

Übungen zu Moderne Theoretischen Physik III SS 16

Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 10

PD Dr. B. Narozhny, Dr. P. Schad

Besprechung: Freitag, 24.06.2016

1. Landau-Niveaus

(30 Punkte, schriftlich)

Magnetfelder koppeln sowohl an den Spin von Teilchen als auch an die Bahnbewegung geladener Teilchen. In dieser Aufgabe geht es um den Einfluss eines homogenen Magnetfeldes auf die Bewegung von Elektronen (Masse m , Ladung e), die Kopplung an den Spin wird vernachlässigt. Der Hamiltonoperator des Problems ist

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2. \quad (1)$$

mit dem Vektorpotential \mathbf{A} . Die Richtung des Magnetfeldes wird als z -Achse gewählt, d.h. $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$. In der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ entspricht das dem Vektorpotential $\mathbf{A} = (-B_0 y, 0, 0)$.

(a) Verwenden Sie für die Wellenfunktion im Ortsraum den Ansatz

$$\psi(\mathbf{r}) = \chi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} e^{\frac{i}{\hbar} p_z z}, \quad (2)$$

wobei p_x und p_z Eigenwerte der Impulsoperatoren \hat{p}_x und \hat{p}_z sind. Warum ist dieser Ansatz sinnvoll? Leiten Sie aus der Schrödingergleichung eine Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ her.

(b) Nutzen Sie die Analogie mit dem harmonischen Oszillator und zeigen Sie, dass die Eigenenergien durch

$$E = \hbar\omega_z \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m} \quad (3)$$

gegeben sind. Die Energieniveaus n werden als Landau-Niveaus bezeichnet. Was ist ω_z ? Welche Werte kann n annehmen?

(c) Das System sei auf ein Volumen $V = L_x L_y L_z$ beschränkt. Warum sind die Landau-Niveaus entartet? Zeigen Sie, dass der Entartungsgrad

$$g(B_0) = \frac{|e| L_x L_y B_0}{2\pi\hbar} \quad (4)$$

ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Bewegung in der x - y -Ebene aussieht. Der Bewegungsmittelpunkt sollte innerhalb der Fläche $L_x L_y$ liegen. Nehmen Sie an, dass L_x und L_y sehr viel größer sind als die typische Längenskala der Elektronenbewegung.

2. Landau-Diamagnetismus: hohe Temperaturen

(20 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein System N freier Elektronen im Magnetfeld mit Energien (3) und Entartung (4) (ohne Spin). Bei sehr hohen Temperaturen können die Elektronen durch die klassische Maxwell-Boltzmann-Statistik beschrieben werden. In diesem Fall faktorisiert die kanonische Zustandssumme in die Einteilchenzustandssummen, $Z = Z_1^N/N!$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einteilchenzustandssumme Z_1 durch

$$Z_1 = \frac{V}{\lambda_T^3} \frac{\frac{\mu_B B_0}{k_B T}}{\sinh \frac{\mu_B B_0}{k_B T}} \quad (5)$$

gegeben ist, mit dem Bohrschen Magneton $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m}$ und der thermischen Wellenlänge λ_T .

(b) Bestimmen Sie die Magnetisierung $M_z = -\left(\frac{\partial F}{\partial B_0}\right)_{V,T}$. Vergleichen Sie die Richtung mit der von \mathbf{B} .

3. Magnetismus des Fermigases

(50 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie weiterhin das System freier Elektronen im Magnetfeld aus Aufgabe 1 mit Energien (3) und Entartung (4), berücksichtigen Sie aber zusätzlich die Spinenartung. Bei Temperaturen von der Größenordnung der Fermienergie ϵ_F (typische Größenordnung $\sim 10^3$ K) ist die Näherung in Aufgabe 2 nicht mehr anwendbar, stattdessen muss die Fermistatistik verwendet werden. Es ist dann bequemer, großkanonisch zu rechnen.

(a) Schreiben Sie das großkanonische Potential Ω als Integral über p_z und Summe über n . Berücksichtigen Sie auch die Spinenartung.

(b) Für jeden gegebenen Wert n kann man ein effektives chemisches Potential μ_n einführen. Bringen Sie das großkanonische Potential auf die Form

$$\Omega = 2\mu_B B_0 \sum_{n=0}^{\infty} f(\mu_n), \quad \mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m}, \quad (6)$$

und geben Sie $f(\mu_n)$ an.

(c) Benutzen Sie die Summationsformel von Euler-McLaurin

$$\frac{1}{2}F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} F(a+n) \approx \int_a^{\infty} dx F(x) - \frac{1}{12}F'(a). \quad (7)$$

um die Summe über n auszuwerten. Zeigen Sie, dass das Ergebnis als

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6}(\mu_B B_0)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} \quad (8)$$

geschrieben werden kann.

- (d) Finden Sie einen Ausdruck für die Suszeptibilität. Vergleichen Sie die erhaltene Suszeptibilität mit der Pauli-Suszeptibilität χ_P , die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben:

$$\chi_P = \mu_B^2 \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T,V}. \quad (9)$$

Was ist die gesamte Suszeptibilität des Elektronengases? Ist das Gas para- oder diamagnetisch?

Mit „schriftlich“ gekennzeichnete Aufgaben sind handschriftlich zu bearbeiten und bis Mittwoch (vor der Besprechung), 10 Uhr, in den dafür vorgesehenen Kasten einzuwerfen.