Vorlesung Produktions- und Werttheorie: Input-Output-Tabellen

Nils Fröhlich

Technische Universität Chemnitz
Professur VWL II

Input-Output-Tabellen
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Tabellentypen
Physische Input-Output-Tabellen
Ein Zahlenbeispiel
Zwei linear-homogene Gleichungssysteme

Gliederung

Input-Output-Tabellen
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Tabellentypen
Physische Input-Output-Tabellen
Ein Zahlenbeispiel
Zwei linear-homogene Gleichungssysteme

Input-Output-Tabellen
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Tabellentypen
Physische Input-Output-Tabellen
Ein Zahlenbeispiel
Zwei linear-homogene Gleichungssysteme

Input-Output-Tabellen (IOT)

- Verflechtungstabellen
- Sektorales Aufkommen und sektorale Verwendung der Bruttowertschöpfung

Typische Sektorengliederung

- Primärer Sektor: Land- und Forstwirtschaft, Fischerei
- Sekundärer Sektor: Produzierendes Gewerbe
- Tertiärer Sektor: Private und öffentliche Dienstleistungen

Input-Output-Tabellen
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Tabellentypen
Physische Input-Output-Tabellen
Ein Zahlenbeispiel
Zwei linear-homogene Gleichungssysteme

Drei Tabellentypen

- Monetäre Input-Output-Tabelle (MIOT)
- Physische Input-Output-Tabelle (PIOT)
- Zeitliche Input-Output-Tabelle (ZIOT)

- MIOT sind methodischer Standard
- POIT (ZIOT) auch wichtig, aber Erstellung sehr aufwendig (akt. Berichtsjahr 1995)
- Theorie: PIOT
- Empirie: MIOT

Input-Output-Tabellen
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Tabellentypen
Physische Input-Output-Tabellen
Ein Zahlenbeispiel
Zwei linear-homogene Gleichungssysteme

Tabelle 1: MIOT 2005 (Herstellungspreise) in Mrd. €

	Verwendung				
Aufk.	Prim.	Sekund.	Tert.	Endv.	Gesamtv.
Prim.	7,7	31,5	2,6	25,0	66,7
Sekund.	11,3	865,5	149,6	1402,1	2428,4
Tert.	10,5	332,5	707,1	1409,9	2460,0
Summe	29,5	1229,5	859,3	2836,9	4955,2

Quelle: Statistisches Bundesamt

Input-Output-Tabellen
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Tabellentypen
Physische Input-Output-Tabellen
Ein Zahlenbeispiel
Zwei linear-homogene Gleichungssysteme

1 Input-Output-Tabellen

2 Tabellentypen

3 Physische Input-Output-Tabellen

4 Ein Zahlenbeispiel

5 Zwei linear-homogene Gleichungssysteme

Notation I

- n Sektoren produzieren n Waren (keine Kuppelproduktion)
- m primäre Inputs (Arbeitskraft, Importe)
- $\left[\frac{M_i}{T}\right]$:= Mengeneinheit der Ware i pro Periode
- $\left[\frac{P_i}{T}\right]$:= Mengeneinheit des Primärinput i pro Periode

Notation II

- $x_{ik}\left[\frac{M_i}{T}\right]$:= Lieferung von Sektor (Ware) i an den Sektor (Ware) k in relevanter Periode
- $\boldsymbol{X} = (x_{ik})$:= Matrix der Vorleistungsverflechtungen
- $y_i\left[\frac{M_i}{T}\right]$:= Nettooutput der Ware i (letzte Verwendung) in relevanter Periode
- $\boldsymbol{y}$:= Vektor der letzten Verwendung
- $z_{ik}\left[\frac{P_i}{T}\right]$:= Lieferung des primären Inputs i an den Sektor (Ware) k in relevanter Periode
- $\boldsymbol{Z} = (z_{ik})$:= Matrix der Primärinputs

Tabelle 2: Eine allgemeine physische Input-Output-Tabelle

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	letzte Verw.
Ware 1	$x_{11}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{1n}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$y_1\left[\frac{M_1}{T}\right]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{nn}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$y_n\left[\frac{M_n}{T}\right]$
Input 1	$z_{11}\left[\frac{P_1}{T}\right]$	$\cdots$	$z_{1n}\left[\frac{P_1}{T}\right]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
Input m	$z_{m1}\left[\frac{P_n}{T}\right]$	$\cdots$	$z_{mn}\left[\frac{P_n}{T}\right]$	

Tabelle 3: Erläuterung: Physische Input-Output-Tabellen

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	letzte Verw.
Ware 1	$x_{11}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{1n}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$y_1\left[\frac{M_1}{T}\right]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{nn}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$y_n\left[\frac{M_n}{T}\right]$

$x_{ik}\left[\frac{M_i}{T}\right]$:= Lieferung von Sektor i an Sektor k

Tabelle 3: Erläuterung: Physische Input-Output-Tabellen

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	letzte Verw.
Ware 1	$x_{11}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{1n}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$y_1\left[\frac{M_1}{T}\right]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{1n}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$y_1\left[\frac{M_n}{T}\right]$

$x_{ik}\left[\frac{M_i}{T}\right]$:= Lieferung von Sektor i an Sektor k

Tabelle 3: Erläuterung: Physische Input-Output-Tabellen

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	letzte Verw.
Ware 1	$x_{11}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{1n}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$y_1\left[\frac{M_1}{T}\right]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{nn}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$y_n\left[\frac{M_n}{T}\right]$

$x_{ik}\left[\frac{M_i}{T}\right]$:= Lieferung von Sektor i an Sektor k

Tabelle 3: Erläuterung: Physische Input-Output-Tabellen

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	letzte Verw.
Ware 1	$x_{11}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{1n}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$y_1\left[\frac{M_1}{T}\right]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{nn}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$y_n\left[\frac{M_n}{T}\right]$

Spaltensummen: „Äpfel und Birnen ...“

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = x_{1k}\left[\frac{M_1}{T}\right] + \cdots + x_{nk}\left[\frac{M_n}{T}\right] \quad \Rightarrow \text{Unsinn!!!}$$

Tabelle 3: Erläuterung: Physische Input-Output-Tabellen

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	letzte Verw.
Ware 1	$x_{11}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{1n}\left[\frac{M_1}{T}\right]$	$y_1\left[\frac{M_1}{T}\right]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$\cdots$	$x_{nn}\left[\frac{M_n}{T}\right]$	$y_n\left[\frac{M_n}{T}\right]$

Zeilensummen: Sektorale Bruttoproduktion

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i = x_{i1}\left[\frac{M_i}{T}\right] + \cdots + x_{in}\left[\frac{M_i}{T}\right] + y_i\left[\frac{M_i}{T}\right]$$

Matrizenschreibweise

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\text{Summationsvektor } \boldsymbol{e}_s := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{e}_s + \boldsymbol{y} \tag{3}$$

Zahlenbeispiel

- Pasinetti 1988: Kapitel 2
- Drei-Sektorenwirtschaft mit Weizen (W), Eisen (E) und Truthähnen (T)

Tabelle 4: Physische IO-Tabelle im dreisektoralen Zahlenbeispiel.

	W		E		T		$\sum$
W	240	+	90	+	120	=	450
E	12	+	6	+	3	=	21
T	18	+	12	+	30	=	60
	↓		↓		↓		
	450		21		60		

Geschlossene IO-Tabelle

- Waren und Arbeitsströme
- 60 Mannjahre (MJ) im Verhältnis 18 : 12 : 30
- 3 Einheiten W und 0,5 Einheiten T pro Arbeiter

Tabelle 5: Physische IO-Tabelle: Waren- und Arbeitsströme.

	W	E	T	Endv.	$\sum$
W	186	54	30	180	450
E	12	6	3	–	21
T	9	6	15	30	60
Endv.	18	12	30	–	60
	↓	↓	↓		
	450	21	60		

Preise

- Tauschrelationen: 10 W : 1 E : 2 T : 1,81818 MJ
- 1 E als Numéraire
- Preise: $p_E := 1, p_W = 0{,}1, p_T = 0{,}5, p_{MJ} = w = 0{,}55$

Tabelle 6: Monetäre IO-Tabelle: Waren- und Arbeitsströme.

	W	E	T	Endv.	$\sum$
W	18,6	5,4	3	18	45
E	12	6	3	–	21
T	4,5	3	7,5	15	30
Endv.	9,9	6,6	16,5	–	(33)
$\sum$	45	21	30	(33)	96

Tabelle 7: Eine Wirtschaft mit beliebiger Sektorenzahl n

	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n (Endv.)
1	p_1x_{11}	p_1x_{12}	$\cdots$	p_1x_{1k}	$\cdots$	p_1x_{1n}
2	p_2x_{21}	p_2x_{22}	$\cdots$	p_2x_{2k}	$\cdots$	p_2x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i	p_ix_{i1}	p_ix_{i2}	$\cdots$	p_ix_{ik}	$\cdots$	p_ix_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n (Endv.)	p_nx_{n1}	p_nx_{n2}	$\cdots$	p_nx_{nk}	$\cdots$	p_nx_{nn}

Buchhalterische Identität

Spaltensumme i = Zeilensumme i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Die Zeilensummen sind identisch ...

$$\begin{array}{ccccccccc}
p_1x_{11} & + & p_1x_{12} & + & \cdots & + & p_1x_{1n} & = & p_1x_1 \\
p_2x_{21} & + & p_2x_{22} & + & \cdots & + & p_2x_{2n} & = & p_2x_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
p_nx_{n1} & + & p_nx_{n2} & + & \cdots & + & p_nx_{nn} & = & p_nx_n
\end{array} \tag{4}$$

... mit den Spaltensummen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
p_1x_{11} & + & p_2x_{21} & + & \cdots & + & p_nx_{n1} & = & p_1x_1 \\
p_1x_{12} & + & p_2x_{22} & + & \cdots & + & p_nx_{n2} & = & p_2x_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
p_1x_{1n} & + & p_2x_{2n} & + & \cdots & + & p_nx_{nn} & = & p_nx_n
\end{array} \tag{5}$$

Lineares Produktionsmodell

- Konstante Skalenerträge
- Technik unabhängig vom Produktionsniveau

Inputkoeffizienten

Menge der Ware i, die zur Produktion *einer Einheit* von Ware k $(k = 1, 2, \dots, n)$ *im* Sektor k benötigt wird.

$$a_{ik} := \frac{x_{ik}}{x_k} \left[\frac{M_i}{M_k}\right] \quad \text{mit } a_{ik} \geq 0 \tag{6}$$

bzw.

$$x_{ik} = a_{ik} x_k \tag{7}$$

Aus (4) wird ...

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & x_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & x_n \end{array} \tag{8}$$

... und aus (5) wird

$$\begin{array}{ccccccccc} p_1 a_{11} & + & p_2 a_{21} & + & \cdots & + & p_n a_{n1} & = & p_1 \\ p_1 a_{12} & + & p_2 a_{22} & + & \cdots & + & p_n a_{n2} & = & p_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ p_1 a_{1n} & + & p_2 a_{2n} & + & \cdots & + & p_n a_{nn} & = & p_n \end{array} \tag{9}$$

In Matrizenschreibweise

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{p} := (p_1, \dots, p_n) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{pA} = \boldsymbol{p} \tag{14}$$

Bei (13) und (14) handelt es sich um zwei linear-homogene Gleichungssysteme.