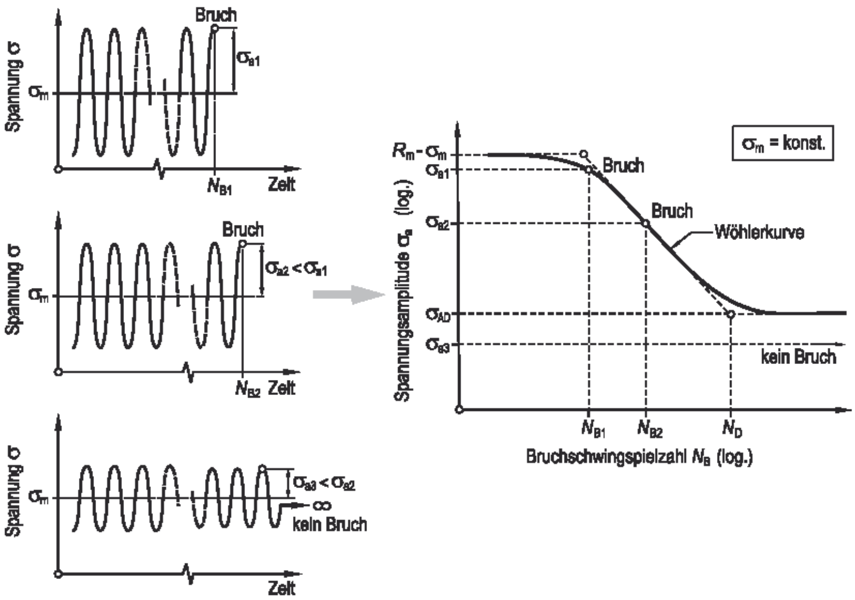
Übungsaufgaben
Betriebsfestigkeit Bruchmechanik

Dr.-Ing. Thomas Lehmann
Dipl.-Ing. Christian Silbermann
Dipl.-Ing. Susann Hannusch



Literatur/Quellen

Haibach, E.; Betriebsfestigkeit. Berlin/Heidelberg: Springer; 2006.
http://www.springerlink.com/content/978-3-540-29363-7/

Läpple, V.; Einführung in die Festigkeitslehre. Wiesbaden: Vieweg+ Teubner; 2008; 3. Auflage.
http://www.springerlink.com/content/978-3-528-03205-0/

Radaj, D.; Ermüdungsfestigkeit. Berlin/Heidelberg: Springer; 2003.
http://www.springerlink.com/content/978-3-540-71458-3/

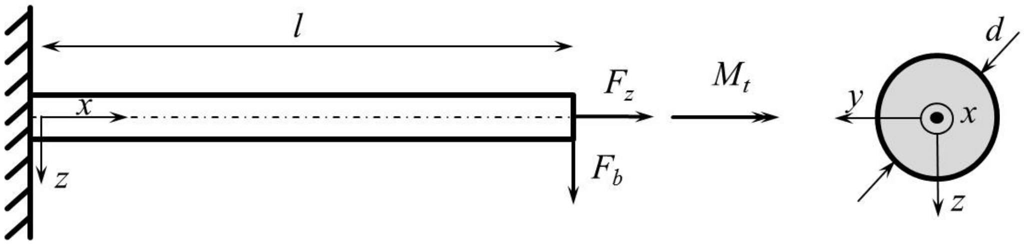
Mattheck, C.; Warum alles kaputt geht. Karlsruher Institut für Technologie; 2003; 1. Auflage.

Bergmann, W.; Werkstofftechnik 1. München: Carl Hanser Verlag; 2008; 6. Auflage.
Hertzberg, R.W., Vinci, R.P., Hertzberg, J.L.; Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials. Hoboken: John Wiley & Sons; 2012; 5. Auflage.

Übung 1: Elementare Beanspruchungen

Aufgabe 1.1: Kragträger

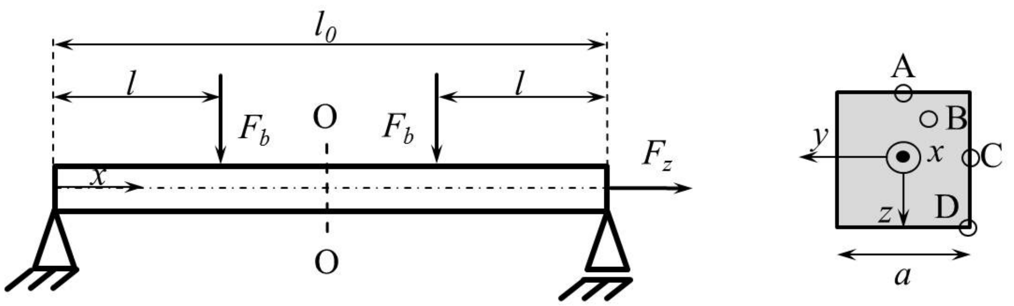
Für den fest eingespannten Träger sind die Zug-, Biege-, Torsions- und Querkraftschubspannung zu berechnen. Zeichnen Sie den Verlauf der einzelnen Spannungen über dem Querschnitt. Geben Sie die Koeffizienten des Spannungstensors $\sigma_{ab} = \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \ldots, \sigma_{zz}$ im Punkt $A = \left(0, 0, \frac{d}{3}\right)$ an.



Geg: $d,\ l = 25d,\ F,\ F_z = -10F,\ F_b = F,\ M_t = 5Fd$ **Ges:** σ_{ab} im Punkt A

Aufgabe 1.2: Vier-Punkt-Biegung

Für den dargestellten Träger mit quadratischem Querschnitt ist die Normalspannung σ_{xx} infolge Biegung und Zug im Schnitt O-O für die gegebene Belastung zu berechnen.



Für folgende Fälle ist das Spannungsverhältnis R in den Punkten A, B, C und D zu bestimmen:

a) $F_z = 25F, F_b = F\cos(\omega t), F > 0$

b) $F_z = 25F, F_b = F\cos(\omega t), F < 0$

c) $F_z = 0, F_b = F\cos(\omega t)$

Geg: $a,\ l = 5a,\ F,\ A = \left(\frac{l_0}{2}, 0, -\frac{a}{2}\right),\ B = \left(\frac{l_0}{2}, -\frac{a}{4}, -\frac{5a}{12}\right),\ C = \left(\frac{l_0}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right),\ D = \left(\frac{l_0}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Ges: σ_{xx}, R

Übung 2: Wiederholung Elastizitätstheorie

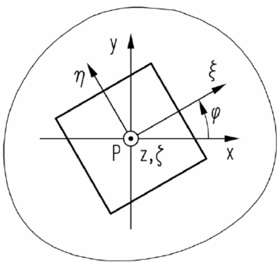
Aufgabe 2.1: Kontinuumsmechanische Beziehungen

a) Wie lautet die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung (Kinematik)?

b) Geben Sie symbolische und Koeffizientendarstellung des Spannungstensors an. Welche Eigenschaften besitzt er?

c) Wie lautet die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für das Hooke'sche Gesetz in symbolischer und Koeffizientendarstellung?

Aufgabe 2.2: Spannungstensor und -zustand



Für zwei Beanspruchungszustände (1) und (2) eines Bauteils sind die Koeffizienten des Spannungstensors im Punkt P bzgl. der Basen $\underline{e}_a, a \in \{x, y, z\}$ bzw. $\underline{e}_\alpha, \alpha \in \{\xi, \eta, \zeta\}$ gegeben:

$$[\overset{(1)}{\sigma}_{ab}] = \begin{bmatrix} -460 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}, \quad [\overset{(2)}{\sigma}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 770 & -162 & 0 \\ -162 & 230 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Bestimmen Sie den resultierenden Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ bei Überlagerung beider Beanspruchungen. Ermitteln Sie dafür die Hauptspannungen und -richtungen im Hauptachsensystem $\underline{e}_K, K \in \{I, II, III\}$ sowie die extremale Schubspannung. Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis.

Geg: $[\overset{(1)}{\sigma}_{ab}], [\overset{(2)}{\sigma}_{\alpha\beta}], \varphi = 30°$ **Ges:** $\underline{\underline{\sigma}}, [\sigma_{ab}], [\sigma_{(K)}]$

Aufgabe 2.3: Verzerrungs- und Spannungsfeld

Gegeben ist ein Verschiebungsfeld mit $\underline{u} = u_z \underline{e}_z$ und $u_z = b\frac{\varphi}{2\pi}$ wobei sich der Winkel φ entsprechend Zylinderkoordinaten zu $\tan\varphi = y/x$ ergibt.

a) Zeichnen Sie das Verschiebungsfeld am Beispiel eines Körpers, der ursprünglich Hohlzylinderform hatte.

b) Welcher Verzerrungszustand liegt vor?

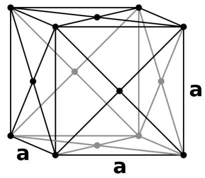
c) Ermitteln Sie die Koeffizienten $\varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}$ und die Spur ε_{aa}.

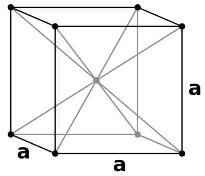
d) Welches Spannungsfeld ergibt sich bei Verwendung des Hooke'schen Gesetzes?

Übung 3: Versetzungstheorie

Aufgabe 3.1: Gleitsysteme in Kristallen

Bestimmen Sie für kubisch flächen- und raumzentrierte Kristalle mit der Gitterkonstante a und der dargestellten Elementarzelle die Gleitsysteme. Nutzen Sie dazu die Miller'sche Notation.



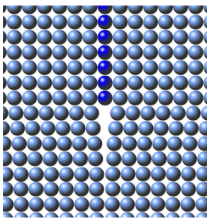


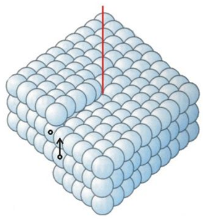
Hinweis - Gleitsysteme
Gleitebene = Ebene dichtester Kugelpackung
Gleitrichtung = Gerade dichtester Kugelpackung
Gleitsystem = Kombination aus Gleitebenen und Gleitrichtungen

Hinweis - Miller'sche Notation
Richtung: [i j k], Familie von Richtungen: <i j k>
Ebene: (i j k), Familie von Ebenen: {i j k}

Aufgabe 3.2: Burgersvektor

Gegeben ist eine Stufen- und eine Schraubenversetzung in einem einfach kubischen Kristallgitter gemäß der Abbildung. Bestimmen Sie die Burgersvektoren grafisch mit Hilfe des Burgersumlaufs.

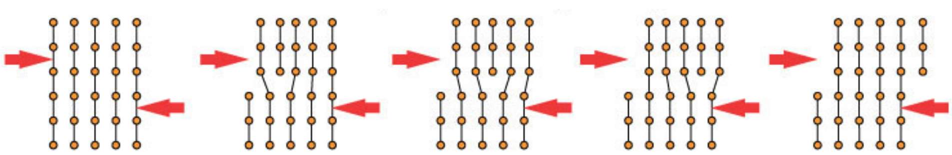




Vergleichen sie außerdem die Richtung von Burgers- und Linienvektor der Versetzungen und veranschaulichen Sie sich die Bewegungsmöglichkeiten.

Aufgabe 3.3: Plastische Deformation und Gleitstufen

Wieviele Stufenversetzungen mit $|\underline{b}| = 2,86 \cdot 10^{-10}$ m müssen einen Kristall der Höhe $h = 1$ mm in der dargestellten Art durchwandern, damit eine plastische Scherung von $\gamma = 0.0175$ resultiert?



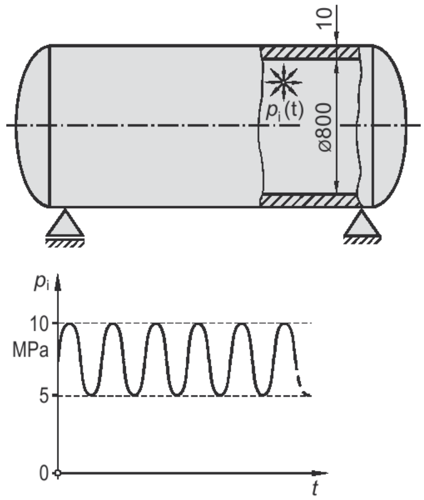
Aufgabe 3.4: In- und Extrusionen, Ermüdung

Erläutern Sie, wie infolge der Versetzungsbewegung bei Ermüdung Intrusionen und Extrusionen entstehen und warum kfz-Metalle im Gegensatz zu krz-Metallen keine Dauerfestigkeit zeigen. Nutzen Sie dabei auch die Erkenntnisse aus den vorherigen Aufgaben.

Übung 4: BZF, Wöhler-, Smith- und Haigh-Diagramm I

Aufgabe 4.1: Spannungsverhältnis

In einem dünnwandigen Gashochdruckbehälter (d_i = 800 mm, $s = 10$ mm) aus Werkstoff S620QL herrscht ein zeitlich veränderlicher Innendruck p_i (siehe Abbildung).



Werkstoffkennwerte S620QL:

$R_{p0,2} = 620$ MPa, $R_m = 870$ MPa

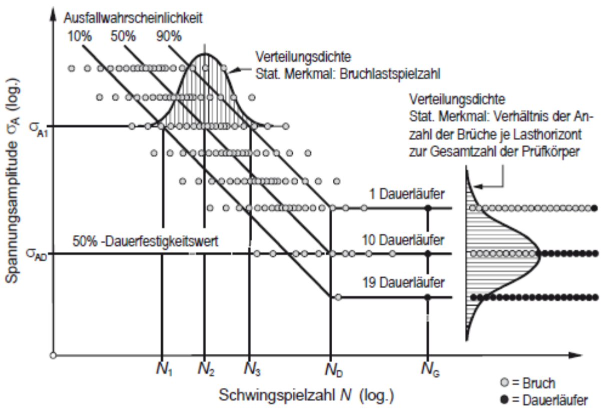
$E = 210000$ MPa, $\nu = 0,30$

a) Berechnen Sie für Tangential-, Axial- und Radialspannungskomponente jeweils Oberspannung σ_o, Unterspannung σ_u und Spannungsverhältnis R.

b) Bestimmen Sie die vorliegende Sicherheit gegen Versagen bei Verwendung der Normalspannungshypothese.

Aufgabe 4.2: Wöhlerdiagramm

An einem Zugstab wurde im Zeitfestigkeitsbereich für verschiedene Spannungsamplituden σ_a bei konstanter Mittelspannung $\sigma_m = 50$ MPa die Bruchschwingzahl gemessen. Konstruieren sie für die gegebenen Daten das Wöhlerdiagramm für eine 50 %-Ausfallwahrscheinlichkeit. Die Zugfestigkeit des duktilen Werkstoffs wird mit $R_m = 400$ MPa angegeben, die Dauerfestigkeit ist $\sigma_{aD} = 85$ MPa.



$\frac{\sigma_a}{\mathrm{MPa}}$	300	220	165	125	100
	80	1936	26953	243218	4129351
	105	1580	20591	415929	4720066
N_B	85	1907	32231	372719	4140753
	108	2038	37482	324813	3553543
	97	1713	28435	253258	4339633

Aufgabe 4.3: Dauerfestigkeitsschaubilder

Zeichnen sie für das Material aus Aufgabe **??** die Dauerfestigkeitsschaubilder nach Haigh und Smith für $R_{p0,2} = 335$ MPa. Zeichnen sie in das Haigh-Diagramm Orte mit $R = 1, R = 0.5, R = 0, R = -0.5, R = -1$ und $R = \infty$ ein. Berechnen Sie die Mittelspannungsempfindlichkeit M.

Übung 5: BZF, Wöhler-, Smith- und Haigh-Diagramm II

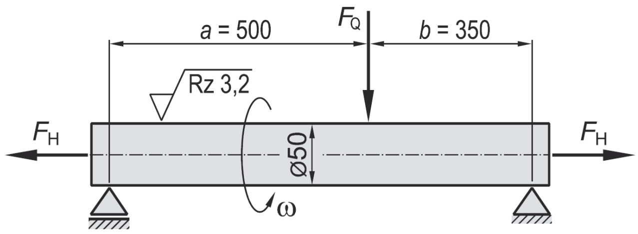
Aufgabe 5.1: Schwingfestigkeit einer Welle

Eine Welle mit Vollkreisquerschnitt aus der Vergütungsstahlsorte 42CrMo4 mit geschliffener Oberfläche ($R_z = 3,2\,\mu$m) und einem Durchmesser von $d = 50\,$mm ist im Betrieb durch die statisch wirkende, außermittig angreifende Querkraft $F_Q = 10\,$kN beansprucht. Weiterhin kann eine horizontale Zugkraft F_H auftreten. Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit können vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte 42CrMo4:

$R_{p0,2} = 980\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $R_m = 1070\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$\sigma_{bW} = 530\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$



a) Skizzieren Sie den Beanspruchungs-Zeit-Verlauf für die höchst beanspruchte Stelle bei umlaufender Welle und $F_H = 0$. Berechnen Sie außerdem die maximale Spannungsamplitude.

b) Überprüfen Sie, ob die Welle bei einer geforderten Sicherheit $S_D \geq 3,50$ dauerfest ist ($F_H = 0$).

c) Berechnen Sie die Mittelspannungsempfindlichkeit M und vergleichen Sie das Ergebnis mit einem Tabellenwert. Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D), falls die umlaufende Welle zusätzlich mit $F_H = 350\,$kN vorgespannt ist.

Aufgabe 5.2: Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve

Zwischen den Parametern n' und K' des Ramberg-Osgood-Modells

$$\varepsilon_a(\sigma_a) = \varepsilon_{a,el} + \varepsilon_{a,pl} = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

und den Parametern σ'_f, ε'_f, b und c des Coffin-Manson-Ansatzes

$$\varepsilon_a(N) = \varepsilon_{a,el} + \varepsilon_{a,pl} = \frac{\sigma'_f}{E}\,(2N)^b + \varepsilon'_f\,(2N)^c$$

bestehen folgende Kompatibilitätsbeziehungen:

$$n' = \frac{b}{c}, \quad K' = \sigma'_f \cdot \varepsilon'^{-n'}_f \quad .$$

Beweisen Sie diese, indem Sie elastische und plastische Anteile separat betrachten.