letztere Menge ist dicht in $\mathbb{R}$, also $q^{-1}(A) = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Diese Phänomene wollen wir nun genauer betrachten. Sei X ein topologischer Raum.

Definition 5.2. *Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ definieren wir*
- *das* Innere $\mathring{A} := \bigcup\{U \subseteq A : U \text{ offen in } X\}$;
- *der* Abschluss $\overline{A} := \bigcap\{B \subseteq X \text{ abgeschlossen} : A \subseteq B\}$;
- *der* Rand $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Man nennt A dicht *in einer Teilmenge $B \subseteq X$, wenn $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$.*

Lemma 5.3. *Für jedes $x \in X$ und $A \subseteq X$ sind äquivalent:*
(1) *$x \in \overline{A}$;*
(2) *jede Umgebung von x enthält einen Punkt aus A;*
(3) *es gibt ein Netz in A, dass in X gegen x konvergiert.*

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Klar.
(2) $\Rightarrow$ (3): Wähle für jede Umgebung U von x ein $x_U \in A \cap U$ und ordne die Umgebungen durch $U \leq U' :\Leftrightarrow U' \subseteq U$. Nach 2.6 folgt $A \ni x_U \xrightarrow{U \to \infty} x$.
(3) $\Rightarrow$ (2): Gilt $A \ni x_\lambda \xrightarrow{\lambda \to \infty} x$, so enthält jede Umgebung von x ab einem λ_0 alle x_λ mit $\lambda \geq \lambda_0$. □

Im Fall $A = \{y\}$ folgt z.B. $x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow$ jedes Netz, das gegen y konvergiert, konvergiert auch gegen x (ÜA).

Satz 5.4. *Für jeden topologischen Raum X sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *Je zwei verschiedene Punkte in X haben disjunkte Umgebungen.*
(2) *Jedes Netz in X hat höchstens einen Grenzwert.*
(3) $\Delta := \{(x,x) : x \in X\}$ *ist abgeschlossen in $X \times X$.*

Beweis. (1)⇒(2): Angenommen, $x_\lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} x_i$ für $i = 1,2$. Dann existieren disjunkte Umgebungen U_i von x_i und Indizes λ_i mit $x_\lambda \in U_i$ für alle $\lambda \geq \lambda_i$. Für $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ folgt $x_\lambda \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$, Widerspruch.
(2) ⇒ (3): Ist $(x,y) \in \overline{\Delta}$, so existiert nach 5.3 ein Netz (x_λ, x_λ) mit $(x_\lambda, x_\lambda) \to (x,y)$ und mit 3.5 folgt $x_\lambda \to x$, $x_\lambda \to y$, also $x = y$.
(3) ⇒ (1): Ist $x \neq y$, so $(x,y) \notin \Delta$, also existieren Umgebungen U von x und V von y mit $U \times V \cap \Delta = \emptyset$, also $(U \cap V) = \emptyset$. □

Definition 5.5. *Ein topologischer Raum heißt* Hausdorffsch*, falls er die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.*

Beispiel 5.6. (1) Ist X unendlich, so ist die ko-endliche Topologie auf X nicht Hausdorffsch.
(2) Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist X bzgl. der von d erzeugten Topologie Hausdorffsch: Für $x \neq y$ ist $\varepsilon := d(x,y)/2 > 0$ und $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.
(3) $\prod_i X_i$ ist Hausdorffsch genau dann, wenn jedes X_i Hausdorffsch ist.