Abschlußeigenschaften

Erinnerung

Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter:

- Vereinigung (L_1, L_2 regulär $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ regulär)
- Schnitt (L_1, L_2 regulär $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ regulär)
- Komplement (L regulär $\Rightarrow \Sigma^* \setminus L$ regulär)
- Produkt/Konkatenation (L_1, L_2 regulär $\Rightarrow L_1 L_2$ regulär)
- Stern-Operation (L regulär $\Rightarrow L^*$ regulär)

Frage

Welche dieser Eigenschaften gelten für die Klasse der kontextfreien Sprachen?

Satz

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter:

1. Vereinigung (L_1, L_2 kontextfrei $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ kontextfrei)
2. Produkt/Konkatenation (L_1, L_2 kontextfrei $\Rightarrow L_1 L_2$ kontextfrei)
3. Stern-Operation (L kontextfrei $\Rightarrow L^*$ kontextfrei)

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter:

4. Schnitt (es gibt L_1, L_2 deterministisch kontextfrei, so daß $L_1 \cap L_2$ nicht kontextfrei ist)
5. Komplement (es gibt L kontextfrei, so daß $\Sigma^* \setminus L$ nicht kontextfrei ist)

Es folgt:

6. Es gibt kontextfreie Sprachen, die nicht deterministisch kontextfrei sind.

Beweis:
(1)-(3): siehe Übungsaufgabe 6(3)

Bisher haben wir keine Methode, um zu zeigen, daß eine Sprache <u>nicht</u> kontextfrei ist. - Der Beweis wird auf Folie 15.24 vervollständigt werden.

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Idee: Man versucht auszunutzen, daß eine kontextfreie Sprache von einer Grammatik mit endlich vielen Nichtterminalen erzeugt werden muß. Das bedeutet auch: wenn ein Ableitungsbaum ausreichend tief ist, so gibt es einen Ast, der ein Nichtterminal mehrfach enthält. Die durch diese zwei Vorkommen bestimmten Teilbäume werden wir „pumpen“.

Pumping Lemma (Bar-Hillel, Perles, Shamir ’61)

Wenn L eine **kontextfreie** Sprache ist,
dann gibt es $n \geq 1$ derart,
daß für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:
es gibt Wörter $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit

(i) $z = uvwxy$,

(ii) $|vwx| \leq n$,

(iii) $|vx| \geq 1$ und

(iv) $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Dieses Lemma spricht nicht über kontextfreie Grammatiken, sondern nur über die Eigenschaften der Sprache. Daher ist es dazu geeignet, Aussagen über Nicht-Kontextfreiheit zu machen. Wir zeigen zunächst an einem Beispiel, wie dies funktioniert:

Beispiel (Fortsetzung von Folie 2.7 bzw. 2.10)

Betrachte die kontextsensitive Grammatik G mit den Produktionen

$$\begin{array}{rclrclrcl} S & \to & aSBC \mid aBC & CB & \to & HB & HB & \to & HC \\ HC & \to & BC & aB & \to & ab & bB & \to & bb \\ bC & \to & bc & cC & \to & cc\,. & & & \end{array}$$

Sie erzeugt z.B. das Wort $aabbcc$:

$$\begin{array}{rcl} \underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}BC \Rightarrow aaB\underline{CB}C \Rightarrow aaB\underline{HB}C \\ & \Rightarrow & aaB\underline{HC}C \Rightarrow a\underline{aB}BCC \Rightarrow aa\underline{bB}CC \\ & \Rightarrow & aab\underline{bC}C \Rightarrow aabb\underline{cC} \Rightarrow aabbcc \end{array}$$

Die erzeugte Sprache ist $L_1 = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 1\}$.

Diese kontextsensitive Sprache ist nicht kontextfrei. Also gilt $\mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1$.

Beweis: indirekt
Angenommen, L_1 wäre kontextfrei.

Nach dem Pumping-Lemma gibt es ein $n \geq 1$, so daß die folgende Aussage gilt:

> Für jedes $z \in L_1$, $|z| \geq n$, gibt es $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit (i), (ii), (iii) und (iv). (*)

Wir wählen nun $z = a^n b^n c^n$.
Dann ist $z \in L_1$ und $|z| = 3n > n$.
Nach der Aussage (*) gibt es also $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit

(i) $z = uvwxy$,
(ii) $|vwx| \leq n$,
(iii) $|vx| \geq 1$ und
(iv) $uv^i wx^i y \in L_1$ für alle $i \geq 0$.

$$uvwxy \overset{(i)}{=} z = \underbrace{aaaaa\cdots aaaa}_{n-\text{mal}}\underbrace{bbbbb\cdots bbbb}_{n-\text{mal}}\underbrace{ccccc\cdots cccc}_{n-\text{mal}}$$

Wegen $|vwx| \leq n$ nach (ii) gilt $vwx \in L(a^*b^*) \cup L(b^*c^*)$ und damit $vx \in L(a^*b^*) \cup L(b^*c^*)$.

Mit anderen Worten: es ist nicht möglich, daß sowohl ein a als auch ein c in vx vorkommen.
Wir unterscheiden zwei Fälle:

- c kommt in vx nicht vor: dann gilt $|uv^2wx^2y|_c = |uvwxy|_c = n$, aber

$$|uv^2wx^2y|_a + |uv^2wx^2y|_b = 2n + |vx|_a + |vx|_b = 2n + |vx| > 2n$$

  wegen (iii), also $|uv^2wx^2y|_a > n$ oder $|uv^2wx^2y|_b > n$ und damit $uv^2wx^2y \notin L_1$, im Widerspruch zu (iv).
- a kommt in vx nicht vor: man erhält analog einen Widerspruch zu (iv).

Also ist L_1 tatsächlich nicht kontextfrei. $\square$

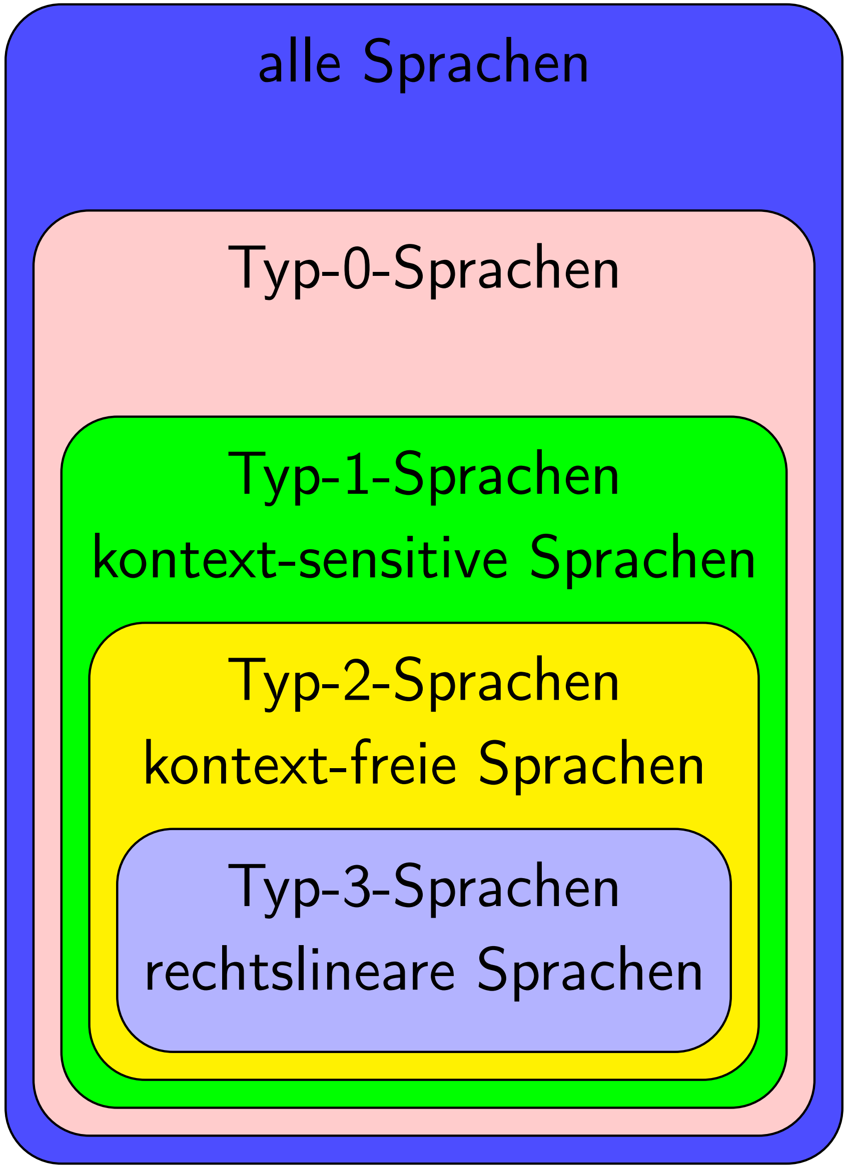
Auf Folien 2.22 und 10.28 wurde $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$ gezeigt.

Auf Folie 6.7 wurde $\mathcal{L}_0 \subsetneq$ Klasse aller Sprachen und auf Folie 6.12 auch $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2$ gezeigt.

Jetzt wissen wir, daß auch $\mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1$ gilt.

Wir wissen noch nicht, ob $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0$ oder $\mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0$ gilt.

Wir haben also $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subsetneq$ Klasse aller Sprachen.



Im Beweis des Pumping-Lemmas verwenden wir die folgende Aussage.

Lemma

Sei B ein Binärbaum (d.h., jeder Knoten in B hat entweder null oder zwei Kinder) mit mindestens 2^k Blättern.
Dann hat B einen von der Wurzel ausgehenden Ast, der aus mindestens k Kanten und $k+1$ Knoten besteht.

Beweis: Induktion über k.

IA: $k = 0$.

Sei B ein Binärbaum mit mindestens 2^0 Blättern, d.h. mit mindestens einem Blatt.

Dann hat B einen Ast, der aus mindestens einem Knoten besteht.

IS: $k \geq 0$.

Sei B ein Binärbaum mit mindestens $2^{k+1} = 2^k + 2^k > 1$ Blättern.

Seien v_1 und v_2 die beiden Kinder der Wurzel und seien B_1 und B_2 die Binärbäume mit Wurzel v_1 bzw. v_2.

Dann existiert $i \in \{1, 2\}$, so daß B_i mindestens 2^k Blätter hat.

IV $\Rightarrow$ in B_i gibt es einen Ast mit mindestens k Kanten und $k+1$ Knoten.

$\Rightarrow$ in B gibt es einen Ast mit mindestens $k+1$ Kanten und $k+2$ Knoten.

$\square$

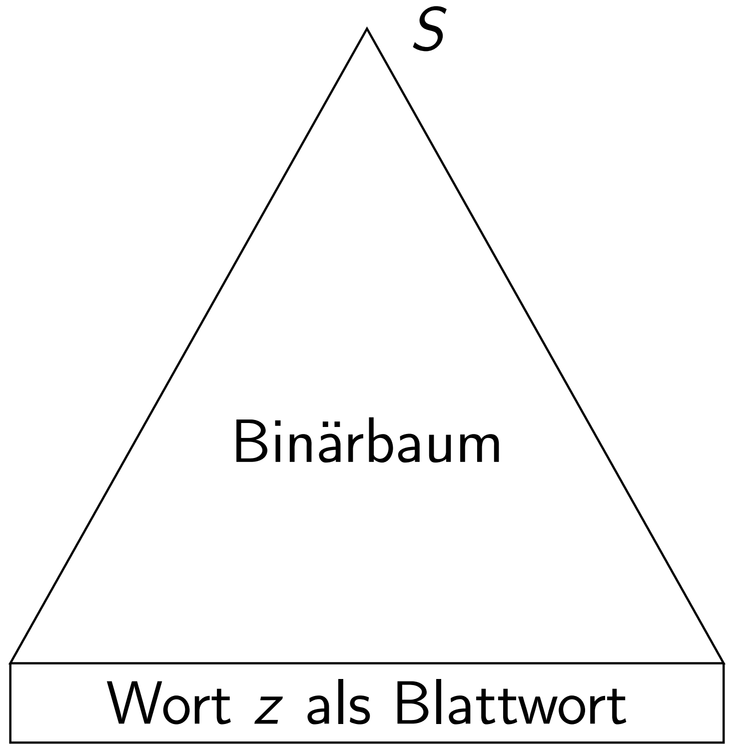
Beweis des Pumping-Lemmas:

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Dann existiert eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform mit $L = L(G)$.
Setze $k := |V|$ und $n := 2^k$.

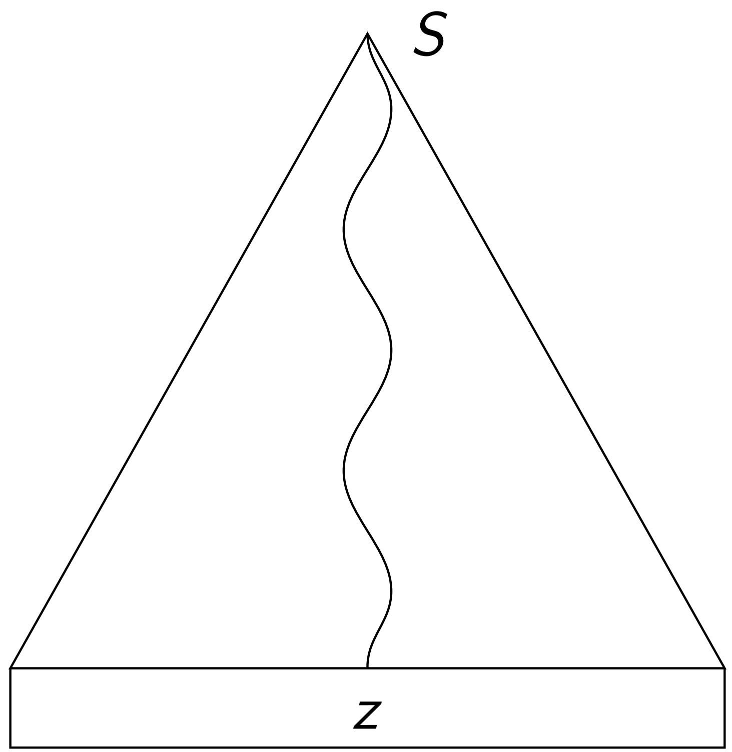
Sei weiter $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n = 2^k$.

Wegen $z \in L(G)$ existiert ein Ableitungsbaum T mit $\alpha(T) = z$.

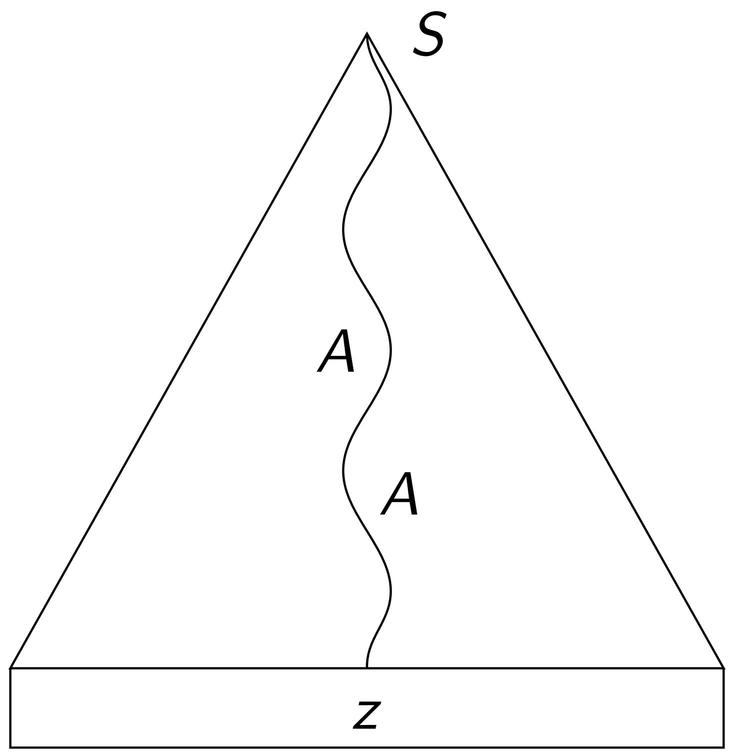
Der Ableitungsbaum T mit $\alpha(T) = z$ und $|z| \geq n = 2^k$.



Nach dem vorherigen Lemma existiert ein Ast in T mit mindestens $k+1$ Knoten.

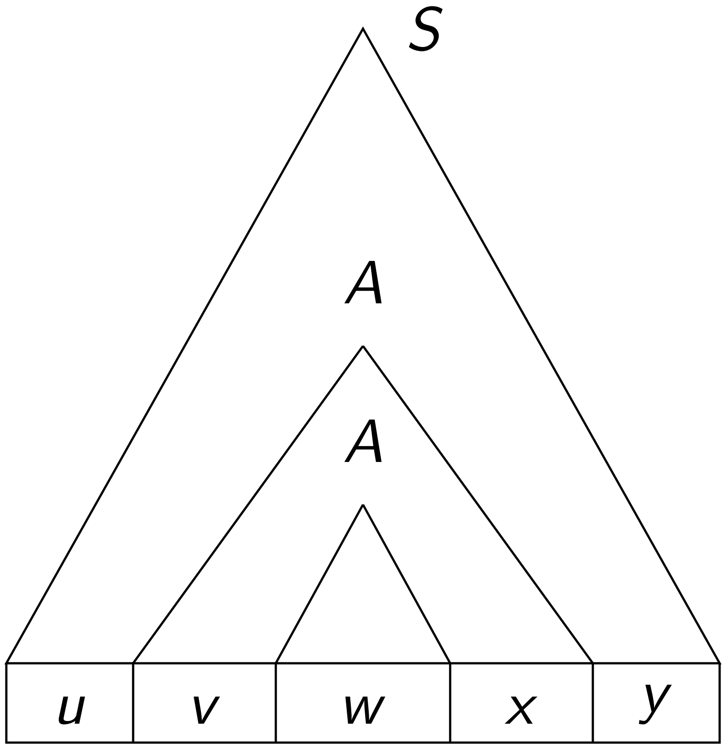


Also gibt es ein Nichtterminal (etwa A), das auf dem Ast zweimal auftaucht.
Wir können annehmen, daß auf jedem Ast, der vom oberen A ausgeht, höchstens das A mehrfach und dieses nicht dreimal vorkommt.

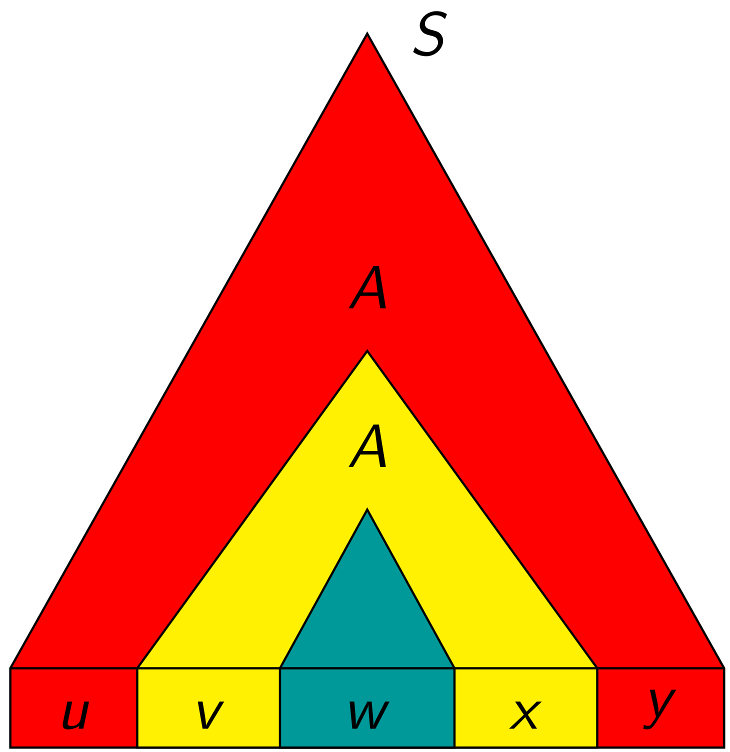


Das Wort z wird nun in fünf Teilwörter u, v, w, x, y aufgespalten (womit (i) gesichert ist):

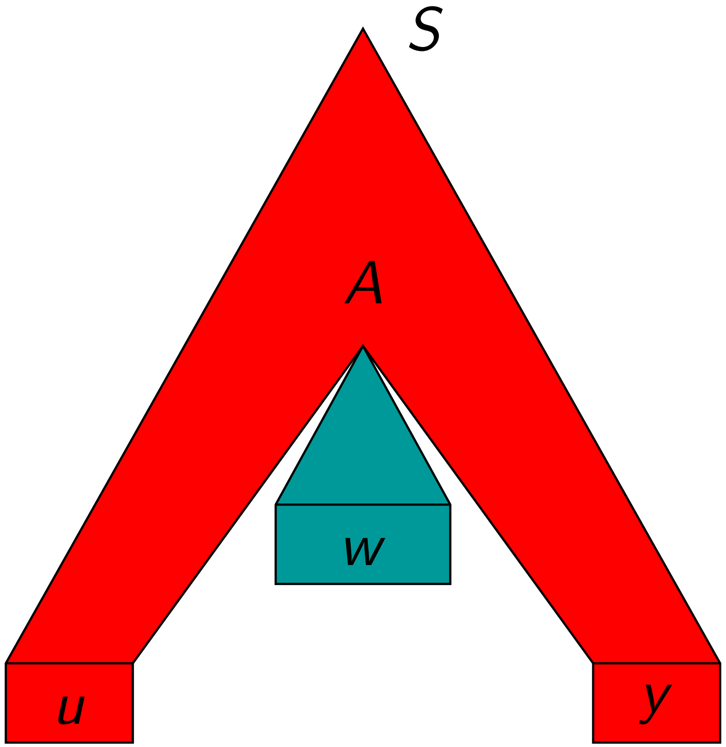
- w wird aus dem unteren A abgeleitet: $A \Rightarrow^* w$
- vwx wird aus dem oberen A abgeleitet: $A \Rightarrow^* vAx \Rightarrow^* vwx$



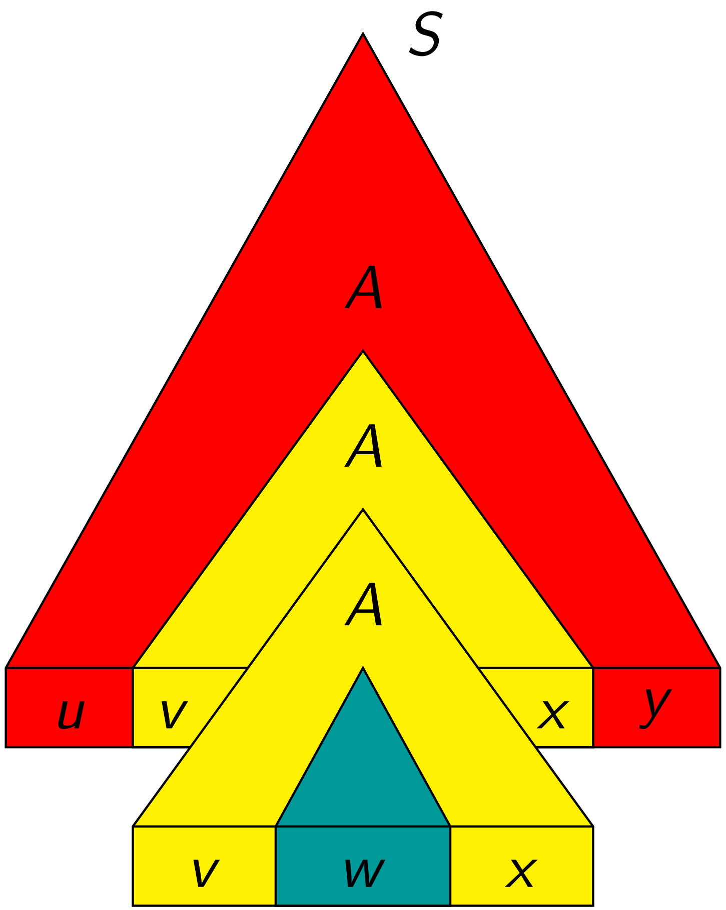
Damit erhält man drei ineinander enthaltene Teil-Ableitungsbäume, die man neu zusammenstecken kann.



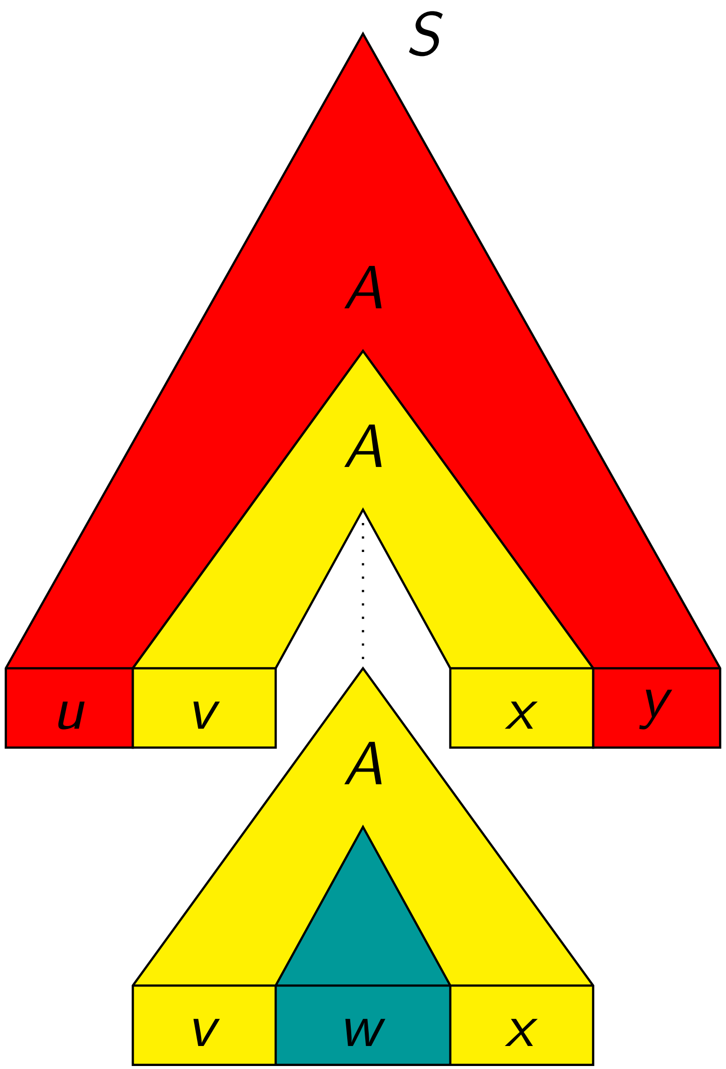
Durch Weglassen des mittleren Teilbaums erhält man einen Ableitungsbaum für uwy. Damit gilt: $uwy \in L(G)$.



Durch Verdoppeln des mittleren Teilbaums erhält man einen Ableitungsbaum für uv^2wx^2y. Damit gilt: $uv^2wx^2y \in L(G)$.



Durch Ver-i-fachen des mittleren Teilbaums erhält man einen Ableitungsbaum für uv^iwx^iy. Damit gilt: $uv^iwx^iy \in L(G)$, d.h. wir haben (iv) gezeigt.



Wir zeigen als nächstes (ii), d.h. $|vwx| \leq n$:

Sei T_1 der Teilbaum von T, der am oberen A beginnt (d.h. es gilt $\alpha(T_1) = vwx$).

Da wir das obere A so gewählt haben, daß davon ausgehende Äste höchstens das A mehrfach (und dieses nicht dreimal) enthalten, kann kein Ast in $T_1 > |V| + 1$ Knoten enthalten.

Das vorhergehende Lemma sichert $|vwx| =$ Blattanzahl in $T_1 \ \leq 2^{|V|} = n$.

Es bleibt noch (iii) zu zeigen, also $|vx| \geq 1$:

Sei T_2 der Teilbaum von T, der am unteren A beginnt (d.h. es gilt $\alpha(T_2) = w$).
Da T nur binäre Verzweigungen enthält und T_2 echter Teilbaum von T_1 ist, hat T_1 wenigstens ein Blatt, das nicht zu T_2 gehört. Da es keine ε-Produktionen gibt, ist dieses Blatt mit $a \in \Sigma$ beschriftet. Also gilt $vx \neq \varepsilon$. $\square$

Unser Beweis, daß L_1 nicht kontextfrei ist, folgt dem folgenden Schema:

Behauptung: Die Sprache L ist nicht kontextfrei.

[0] (wörtlich) **Beweis:** indirekt. Angenommen, L wäre kontextfrei. Nach dem Pumping-Lemma gibt es ein $n \geq 1$, so daß die folgende Aussage gilt:

Für jedes $z \in L$, $|z| \geq n$, gibt es $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit (i), (ii), (iii) und (iv). (*)

[1] (problemspezifisch) Wir wählen ein **geeignetes** $z \in L$ mit $|z| \geq n$, so daß Schritt [3] ausführbar ist.

[2] (wörtlich) Nach der Aussage (*) gibt es $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit (i)-(iv).

[3] (problemspezifisch) Wir wählen zu u, v, w, x, y ein **passendes** $i \geq 0$ und zeigen, daß uv^iwx^iy nicht in L sein kann.

[4] (wörtlich) Widerspruch zu (iv). $\square$

Dieses Beweisschema ist die Umsetzung der folgenden Formulierung des Pumping-Lemmas mit logischen Operatoren:

L kontextfrei
$\rightarrow \exists n \;\; \forall z \in L$ mit $|z| \geq n \;\; \exists u, v, w, x, y$ mit (i–iii) $\;\; \forall i : uv^i wx^i y \in L$

Diese Aussage ist logisch äquivalent zu:

$\forall n \quad \exists z \in L$ mit $|z| \geq n \quad \forall u, v, w, x, y$ mit (i-iii) $\quad \exists i : uv^i wx^i y \notin L$
$\rightarrow L$ ist nicht kontextfrei

Um zu zeigen, daß eine Sprache L nicht kontextfrei ist, reicht es also zu zeigen, daß es für alle n ein $z \in L$ gibt . . .

Dies können wir auch in dem folgenden **Spielschema** fassen:

Wir (die Beweiser oder Braven) wollen zeigen, daß die Sprache L nicht kontextfrei ist. Dazu müssen wir das folgende Spiel (gegen den Gegner oder den Gemeinen) gewinnen:

Runde 1 G wählt eine Zahl $n \geq 1$.

Runde 2 B wählt ein $z \in L$ mit $|z| \geq n$

Runde 3 G wählt u, v, w, x und y mit
(i) $z = uvwxy$, (ii) $|vwx| \leq n$ und (iii) $|vx| \geq 1$.

Runde 4 B wählt ein i und zeigt, daß $uv^iwx^iy \notin L$.

Die Sprache L ist **nicht** kontextfrei, falls B unabhängig von den Wahlen von G in Runden 1 und 3 immer so wählen kann (in Runden 2 und 4), daß schließlich $uv^iwx^iy \notin L$ gilt.

Beispiel

$L_2 = \{w2w \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis: wir zeigen, daß B im Spielschema immer so wählen kann, daß $uv^iwx^iy \notin L_2$ gilt:

Runde 1 G wählt eine Zahl $n \geq 1$.

Runde 2 B wählt $z = 0^n1^n20^n1^n$ (natürlich gelten $z \in L_2$ und $|z| \geq n$)

Runde 3 G wählt u, v, w, x und y mit
(i) $z = uvwxy$, (ii) $|vwx| \leq n$ und (iii) $|vx| \geq 1$.

Runde 4 B wählt $i = 0$ und zeigt, daß $uv^iwx^iy \notin L_2$:

1. Fall: v oder x enthält die 2.
   Dann enthält uv^0wx^0y keine 2, gehört also nicht zu L_2.
2. Fall: u enthält 2.
   Dann stehen in uv^0wx^0y links von der 2 mehr Buchstaben als rechts, also $uv^0wx^0y \notin L_2$.
3. Fall: y enthält 2.
   analog
4. Fall: w enthält 2.
   Wegen (ii) ist vwx Faktor von 1^n20^n, der 2 enthält. Also gilt $v \in L(1^*)$ und $x \in L(0^*)$ und damit $uv^0wx^0y = 0^n1^{n-|v|}20^{n-|x|}1^n \notin L_2$, da $|v| > 0$ oder $|x| > 0$ nach (iii).

Also kann B so wählen, daß $uv^iwx^iy \notin L_2$, d.h., L_2 ist tatsächlich nicht kontextfrei. $\square$

Beispiel

$$L_3 = \{u_1 3 \dots u_{r-1} 3 u_r 2 v_1 3 \dots v_{s-1} 3 v_s \mid \begin{array}{l} u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \in \{0,1\}^* \\ \forall j \leq s \, \exists i \leq r : v_j = u_i \} \end{array}$$

ist nicht kontextfrei.

Beweisidee: Wäre L_3 kontextfrei, so auch $L_3 \cap \{0,1\}^*\{2\}\{0,1\}^* = L_2$ (denn der Schnitt von kontextfreien und regulären Sprachen ist kontextfrei, siehe Satz auf Folie 14.9). Das ist aber nicht der Fall. □

Hintergrund: Viele Programmiersprachen haben die „Kontextbedingung“, daß eine Variable vor der Benutzung deklariert werden muß.

Diese Eigenschaft kann nicht in einer kontextfreien Grammatik ausgedrückt werden.

Das Lemma von Ogden

Lemma (William Ogden '68)

Wenn L eine **kontextfreie** Sprache ist,
dann gibt es $n \geq 1$ derart,
daß für alle $z \in L$ ~~mit~~ $\cancel{|z| \geq n}$, in denen n Positionen markiert sind,
gilt:
es gibt Wörter $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit

(i) $z = uvwxy$,

~~(ii)~~ $\cancel{|vwx| \leq n}$,

(iii) $\cancel{|vx| \geq 1}$ v oder x enthält wenigstens eine der Markierungen und

(iv) $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beweis: ähnlich zum Beweis des Pumping-Lemmas. $\square$

Beispiele

weitere Sprachen, die nicht kontextfrei sind:

$$
\begin{array}{ll}
\{a^k b^m a^k b^m \mid k, m \geq 0\} & \{a^k b^m a^{k \cdot m} \mid k, m \geq 0\} \\
\{w\, w \mid w \in \{0,1\}^*\} & \{0^m\, 1\, 0^m\, 1\, 0^m \mid m \geq 0\} \\
\{0^m\, 1^{2m}\, 0^{4m} \mid m \geq 0\} & \{0^p \mid p \text{ Primzahl } \}
\end{array}
$$

Beweis jeweils mit dem Pumping-Lemma oder dem Lemma von Ogden.

Beweis der Aussagen (4)-(6) des Satzes auf Folie 15.2

4.
$$\begin{aligned} L_4 &= \{a^k b^\ell c^m \mid 0 \leq k = \ell, 0 \leq m\} \\ L_5 &= \{a^k b^\ell c^m \mid 0 \leq k, 0 \leq \ell = m\} \end{aligned}$$

sind deterministisch kontextfreie Sprachen (einfach).
Ihr Schnitt

$$L_4 \cap L_5 = \{a^k b^\ell c^m \mid 0 \leq k = \ell = m\} = L_1$$

ist jedoch nicht kontextfrei (siehe Folie 15.6).

5. $L_6 = \{a^k b^\ell c^m \mid k \neq \ell \text{ oder } \ell \neq m\} \cup \{a, b, c\}^+ \setminus L(a^* b^* c^*)$
ist eine kontextfreie Sprache (einfach).

Ihr Komplement

$$\{a, b, c\}^* \setminus L_6 = \{a^k b^\ell c^m \mid 0 \leq k = \ell = m\} = L_1$$

ist jedoch nicht kontextfrei (siehe Folie 15.6).

6. L_6 ist kontextfrei. Wäre L_6 deterministisch kontextfrei, so nach dem Satz auf Folie 14.21 auch ihr Komplement

$$\{a, b, c\}^* \setminus L_6 = \{a^k b^\ell c^m \mid k = \ell = m\} = L_1 \,.$$

Diese Sprache ist aber nicht einmal kontextfrei (siehe Folie 15.6). Also kann L_6 nicht deterministisch kontextfrei sein. $\square$

Zusammenfassung 15. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Abschlußeigenschaften der Klasse der kontext-freien Sprachen
- Sprachen, die nicht kontext-frei sind (Pumping-Lemma)

kommende Vorlesung

- Algorithmen für kontext-freie Sprachen