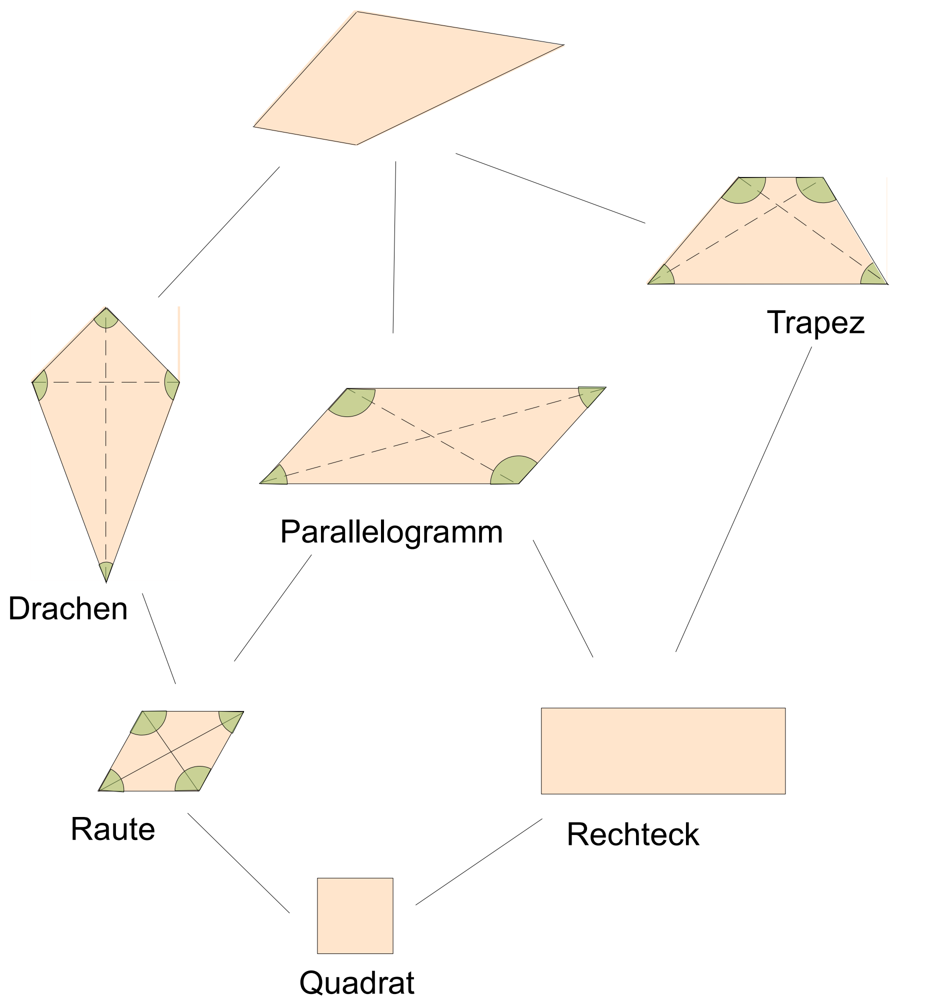
Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Vierecke	**Vierecke**	

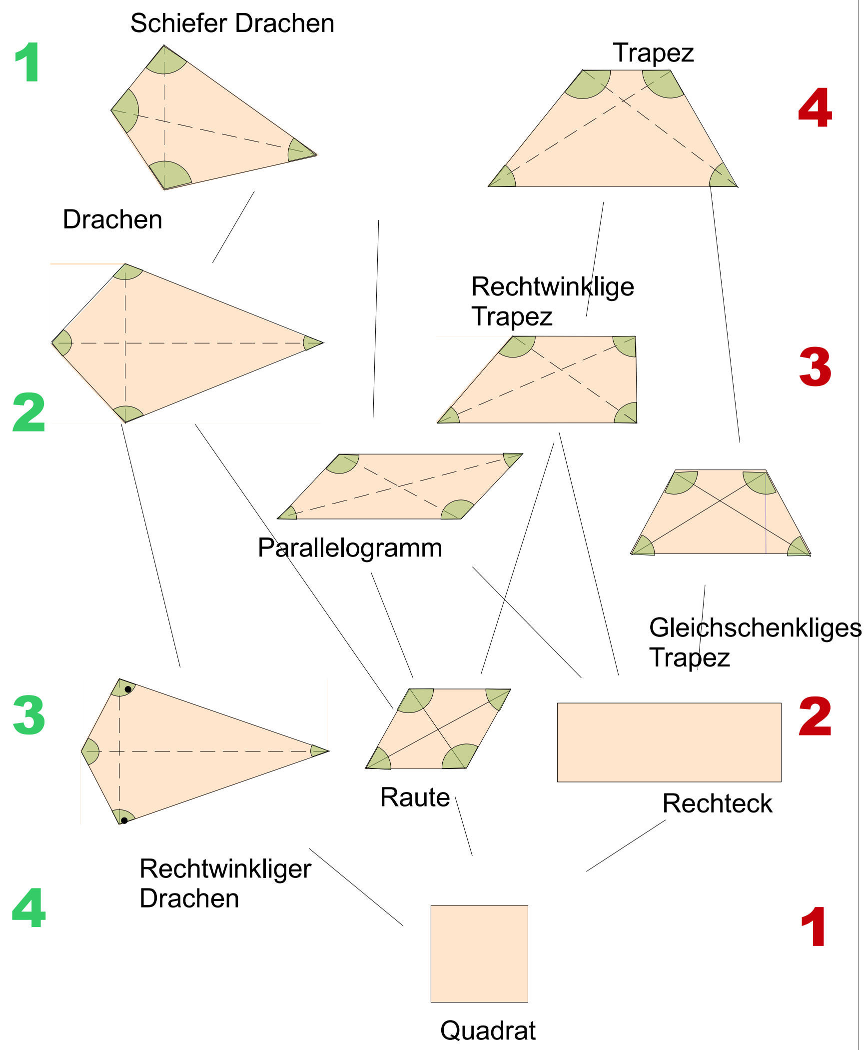
Viereck und Symmetrie



- Das symmetrische Drachenviereck hat eine Symmetrieachse und das Parallelogramm ein Symmetriezentrum. Beide liegen deshalb in einer Zeile.
- Dann liegen Raute und Rechteck nebeneinander. Beide haben zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum.
- Das Quadrat hat vier Achsen. Das Trapez passt nicht in diese Anordnung.

Anzahl der voneinander unabhängigen Besonderheiten

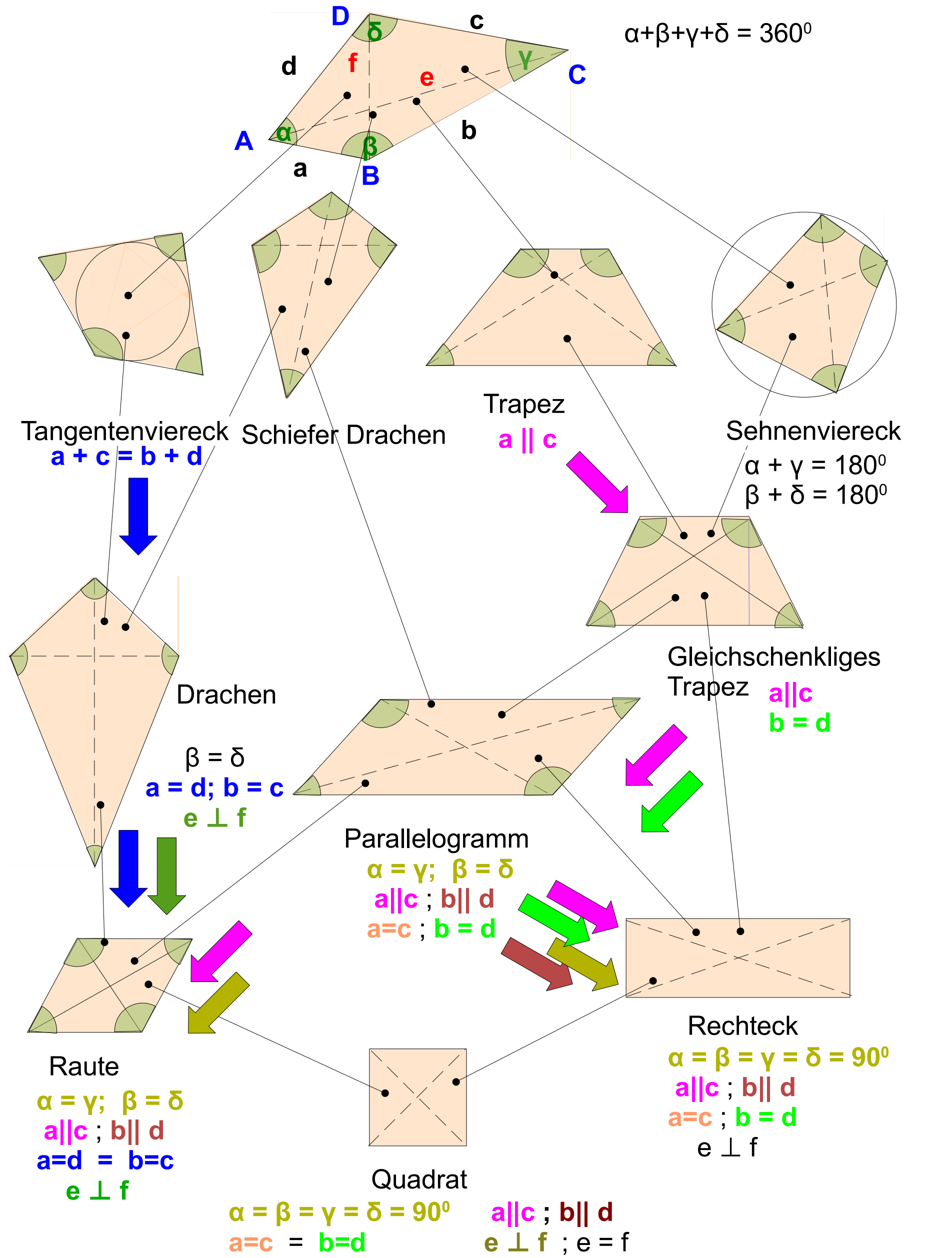
Anzahl der zur eindeutigen Konstruktion benötigten Stücke

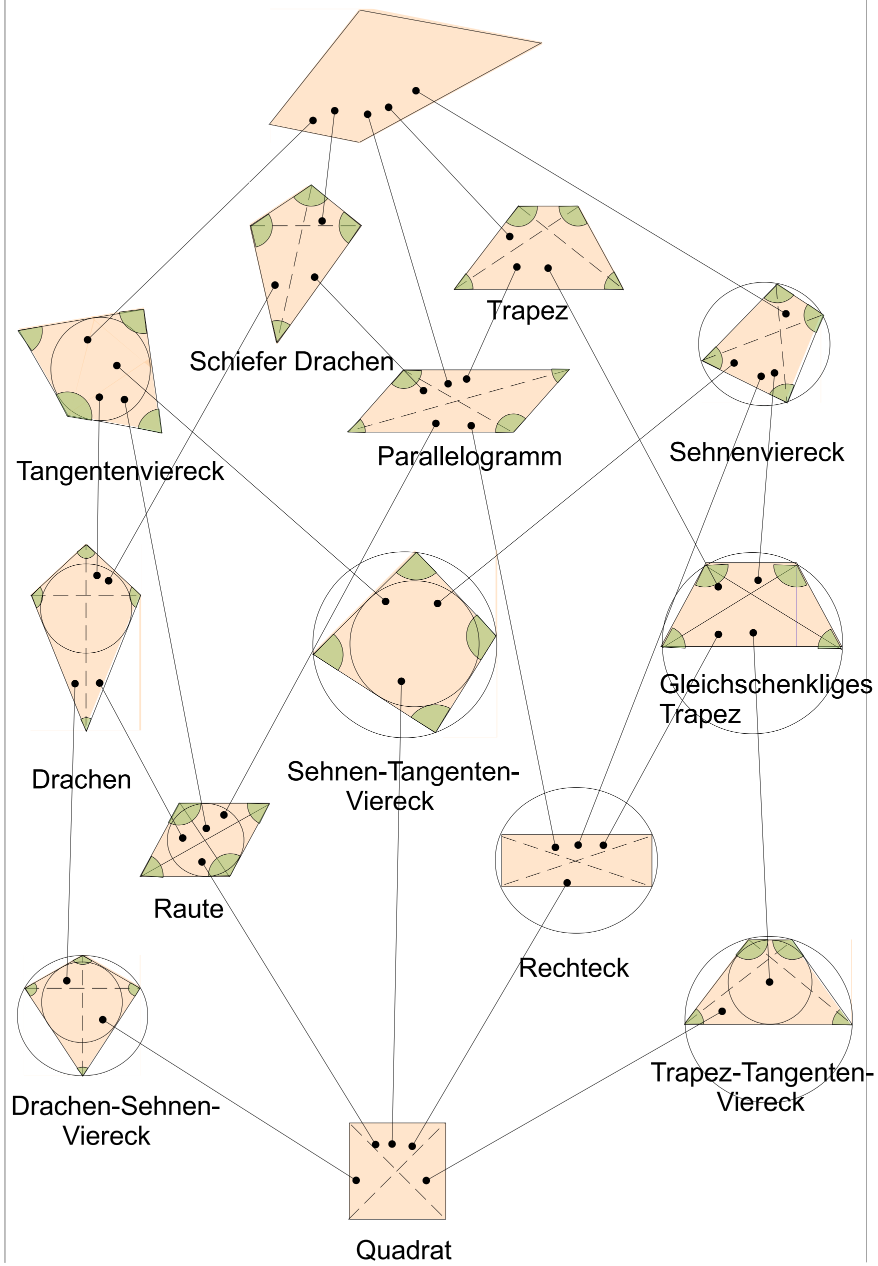


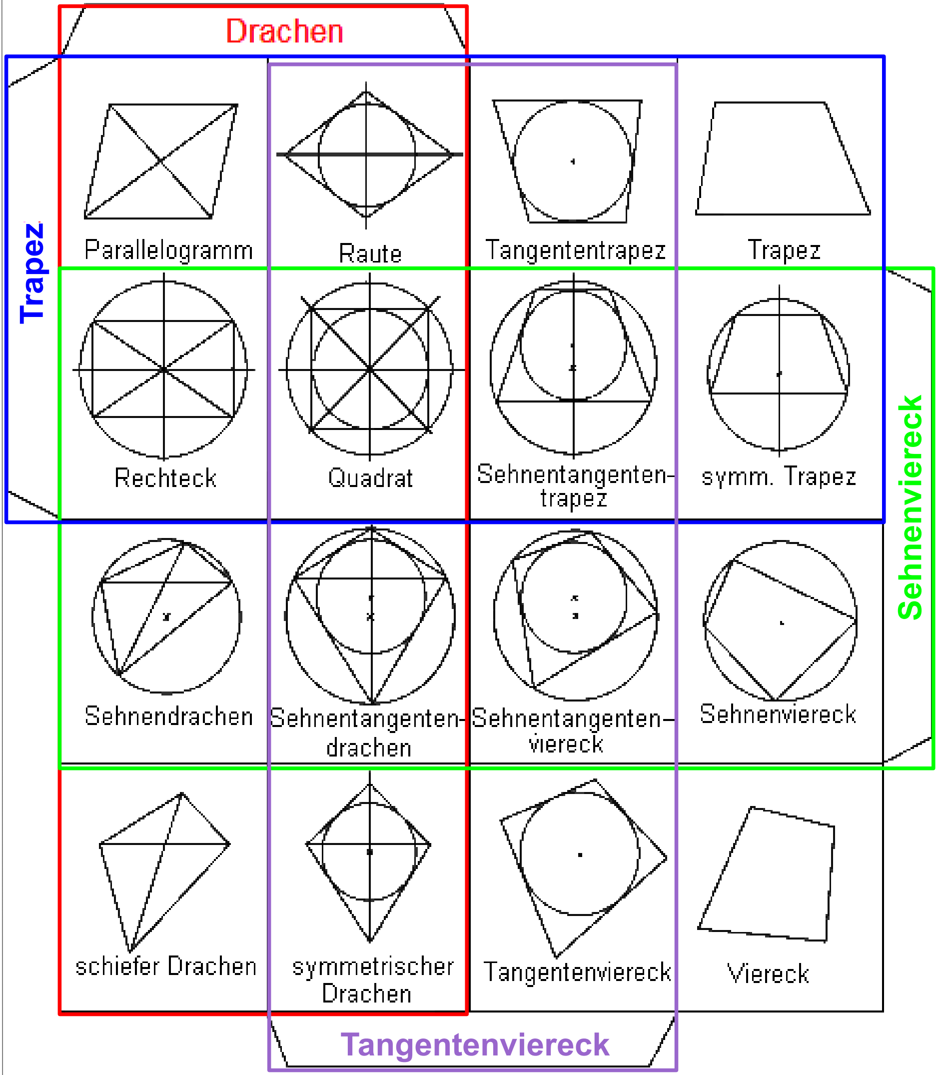
Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Vierecke	**Gruppierung nach Winkeln und Seiten**	**Gruppierung nach Umkreisen und Inkreisen**



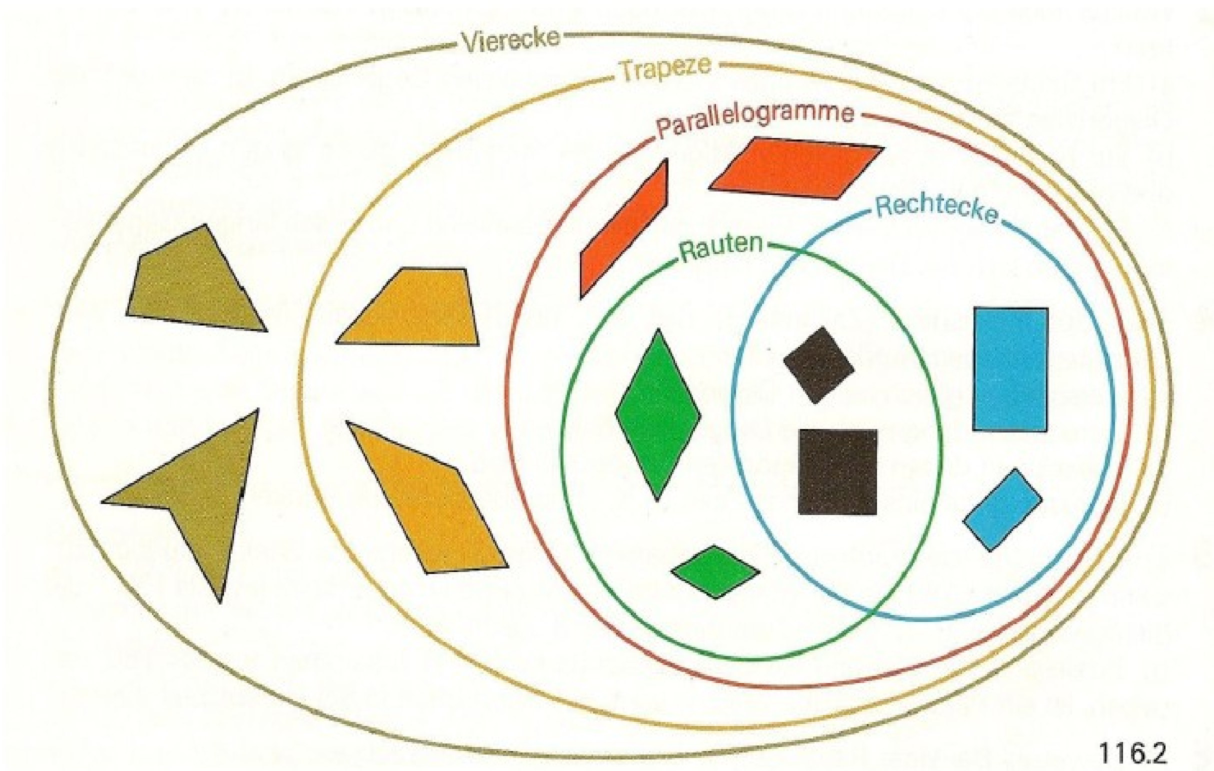


Intensivkurs – Mathematik: Viereck		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Vierecke © Dipl.-Math. Armin Richter	**Einordnung von Vierecken nach Mengenaspekten** 	Die ebenen Vierecke werden nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt: nach Eigenschaften des Inneren: konvex nicht konvex nach Symmetrie-Eigenschaften: eine Diagonale ist Symmetrieachse: Deltoid (Drachenviereck) beide Diagonalen sind Symmetrieachsen: Raute (Rhombus) die Mittelsenkrechte einer Seite ist eine Symmetrieachse: gleichschenkliges Trapez die Mittelsenkrechten zweier Seiten sind Symmetrieachsen: Rechteck vier Symmetrieachsen: Quadrat zweizählige Symmetrie (punktsymmetrisch): Parallelogramm vierzählige Symmetrie: Quadrat nach der Länge der Seiten: zwei Paare gleich langer gegenüberliegender Seiten: Parallelogramm zwei Paare gleich langer benachbarter Seiten: Deltoid (Drachenviereck) gleichseitiges Viereck: Raute (Rhombus) die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten ist gleich: Tangentenviereck nach der Größe der Winkel: zwei Paare gleich großer gegenüberliegender Winkel: Parallelogramm zwei Paare gleich großer benachbarter Winkel: gleichschenkliges Trapez gleichwinkeliges Viereck: Rechteck die Summe gegenüberliegender Winkel ergibt 180°: Sehnenviereck nach der Lage der Seiten: ein Paar paralleler Seiten: Trapez zwei Paar paralleler Seiten: Parallelogramm die Seiten berühren denselben Kreis (den Inkreis): Tangentenviereck nach der Lage der Ecken: die Ecken liegen auf einem Kreis (dem Umkreis): Sehnenviereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Vierecke		

Die Menge aller Vierecke

Bereits bekannt ist Ihnen das „Haus der Vierecke“ als eine Darstellungsmöglichkeit für die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen (speziellen) Vierecken. Eine weitere Möglichkeit, diese zu veranschaulichen, ist folgende:



Quelle: Lambacher / Schweizer: LS Geometrie Eins, 1. Auflage, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1983

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Viereck

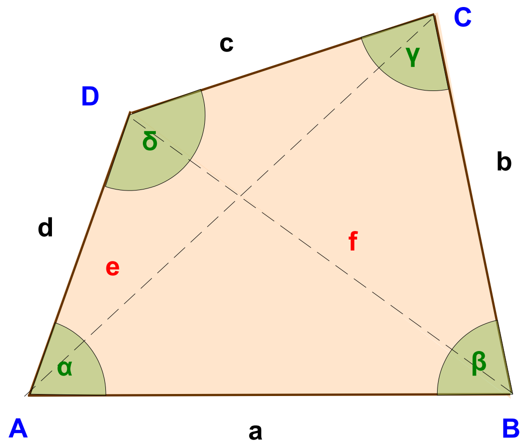
Das Viereck ist eine von vier Seiten begrenzte ebene Figur.

Ecken:
Die Eckpunkte werden meist mit Großbuchstaben (A, B, C, D) gegen den Uhrzeigersinn beschriftet.

Seiten:
Die drei Begrenzungslinien des Vierecks nennt man Seiten und werden meist mit Kleinbuchstaben (a, b, c, d) beschriftet.

Winkel:
In jedem Viereck gibt es vier Innenwinkel, die meist mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden:
Winkel α beim Eckpunkt A, Winkel β beim Eckpunkt B und Winkel γ beim Eckpunkt C und Winkel δ beim Eckpunkt D.

Die Beschriftung der Diagonalen erfolgt mit Kleinbuchstaben: e, f
Die Diagonale e verbindet die Eckpunkte A und C
Die Diagonale f verbindet die Eckpunkte B und D
Die Diagonalen schneiden einander im Mittelpunkt M



> Ein allgemeines Viereck ist durch 5 Bestimmungsstücke eindeutig festgelegt (= konstruierbar).
> Dabei muss allerdings mindestens 1 Seite gegeben sein.

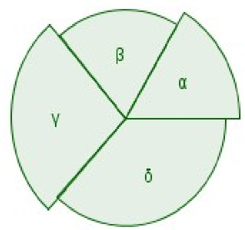
Der Umfang des allgemeinen Vierecks ergibt sich aus der Summe der vier Seitenlängen.

$$U = a + b + c + d$$

Die Fläche wird durch Zerlegen des Vierecks in zwei Dreiecke ermittelt.

Die Innenwinkel

> Die Summe der Innenwinkel eines Vierecks ergeben 360°.



Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

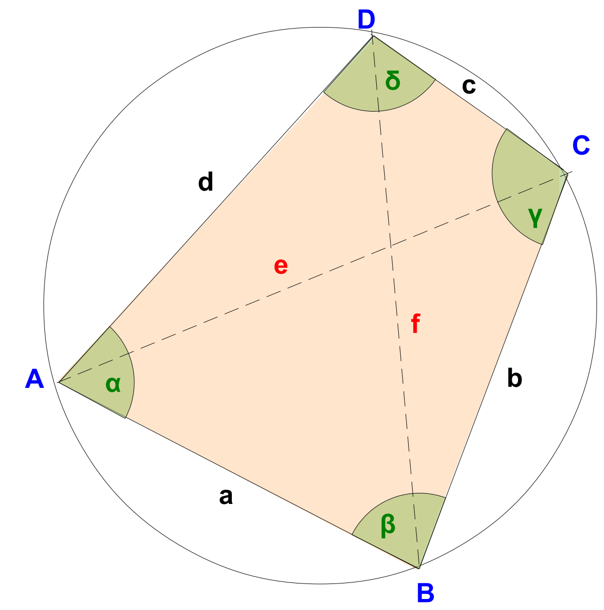
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Das Sehnenviereck

Nicht jedes Viereck hat einen Umkreis.
Vierecke, die einen Umkreis haben, heißen **Sehnenvierecke** bei einem Sehnenviereck schneiden sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises.

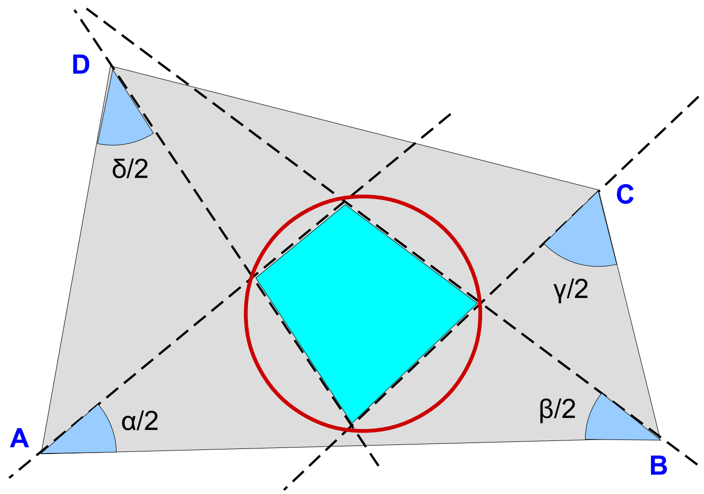
Am einfachsten lässt sich ein Sehnenviereck konstruieren, indem man auf einen beliebigen Kreis vier Punkte wählt und diese miteinander verbindet.



Der Winkelsatz

Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich zwei Gegenwinkel zu 180⁰ ergänzen.

Eine andere Möglichkeit ein Sehnenviereck zu konstruieren, ergibt sich, indem man ein beliebiges Viereck betrachtet und die vier Winkelhalbierenden einzeichnet. Es ergeben sich vier Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden, die nun wiederum ein Viereck erzeugen. Bei diesem neu entstandenen Viereck handelt es sich um ein Sehnenviereck .



Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Ein beliebiges Viereck ist im allgemeinen durch fünf Größen festgelegt. Drei Größen legen ein Dreieck fest. Mit dem Dreieck ist auch sein Umkreisradius gegeben. Für einen vierten Punkt genügt eine weitere Größe. Also ist zu vermuten, dass ein Sehnenviereck immer durch vier passende Größen festgelegt wird.

Der Normalfall sind die vier Seiten a, b, c und d gegeben.

Die übrigen Größen eines Sehnenvierecks sind die Hauptdiagonale **e**, die Nebendiagonale **f,** der Radius des Umkreises **R** und der Flächeninhalt **A** .

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(bc + ad)}{ab + cd}}$$

$$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + bc)}{bc + ad}}$$

Hilfsgröße $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}$$

$$A = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

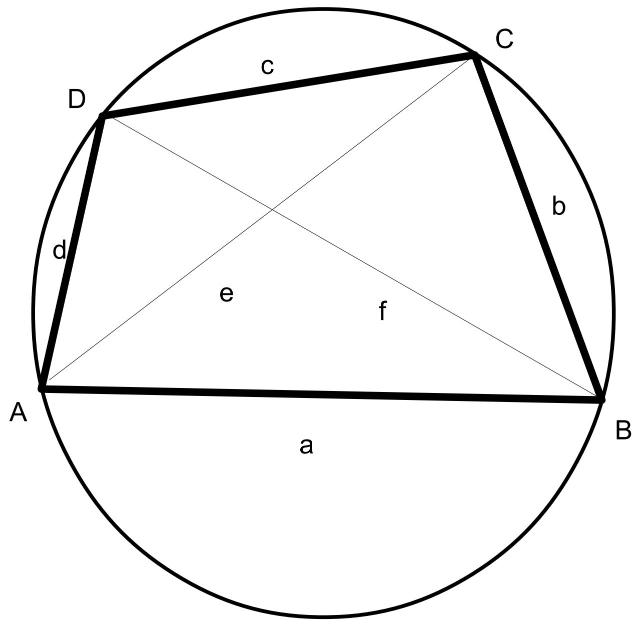
$$U = a + b + c + d$$

Der Satz des Ptolemäus

In einem konvexen Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seitenlängen gleich dem Produkt der Diagonalenlängen:
$ef = ac + bd$

Dieser Satz ist auch umkehrbar:

Gilt in einem Viereck die Beziehung $ef = ac + bd$ so liegen die Eckpunkte des Vierecks auf einem Kreis und das Viereck ist ein Sehnenviereck.



Intensivkurs – Mathematik: Viereck

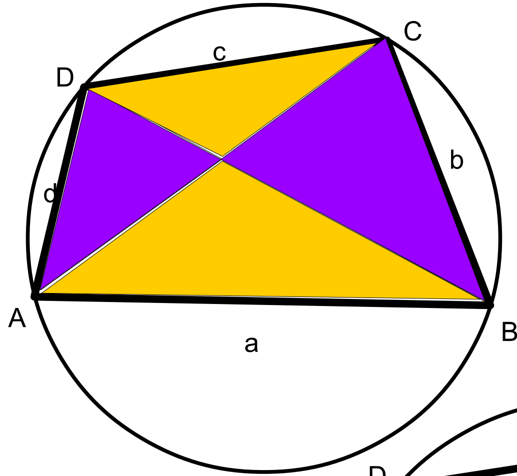
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Der Sehnensatz

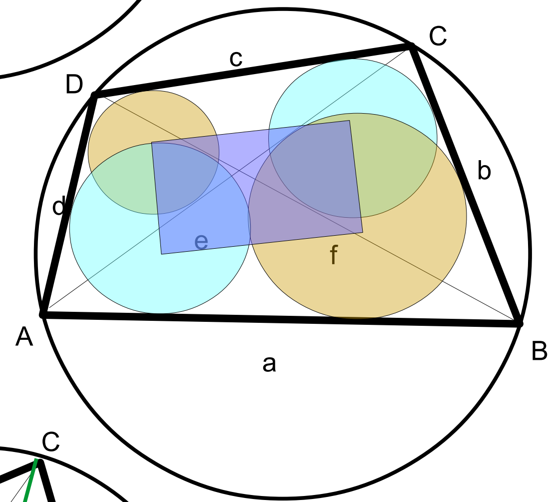
Die beiden Diagonalen e und f eines Sehnenvierecks teilen das Sehnenviereck in vier Teildreiecke. Es gilt: Je zwei gegenüberliegende Dreiecke sind zueinander ähnlich.

In nebenstehendem Beispiel würde dies bedeuten, dass die Dreiecke ΔASD und ΔBSC zu einander ähnlich sind. Sowie die Dreiecke ΔASC und ΔCSD.



Satz über das eingeschlossene Rechteck

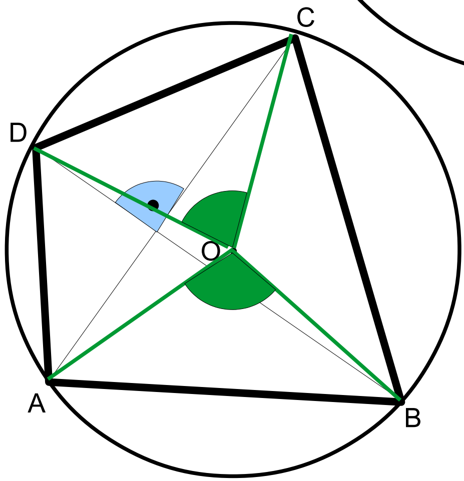
Jede Diagonale teilt das Sehnenviereck in zwei Teildreiecke auf, so dass insgesamt vier Teildreiecke entstehen. Verbindet man die Mittelpunkte der vier Inkreise dieser vier Teildreiecke, so ergibt sich ein Rechteck.



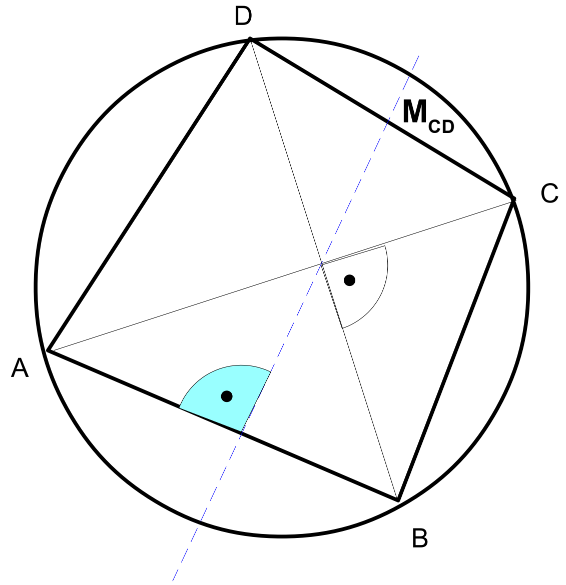
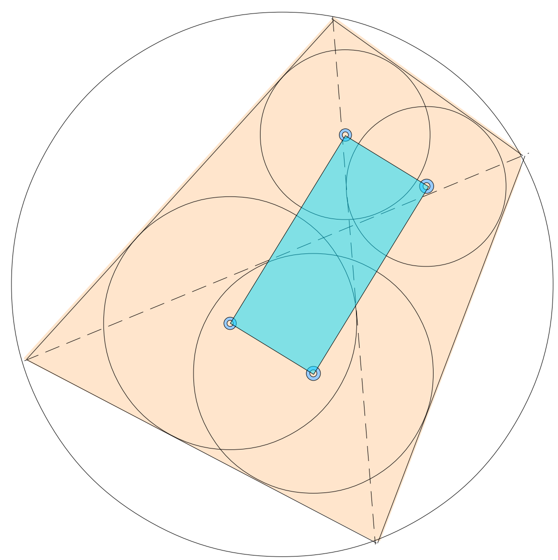
Satz über supplemente Winkel

O sei der Mittelpunkt des Umkreises in einem Sehnenviereck. Stehen im Viereck die Diagonalen e und f senkrecht aufeinander, sind die Winkel ∡AOB und ∡COD supplementär.

Jeder Winkel, der einen gegebenen Winkel zu einem gestreckten Winkel ergänzt (=180^0) ist ein Supplementwinkel



Treff Lernen
Christina Strauch

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Vierecke	**Satz über das Teilen gegenüberliegender Seiten** Stehen in einem Sehnenviereck die Diagonalen senkrecht aufeinander, so halbiert jede Gerade, die senkrecht auf einer Seite steht und durch den Diagonalenschnittpunkt geht, die jeweils gegenüberliegende Seite. Die senkrechte Gerade auf der Seite AB, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht halbiert die gegenüberliegende Seite CD. Der Satz besagt nicht, daß auch die Seite AB halbiert wird. Zeichnet man in ein Sehnenviereck die Diagonalen und in die Teildreiecke die Inkreise ein, so bilden die Mittelpunkte dieser Kreise ein Rechteck.	 

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Tangentenviereck

Nicht jedes Viereck hat einen Inkreis.
Vierecke, die einen Inkreis haben, heißen Tangentenvierecke.

Die Berührungspunkte K, L, M, N des Tangentenvierecks mit dem Inkreis werden als Lotfußpunkte bezeichnet, da sie die Fußpunkte der Lote, auf den Seiten, durch den Inkreismittelpunkt M sind.

Am einfachsten lässt sich ein Tangentenviereck konstruieren, indem man zuerst einen Kreis zeichnet und sich dann vier Punkte auf diesem Kreis wählt, an denen die Tangenten angelegt werden. Die vier Schnittpunkte der Tangenten bilden die Eckpunkte des Tangentenvierecks.

Ein Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summen der Längen zweier Gegenseiten gleich lang sind..

Zu den Tangentenvierecken zählen Quadrat, Drachen und Raute.

Der Normalfall sind die vier Seiten a, b, c und d gegeben.

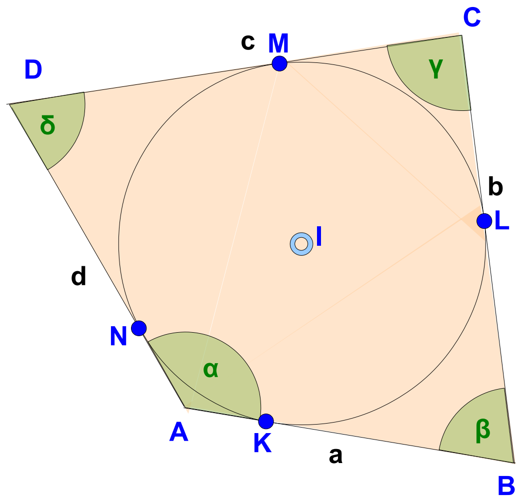
Größen übrigen Größen eines Tangentenvierecks sind der Radius des Inkreises **r** und der Flächeninhalt **A** .
Bei Tangentenvierecken gibt es keine Aussagen zu Diagonalen.

Hilfsgröße $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$

$$r = \sqrt{\frac{4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}{2\,(a + b + c + d)}}$$

$A = s \cdot r$

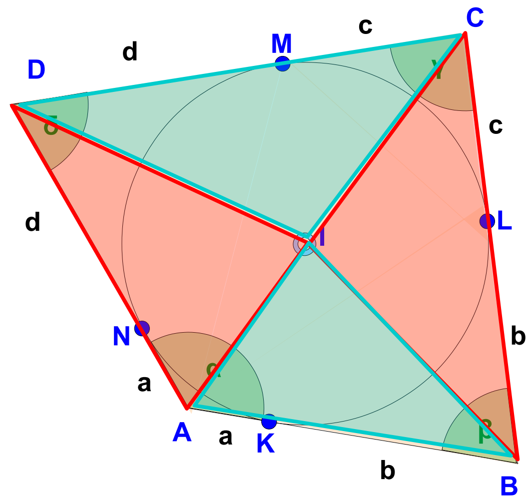
$U = a + b + c + d$



Satz über die Flächeninhalte

Ein Tangentenviereck mit dem Inkreismittelpunkt I lässt sich in vier Dreiecke ΔABI, ΔCDI, ΔBCI und ΔDAI einteilen. Für die Flächeninhalte dieser Dreiecke gilt:
[ABI] + [CDI] = [BCI] + [DAI]

Die eckigen Klammern [ ] bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks.



Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

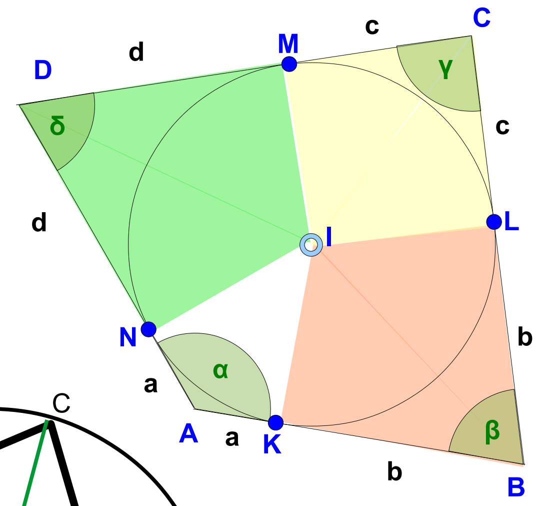
Satz über die Seitenlängen

In einem Tangentenviereck ist die Summe der Längen der jeweils gegenüberliegenden Seiten gleich groß, so dass gilt:

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$

In einem Tangentenviereck sind die Tangentenabschnitte von einem Eckpunkt bis zum Berührungspunkt bei beiden Strahlen, die zu diesem Eckpunkt gehören, gleich.

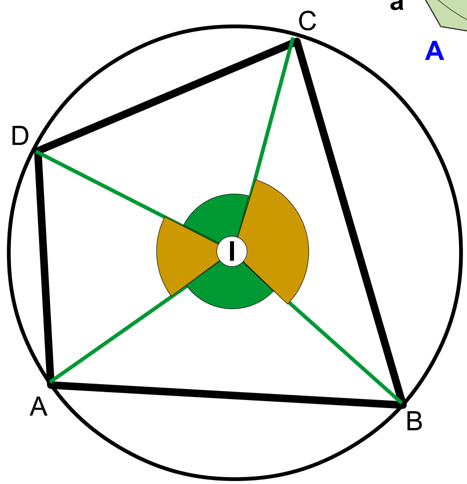
$\overline{DM} = \overline{DN}$; $\overline{CM} = \overline{CL}$
$\overline{AN} = \overline{AK}$; $\overline{BK} = \overline{BL}$



Satz über supplemente Winkel

Die Winkel, unter denen gegenüberliegende Seiten vom Inkreismittelpunkt aus gesehen werden, sind supplementär.

Es gilt somit: ∡AIB + ∡CID = 180° = ∡BIC und ∡DIA

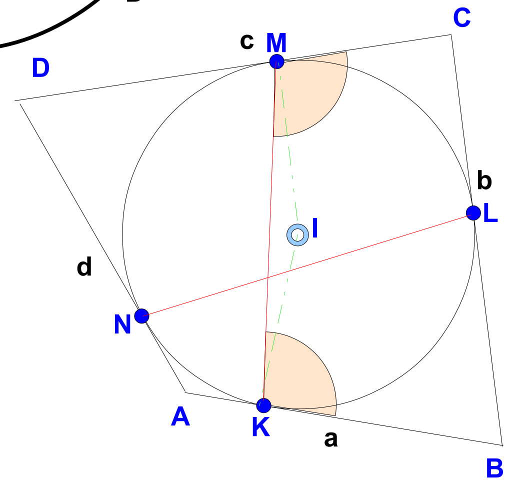


Satz über die Berührungssehne

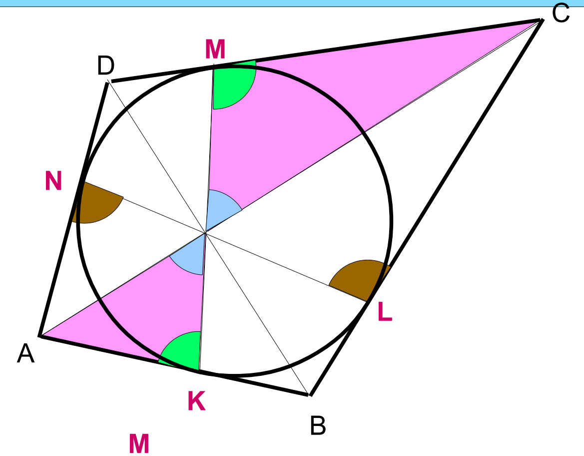
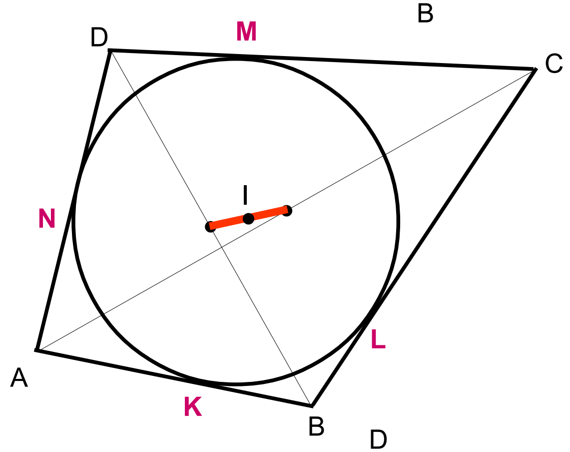
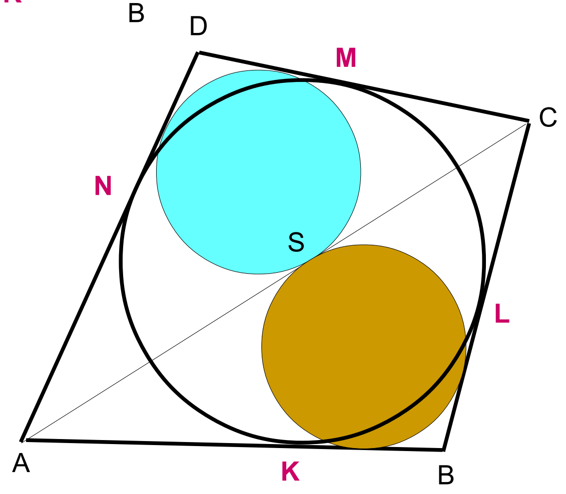
In einem Tangentenviereck teilt jede Berührungssehne (das ist die Verbindungsstrecke gegenüberliegender Berührungspunkte mit dem Inkreis) dieses in zwei Vierecke mit jeweils paarweise gleichen Winkeln.

Für die Berührungssehne $\overline{KM}$ gilt: ∡BKM = ∡CMK sowie für die Sehne $\overline{LN}$ die Gleichheit der Winkelgrößen ∡CLN = ∡LND .

Die grün eingezeichneten Linien bilden mit der Sehen ein gleichschenkliges Dreieck, damit sind die Basiswinkel diese Dreiecks gleich. Der Winkel zur Viereckseite ist 90^0, da die Seiten Tangenten an den Kreis sind. Damit sind die beiden Winkel gleich.



Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Vierecke	**Satz über den Schnittpunkt der Diagonalen** Die Diagonalen eines Tangentenvierecks schneiden sich im gleichen Punkt wie die beiden Sehnen gegenüberliegender Berührungspunkte mit dem Inkreis.	
	Satz über die Newtonsche Gerade Verbindet man die Mittelpunkte der beiden Diagonalen eines Tangentenvierecks, dann liegt der Inkreismittelpunkt I immer auf dieser Verbindungsgeraden, die als Newtonsche Gerade bezeichnet wird.	
	Satz über den Berührungspunkt der Inkreise Die Inkreise der Dreiecke ΔABC und ΔCDA eines Tangentenvierecks berühren sich in einem Punkt.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Vierecke	**Sehnen – Tangenten – Viereck**	

Wie sehen Vierecke aus, die sowohl Sehnen- als auch Tangentenviereck sind. Dass es solche gibt zeigt das Quadrat, das beide Eigenschaften besitzt. das Quadrat besitzt einen Inkreis und einen Umkreis.

In einem Sehnen-Tangenten-Viereck stehen die Berührungssehnen zwischen gegenüberliegenden Berührungspunkten senkrecht aufeinander.

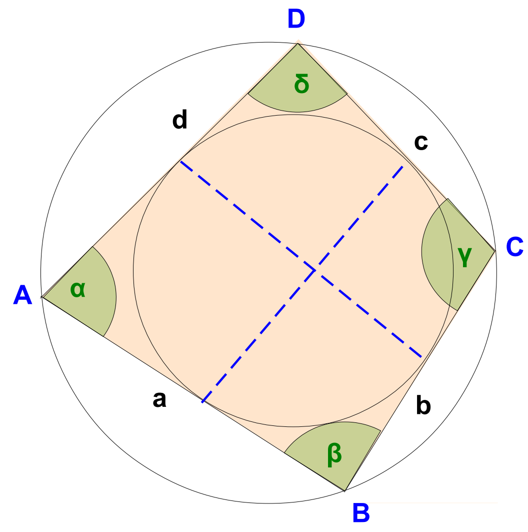
$$U = a + b + c + d$$

$$A = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$$

Hilfsgröße $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$

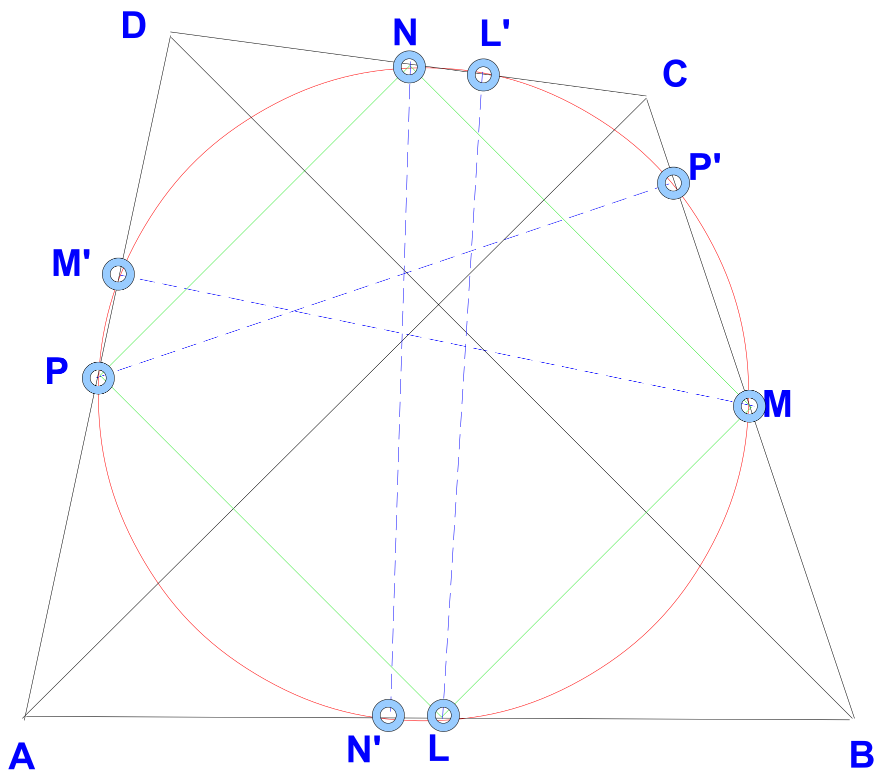
$$r = \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{s}}$$

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{a \cdot b \cdot c \cdot d}}$$



Intensivkurs – Mathematik: Viereck		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Vierecke	**Der Acht – Punkte – Kreis**	

Es sei ABCD ein Viereck mit senkrechten Diagonalen. Dann liegen die Seitenmitten des Vierecks und ihre Projektionen auf die gegenüberliegende Seite auf einem Kreis, dem sogenannten Acht–Punkte–Kreis.



Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Trapez

Eine Trapez ist ein Viereck, bei dem :

- zwei Seiten parallel gegenüberliegen, die Parallelseiten. Die beiden anderen Seiten heißen Schenkel.
- Die Summe der Winkel, die an einem Schenkel anliegen, ergänzen sich zu 180^0.

$m = \frac{a+c}{2}$

$U = a + b + c + d$

$A = m * h = \frac{a+c}{2}\, h$

$h = d \sin\alpha = d \sin\delta = c \sin\beta = c \sin\gamma$

$h = \frac{2}{a-c}\sqrt{s\,(s+c-a)(s-b)(s-d)}$

d sin α = d sin δ ist richtig, weil δ = 180^0 – α ist und da sind die sin Werte gleich

Hilfsgröße $s = \frac{1}{2}\,(b + d + a - c)$

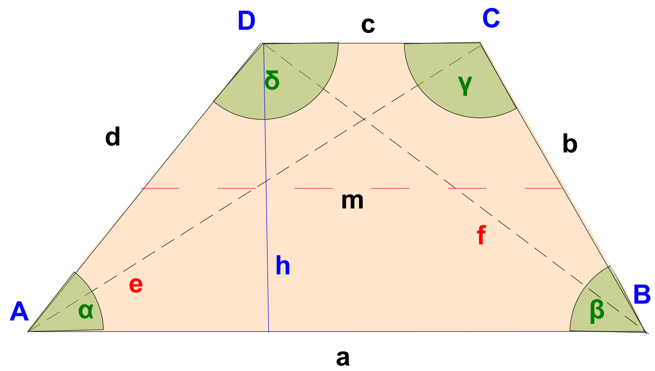
$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta} = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta}$

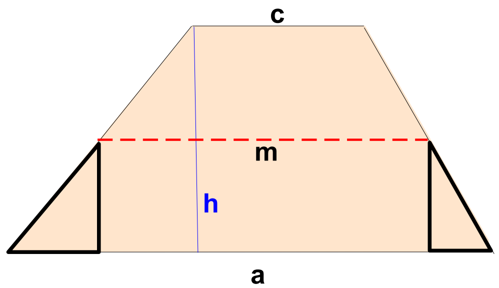
$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma}$

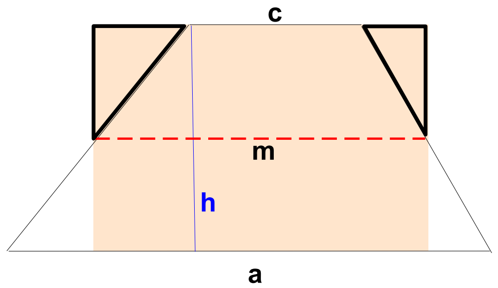
Der **Flächeninhalt** ergibt sich aus der Höhe zwischen den beiden Parallelen und der Mittellinie zwischen den Parallelen, die von den beiden Schenkeln begrenzt wird.
Diese Mittellinie errechnet sich aus (a+c)/2.

$A = \frac{a+c}{2}\, h$

Trennt man die beiden unteren Dreiecke ab, passen sie Flächengleich an den oberen Teil des Trapezes.







Treff Lernen
Christina Strauch

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Vierecke	**Gleichschenkliges Trapez**	

Bei einem gleichschenkligen Trapez bestimmen drei Werte die Figur eindeutig. Angenommen, die Seiten a, c und die Höhe das Trapezes sind gegeben:

$$b = d$$
$$\alpha = \beta$$
$$\delta = \gamma$$
$$\alpha + \delta = 180°$$

Mittellinie: $m = \frac{a + c}{2}$

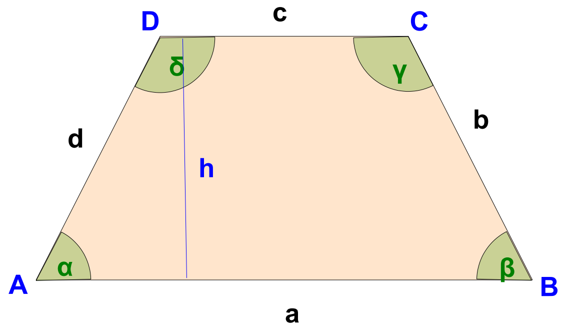
$$U = a + c + \sqrt{4h^2 + a^2 - 2ac + c^2}$$

Schenkel: $b = \frac{\sqrt{(4h^2 + a^2 - 2ac + c^2)}}{2}$

Diagonale: $e = \frac{\sqrt{(4h^2 + a^2 + 2ac + c^2)}}{2}$

Umkreisradius: $R = \frac{\sqrt{(a^4 + c^4 + 16h^4 + 8a^2h^2 + 8c^2h^2 - 2a^2c^2)}}{8h}$

Basiswinkel $\alpha = \arctan \frac{2h}{a - c}$



Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

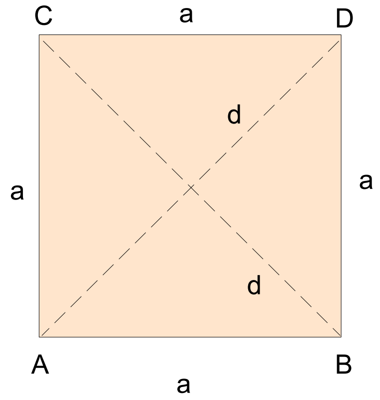
Quadrat

=> das Quadrat ist ein spezielles Rechteck und eine spezielle Raute

Ein Quadrat ist ein Viereck, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind, deshalb wird für alle Seiten nur ein Buchstabe zur Bezeichnung verwendet.

Jeder Winkel des Quadrates ist ein rechter Winkel, hat also eine Größe von 90^0.

Die Diagonalen sind gleich lang und halbieren sich in ihrem Schnittpunkt und schneiden sich senkrecht.



Der **Umfang** eines Quadrates ergibt sich aus viermal der Seitenlänge, da alle Seiten gleich lang sind:

$$U = 4 * a$$

Der **Flächeninhalt** ergibt sich aus Länge mal Breite, wobei hier Länge gleich Breite ist.

$$A = a^2$$

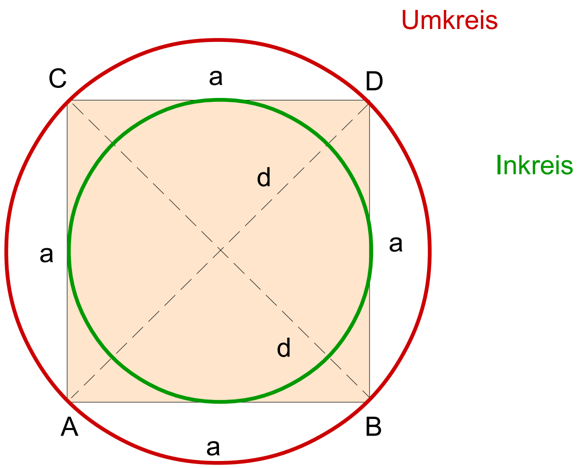
Um den **Umkreis** oder **Inkreis** zu erhalten, müssen entweder die Mittelsenkrechten (=Seitenhalbierenden) oder die beiden Diagonalen erzeugt werden. Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Umkreises und des Innenkreises.

Die **Länge der Diagonalen** ergibt sich aus aus dem Pythagoras:

$$d = a \bullet \sqrt{2}$$

Der Umkreisradius beträgt: $R = \frac{a}{2} \bullet \sqrt{2}$

Der Inkreisradius beträgt: $r = \frac{a}{2}$



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Rechteck

=> das Rechteck ist ein spezielles Parallelogramm und Trapez

Ein Rechteck ist ein Viereck, bei dem

- Jeder Winkel des Rechtecks ist ein rechter Winkel, hat also eine Größe von 90^0.

Aus der Definition folgt :

- gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleichlang (siehe Parallelogramm)
- Die Diagonalen sind gleich lang halbieren sich
- das Rechteck ist achsensymmetrisch zu den Verbindungslinien der gegenüberliegenden Seitenmitten.
- Die Diagonalen in einem Viereck sind genau dann gleichlang und halbieren sich, wenn das Viereck ein Rechteck ist.

Größen des Rechtecks sind
die Seiten a und b, die Diagonale d, der Radius des Umkreises R, der Umfang U und der Flächeninhalt A.

Der **Umfang** eines Rechtecks ergibt sich zweimal der Länge plus der Breite, da je zwei Seiten gleich lang sind.

$U = 2*(a + b)$

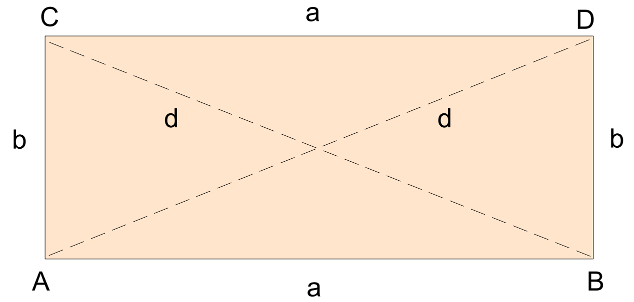
Der **Flächeninhalt** ergibt sich aus Länge mal Breite, da jedes Rechteck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann und somit die Dreiecksfläche verdoppelt werden muss.

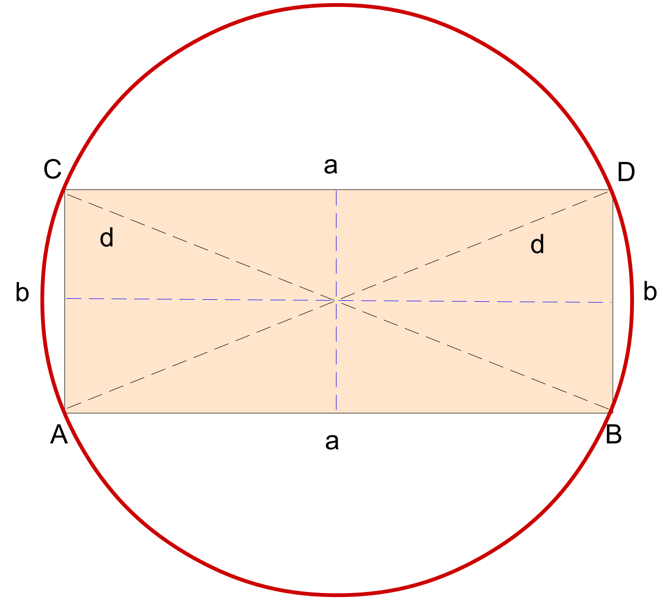
$A = a * b$

Um den **Umkreis** zu erhalten, müssen entweder die Mittelsenkrechten (=Seitenhalbierenden) oder die beiden Diagonalen erzeugt werden. Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Umkreises.
Einen Innenkreis, wie beim Quadrat gibt es beim Rechteck nicht.

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$

$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$





Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Viereck		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**

Vierecke

Parallelogramm

=> das Parallelogramm ist ein spezielles Trapez

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem :

- die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind,
- die gegenüberliegenden Winkel gleich groß,
- die benachbarten Winkel 180^0 ergeben

Aus der Definition folgt bereits:

- Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn es gleichlange Gegenseiten hat.
- Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn die Gegenwinkel gleich groß sind.
- Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn **ein Paar** gegenüberliegender Seiten parallel sind
- Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die Diagonalen halbieren.

Größen des Parallelogramms sind die Seiten **a** und **b**, die Innenwinkel **α** und **β**, die Diagonalen **e** und **f,** die Höhen $\mathbf{h_a}$ und $\mathbf{h_b}$ und der Flächeninhalt A .
Im allgemeinen ist ein Parallelogramm durch seine Seiten a und b und einen der beiden Winkel α oder β eindeutig bestimmt und konstruierbar.

$$\beta = 180^0 - \alpha$$

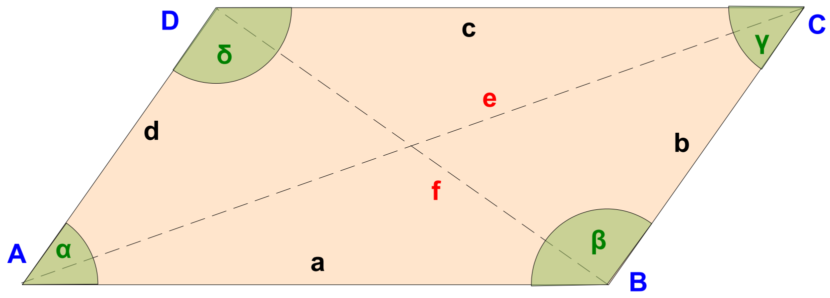
$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180 - \alpha)}$$

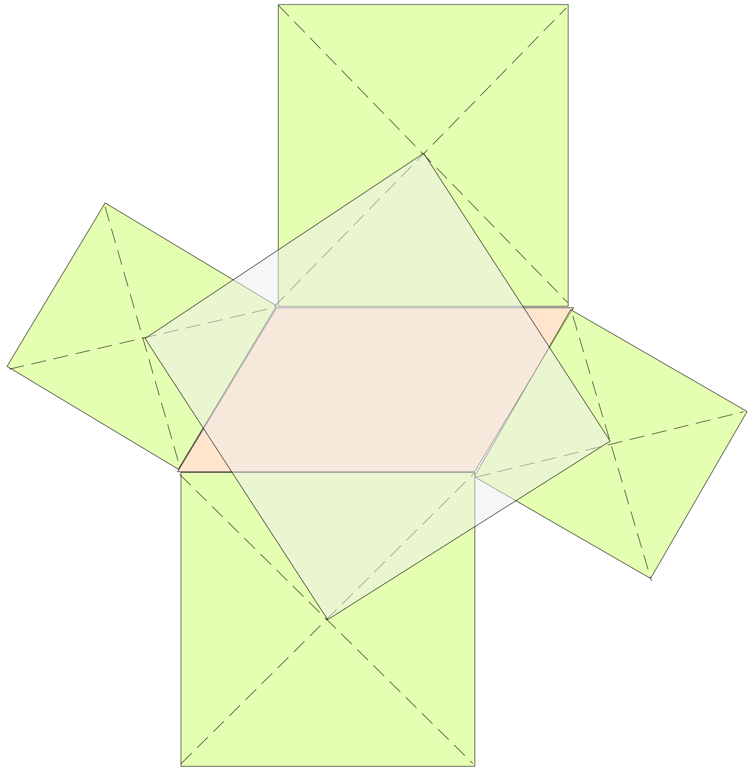
$$f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)}$$

$$h_a = b \sin(\alpha)$$

$$h_b = a \sin(\alpha)$$

Errichtet man auf den Seiten eines Parallelogramms vier Quadrate, so bilden ihre Mittelpunkte auch wieder ein Quadrat.





Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

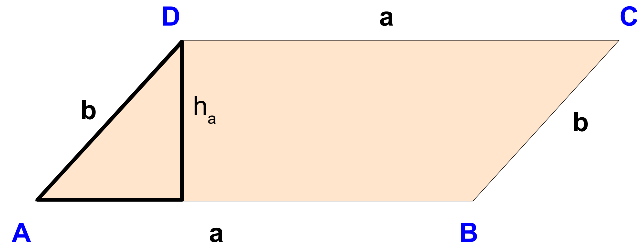
Vierecke

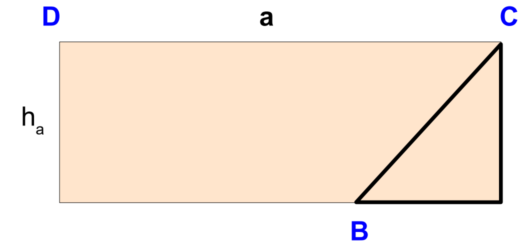
Der **Umfang** eines Parallelogramms ergibt sich zweimal der Länge der Grundlinie und der Seitenlinie.

$$U = 2*(a + b)$$

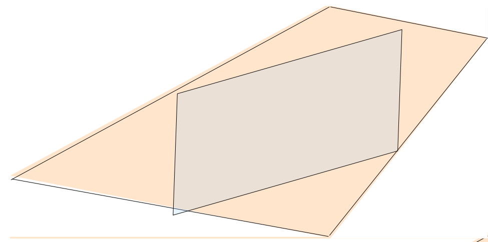
Der **Flächeninhalt** ergibt sich aus einer Seitenlänge multipliziert mit der Höhe auf diese Seite.
Zur Seite a wird die Höhe auf die Seite a (h_a) so eingezeichnet, dass sie durch den Punkt D verläuft. das links entstehende Dreieck kann gedanklich abgeschnitten und an der rechten Seite wieder angesetzt werden. damit hat sich an der Fläche des Parallelogramms nichts verändert, die entstandene Fläche ist allerdings ein Rechteck und kann über die Rechteckformel berechnet werden.

$$A = a * h_a$$

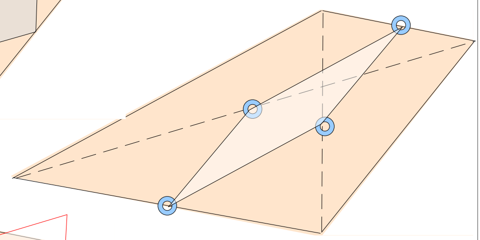




Verbindet man in einem beliebigen Viereck die Mittelpunkte der Seiten so ergibt sich ein Parallelogramm

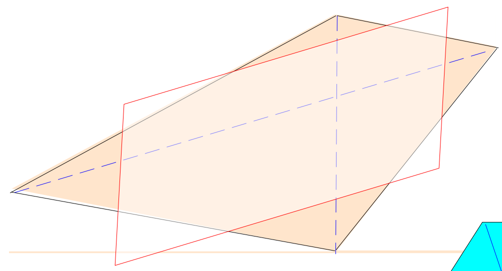


Verbindet man die Mittelpunkte der beiden Diagonalen mit den Mittelpunkten zweier Gegenseiten entsteht ein Parallelogramm.



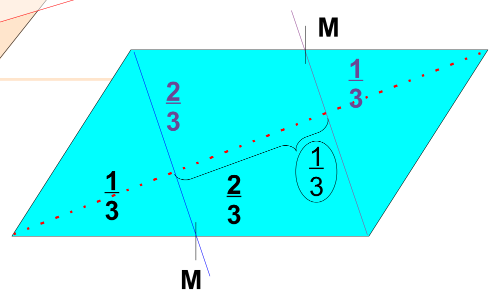
Teilt man die Seiten eines beliebigen Vierecks in drei gleiche Teile und zeichnet durch die Teilpunkte wie links Geraden, so entsteht ein Parallelogramm.

Je zwei Gegenseiten des Parallelogramms sind parallel zu den Diagonalen.



Verbindet man in einem Parallelogramm den Eckpunkt mit dem Mittelpunkt einer gegenüberliegenden Seite wie links, so teilt diese Transversale die Diagonale im Verhältnis 2:1.

Verbindet man den Mittelpunkt der Gegenseite ebenfalls mit dem gegen-überliegenden Eckpunkt, teilt man die Diagonale in drei gleiche Teile



Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Raute

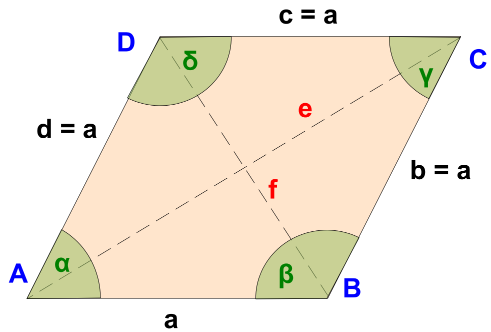
=> Die Raute ist ein spezielles Parallelogramm, Drachenviereck und Trapez

Eine Raute ist ein Viereck, bei dem :

- die alle Seiten gleich lang sind,
- die gegenüberliegenden Winkel gleich groß,
- die benachbarten Winkel 180^0 ergeben

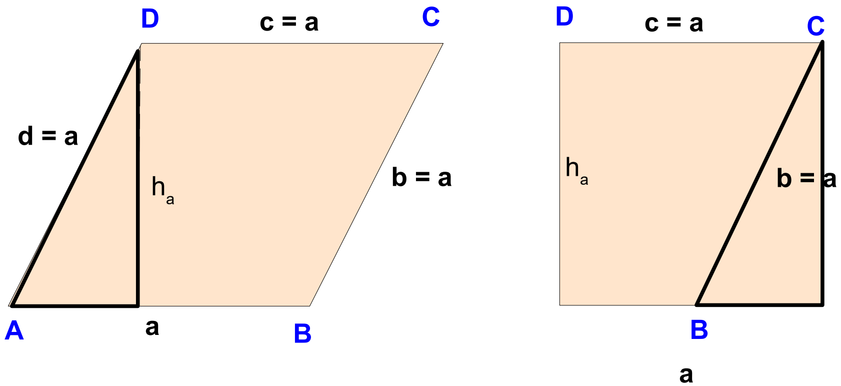
Aus der Definition folgt :

- gegenüberliegende Seiten sind parallel (siehe Parallelogramm)
- Die Diagonalen halbieren sich und schneiden sich in einem rechten Winkel
- Eine Raute ist achsensymmetrisch zu beiden Diagonalen und punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Diagonalen
- Stehen in einem Viereck die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren sich, dann ist das Viereck eine Raute.



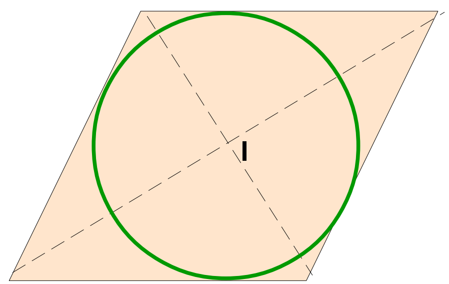
Der **Flächeninhalt** ergibt sich aus einer Seitenlänge multipliziert mit der Höhe auf diese Seite.
Zur Seite a wird die Höhe auf die Seite a (h_a) so eingezeichnet, dass sie durch den Punkt D verläuft. Das links entstehende Dreieck kann gedanklich abgeschnitten und an der rechten Seite wieder angesetzt werden. damit hat sich an der Fläche des Rhombus nichts verändert, die entstandene Fläche ist allerdings ein Rechteck und kann über die Rechteckformel berechnet werden.

$$A = a * h_a$$



Um den **Inkreis** zu erhalten, müssen die beiden Diagonalen erzeugt werden.
Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Inkreises.
Die Diagonalen sind gleichzeitig Winkelhalbierende.

Den Radius des Inkreises erhält man, indem man vom Schnittpunkt der Diagonalen das Lot auf eine Seite fällt.



Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Größen der Raute sind die Seite **a**, die Diagonalen **e** und **f**, die Innenwinkel **α** und **β** = 180°– **α**, die Höhe **h**, der Umfang **U**, der Flächeninhalt A und der Radius des Inkreises r. Die Raute besitzt keinen Umkreis.

Die Raute ist eindeutig gegeben durch zwei Größen:
entweder a und der Winkel **α**
oder die Länge der zwei Diagonalen e und f

Sind a und **α** gegeben:

$e = a \cdot \sqrt{2 + 2\cos\alpha}$

$f = a \cdot \sqrt{2 - 2\cos\alpha}$

$U = 4 \cdot a$

$h_a = a \cdot \sin\alpha$

$A = a \cdot h_a = a^2 \cdot \sin\alpha$

$r = \frac{a}{2} \cdot \sin\alpha$

Sind e und f gegeben:

$a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e^2 + f^2}$

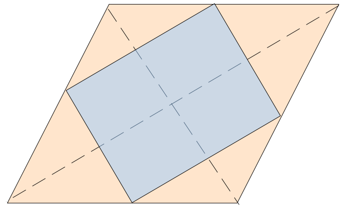
$A = \frac{1}{2} e \cdot f$

$U = 2 \cdot \sqrt{e^2 + f^2}$

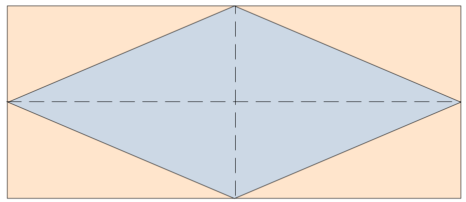
$h = \frac{e\,f}{\sqrt{e^2 + f^2}}$

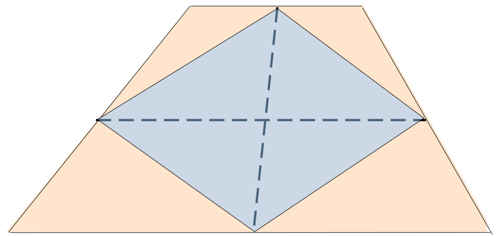
$r = \frac{e\,f}{2\sqrt{e^2 + f^2}}$

$\alpha = 2 \arctan \frac{f}{e}$



Verbindet man die Seitenmitten einer Raute, dann entsteht ein Rechteck.





Verbindet man die Seitenmitten eines Rechtecks oder eines gleichschenkligen Trapezes, dann entsteht eine Raute.

Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Drachenviereck

Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem zwei paar Nachbarseiten gleich lang sind.

- die Winkel, an denen ungleichlange Seiten zusammenstoßen sind gleich
- die Diagonalen stehen Senkrecht aufeinander
- eine der Diagonalen ist eine Symmetrie-gerade, die das Viereck in zwei gleiche Dreiecke teilt
- diese Diagonale halbiert die zwei nicht gleichen Winkel
- diese Diagonale halbiert die andere Diagonale

Der **Umfang** eines Drachenvierecks ergibt sich aus zweimal der unterschiedlichen Seitenlänge:

$$U= 2*(a + b)$$

Der **Flächeninhalt** ergibt sich aus der Hälfte des Produktes der beiden Diagonalen. Schneidet man die beiden Dreiecke ab und legt sie an der rechten Seite wieder an, erkennt man das Rechteck, das der Originalfläche entspricht.

$$A = e * f / 2$$

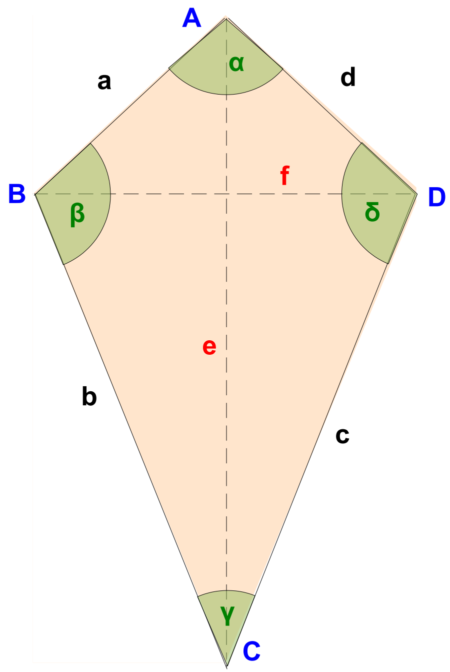
Andererseits entspricht f/2 genau der Höhe eines Dreiecks ABC oder ADC mit der Grundlinie e. Damit ergibt sich aus der Flächenformel für das Dreieck:

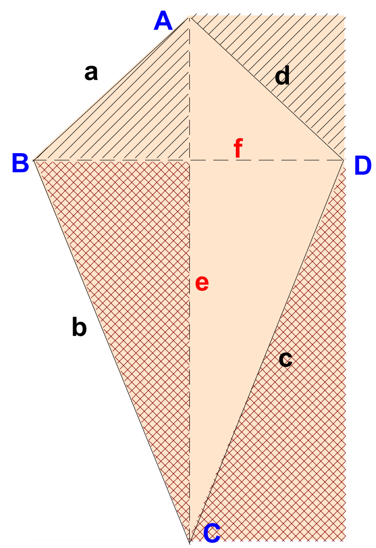
$$A = \frac{1}{2} * e * f / 2$$

Da das Drachenviereck aus zwei solchen Dreiecken besteht, erhält man wieder die obige Formel.

Unter Berücksichtigung des Pythagoras lässt sich die Fläche auch über die Seitenlängen ausdrücken:

$$A = \sqrt{\frac{(2a^2b^2+2a^2e^2+2b^2e^2 - a^4 - b^4 - e^4)}{2}}$$





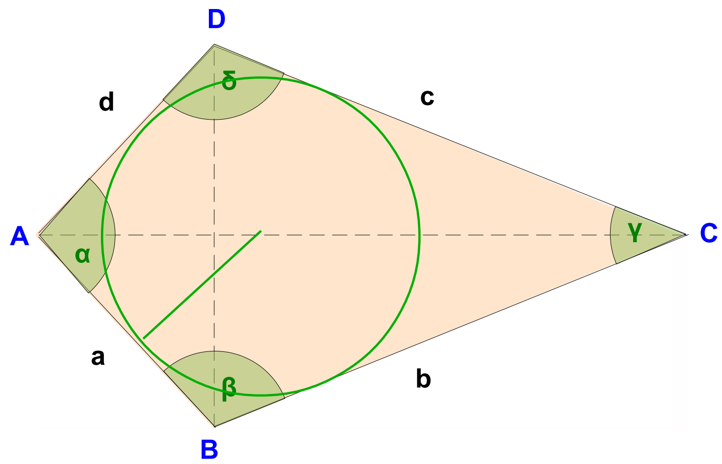
Intensivkurs – Mathematik: Viereck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierecke

Um den **Inkreis** zu erhalten, müssen die Winkelhalbierenden des Drachenvierecks erzeugt werden. Die Symmetriegerade ist bereits Winkelhalbierende der beiden ungleichen Winkel.

Den Radius des Inkreises erhält man, indem man von diesem gefundenen Mittelpunkt das Lot auf eine der Seiten fällt.



Da bei Drachenviereck a = d und b = c reicht die Kenntnis der Seiten a, b und e um die weiteren Größen zu bestimmen

$$f = \frac{1}{e}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2e^2 + 2b^2e^2 - a^4 - b^4 - e^4}$$

$$p = \frac{a^2 - b^2 + e^2}{2e} \qquad \alpha = 2\arccos\frac{-a^2 - b^2 + e^2}{2ab}$$

$$q = \frac{b^2 - a^2 + e^2}{2e} \qquad \beta = \arccos\frac{-a^2 + b^2 + e^2}{2ae}$$

$$\gamma = 2\arccos\frac{a^2 - b^2 + e^2}{2eb}$$