Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 8
Besprechung 10.06.2011

---

1. Landauscher Diamagnetismus: (20 Punkte)

In dieser Übung betrachten Sie die diamagnetische Magnetisierung, die mit der Quantisierung der Bahnbewegung der Elektronen im Magnetfeld zusammenhängt.

Üblicherweise beschreibt man das äußere elektromagnetische Feld mit Hilfe des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ und des skalaren Potentials φ.

Der Hamilton-Operator für ein Teilchen ohne Spin im Magnetfeld $\mathbf{H}$ hat die Gestalt

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2.$$

Wir wählen die Richtung des Magnetfeldes als z-Achse, d.h. $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Dann wählen wir das Vektorpotential $\mathbf{A}$ in der Coulomb-Eichung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ als $\mathbf{A} = (-Hy, 0, 0)$.

Finden Sie jetzt die Energieniveaus:

(a) Schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung. (1 Punkt)

(b) Verwenden Sie den folgenden Ansatz für die Wellenfunktion des Elektrons

$$\psi = \chi(y) \exp[i(p_x x + p_z z)/\hbar].$$

Leiten Sie eine Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ her. (2 Punkte)

(c) Überprüfen Sie dass die Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ die Gestalt der Schrödinger-Gleichung für einen linearen harmonischen Oszillator hat. Bestimmen Sie das Zentrum der Schwingung y_0. Finden Sie die Eigenfrequenz des Oszillators und seine Energieniveaus. (2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie jetzt die Energieniveaus des Elektrons in dem homogenen Magnetfeld.
Man bezeichnet diese Niveaus als Landau-Niveaus. (1 Punkt)

(e) Bemerken Sie, dass die erhaltenen Energieniveaus entartet sind. Finden Sie den Entartungsgrad der Energieniveaus. (4 Punkte)

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Bewegung auf ein großes aber endliches Volumen $V = L_x L_y L_z$ beschränkt ist. Die Zahl der möglichen (nunmehr diskreten) Werte von p_x im Interval Δp_x ist $[L_z/(2\pi\hbar)]\Delta p_x$. Es sind aber nur die p_x-Werte zulässig, für die der Mittelpunkt y_0 innerhalb von der Fläche $S = L_x L_y$ in der $x - y$ Ebene liegt (hier vernachlässigen Sie den Bahnradius gegenüber dem großen L_y).

(f) Für ein ideales Elektrongas im äußeren Magnetfeld schreiben Sie das großkanonischen Potential Ω als ein Integral über p_z und die Summe über die diskreten Energiewerte des Oszillators, d.h. über n. (1 Punkt)

Hinweis: Beachten Sie die Spinentartung!

(g) Vereinfachen Sie den Ausdruck für Ω: bemerken Sie, dass man bei jedem gegebenen Wert n das effektive chemische Potential einfüren kann. Leiten Sie den foldgenden Ausdruck her

$$\Omega = 2\mu_B H \sum_{n=0}^{\infty} f[\mu - (2n+1)\mu_B H], \quad \mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc},$$

und finden Sie die Funktion $f(\mu)$ als ein Integral über p_z. (3 Punkte)

(h) Berechnen Sie die Summe über n mit Hilfe der bekannten Summationformel von Euler-McLaurin

$$\frac{1}{2}F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} F(a+n) \approx \int_a^{\infty} dx F(x) - \frac{1}{12}F'(a).$$

Bemerken Sie, dass das erhaltene Integral unabhängig vom Magnetfeld ist. Überprüfen Sie das Ergebniss (2 Punkte)

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6}\mu_B^2 H^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2}.$$

(i) Finden Sie die diamagnetische Suszeptibilität. (1 Punkt)

(j) Vergleichen Sie die erhaltene Suszeptibilität mit der Pauli-Suszeptibilität, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben: (1 Punkt)

$$\chi_P = \mu_B^2 \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}.$$

(k) Finden Sie die gesamte Suszeptibilität des Elektrongases. Ist das Gas para- oder diamagnetisch? (1 Punkt)