Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 2
Abgabe 08.11.2013

---

1. Wegintegrale (10 + 10 + 20 + 10 = 50 Punkte)

Wir berechnen verschiedene Wegintegrale im $\mathbb{R}^n$. Ein Wegintegral ist ein Integral entlang eines eindimensionalen Weges $C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}$ vom Anfangspunkt $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ zum Endpunkt $\boldsymbol{r}_1 \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen eine Parametrisierung des Weges $C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}$ mit $\boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ wobei $t \in [t_0, t_1]$ reell ist. Ein Wegintegral ist von der Form

$$\int_{C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \,, \tag{1}$$

und hängt im allgemeinen vom Weg $C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}$ ab. Hier bezeichnet $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$ das Skalarprodukt zweier Vektoren in $\mathbb{R}^n$.

(a) Berechnen Sie die Länge des direkten Weges vom Punkt $\boldsymbol{r}_0 = (0,0,0)$ zum Punkt $\boldsymbol{r}_1 = (a,b,c)$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ indem sie den Pfad parametrisieren als $\boldsymbol{r}(t)$ und die Bogenlänge bestimmen durch

$$s = \int_{t_0}^{t_1} dt \left| \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \right| . \tag{2}$$

(b) Berechnen Sie auf gleiche Weise die Bogenlänge eines Halbkreises um den Ursprung mit Radius R.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral

$$I_{C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}} = \int_{C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} \tag{3}$$

über das zweidimensionale Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x,y) = 2xy^2 \boldsymbol{e}_x + x^2 \boldsymbol{e}_y$ mit $\boldsymbol{e}_x = (1,0)$ und $\boldsymbol{e}_y = (0,1)$ vom Punkt $\boldsymbol{r}_0 = (0,0)$ zum Punkt $\boldsymbol{r}_1 = (1,1)$ entlang von zwei verschiedenen Kurven:

i) Entlang der Kurve $y(x) = x^2$

ii) Entlang der geraden Verbindung der zwei Punkte $\boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{r}_1$, d.h., entlang der Kurve $y(x) = x$.

(d) Berechnen Sie das Wegintegral über das Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ entlang des geschlossenen Pfades auf einem Kreis mit Radius $R = 1$ um den Koordinatenursprung $(0,0)$. Zuerst müssen Sie den Pfad geeignet parametrisieren, d.h. ein geeignetes $\boldsymbol{r}(t)$ bestimmen.

2. Polarkoordinaten (10 + 10 + 10 + 10 = 40 Punkte)

In zweidimensionalen kartesischen Koordinaten ist der Ortsvektor gegeben durch $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y$. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ergeben sich durch Ableitung nach der Zeit zu $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{x}(t)\boldsymbol{e}_x + \dot{y}(t)\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \ddot{x}(t)\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}(t)\boldsymbol{e}_y$.

Hier haben wir verwendet, dass die orthonormierten Basisvektoren $\boldsymbol{e}_x = (1, 0)$ und $\boldsymbol{e}_y = (0, 1)$ zeitunabhängig sind. Alternativ kann es sinnvoll sein ein orthonormiertes Basissystem zu verwenden, das sich mit dem Ortsvektor bewegt. Das Polarkoordinatensystem ist solch ein System.

Die Transformation zu Polarkoordinaten ist definiert als

$$x = r\cos\varphi \tag{4}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{5}$$

mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Die beiden Basisvektoren $\boldsymbol{e}_r(t)$ und $\boldsymbol{e}_\varphi(t)$ sind nun zeitabhängig, da sie sich mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ mitbewegen.

(a) Berechnen Sie $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$, die definiert sind als

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{6}$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} \tag{7}$$

(b) Drücken Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ in der Polarkoordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus.

(c) Drücken Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der Polarkoordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus. Beachten Sie dass die Basisvektoren auch von der Zeit abhängen.

(d) Drücken Sie die Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der Polarkoordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus.

3. Bahnkurven (10 + 5 + 10 + 10 + 5 = 40 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine (nicht konstante) Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ an für die gilt, dass

(a) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) = 0$

(b) $\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = 0$

(c) $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$

(d) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{0}$

(e) $\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$

Hier bezeichnet $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$ das Kreuzprodukt. Beachte dass der Vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ senkrecht sowohl auf $\boldsymbol{a}$ als auch auf $\boldsymbol{b}$ steht.

4. Dimensionale Analyse (15 + 15 = 30 Punkte)

Bestimmen Sie folgende physikalische Größen aus Betrachtungen der dimensionalen Analyse.

(a) Was ist die Formel für die Beschleunigung, die auf ein Auto der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt ?

(b) Sie befinden sich auf einem Karussell, das sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht. Sie bewegen sich in radialer Richtung auf dem Karussell in der x-y-Ebene mit Geschwindigkeit v. Bestimmen Sie die Beschleunigungen, die auf sie wirken. Eine Beschleunigung sollte am Ursprung (in der Mitte des Karussells) verschwinden, die andere nicht.

5. Gaußintegrale (10 + 10 + 10 + 10 = 40 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2-y^2} \tag{8}$$

indem Sie Polarkoordinaten verwenden (siehe die Transformationsformel in Aufgabe 2). Denken Sie daran, dass bei einer Variablensubstitution $r(x,y), \varphi(x,y)$ die Jakobien im Integranden auftritt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x,y) = \int_{0}^{\infty} dr \int_{0}^{2\pi} d\varphi \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) \tag{9}$$

die definiert ist als

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} \right| . \tag{10}$$

(b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil a) um

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \tag{11}$$

zu berechnen. Falls Sie Teil a) nicht lösen konnten, nehmen Sie an, dass $I = c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie nun

$$I_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} \tag{12}$$

mit reellem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Berechnen Sie schließlich die beiden Integrale

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-x^2} \tag{13}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} , \tag{14}$$

wobei Sie das Ergebnis von Teil c) verwenden dürfen und annehmen dürfen, dass Integration nach x und Ableitung nach λ vertauschen.