Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

11. Juli 2017

Stochastik

Übung 11: Markovsche Halbgruppen

Aufgabe 1: Translationsinvariante Halbgruppen

Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Markovsche Halbgruppe von Kernen auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Diese heißt *translationsinvariant*, falls

$$P_t(x, B) = P_t(x + z, B + z)$$

für alle $x, z \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $t \geq 0$ gilt.

(a) Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$\mu_t(B) = P_t(0, B).$$

Dadurch wird eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ definiert. Zeige, dass dann für $s, t \geq 0$ $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$ gilt, also $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

(b) Gilt auch die Umkehrung, d. h. wird durch jede Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auch eine translationsinvariante Markovsche Halbgruppe definiert?

(c) Zeige, dass eine translationsinvariante Markovsche Halbgruppe von Kernen $(P_t)_{t\geq 0}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ normal ist.

Aufgabe 2: Poissonsche Halbgruppe

Sei $(\pi_t)_{t\geq 0}$ die auf $\mathbb{R}$ definierte Poissonsche Faltungshalbgruppe. Zur Erinnerung: Das diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\pi_t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^k}{k!} \varepsilon_k$$

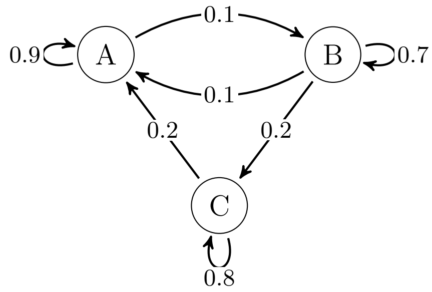
mit Parameter $t \geq 0$ (für $t = 0$ setzen wir $\pi_0 = \varepsilon_0$) heißt Poisson-Verteilung zum Parameter t. Das Maß ε_k beizeichnet das Dirac-Maß im Punkt $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Faltungshalbgruppe handelt, d. h. es gilt $\pi_{s+t} = \pi_s * \pi_t$.

(b) Zeige, dass die ihr zugeordnete Markovsche Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ von Kernen auf $\mathbb{R}$ sogar eine Markovsche Halbgruppe von Kernen auf $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3: Markovkette

Folgendes Diagramm beschreibt den zufälligen Übergang eines Markov-Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ zwischen drei verschiedene Zuständen A, B und C.



(a) Gib die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten Q an, wobei $Q_{i,j} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$ für $t \in \mathbb{N}_0$.

(b) Gib die stationäre Verteilung μ des Prozesses X an. Beachte, dass es dafür unerheblich ist, in welchem Zustand der Prozess startet.