Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Hörsaal 2

Freitag, den 22. 09. 2023

Beginn: 11.30 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Studiengang: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	14	13	16	18		61
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

14 Punkte

Gegeben ist das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 x_3 + 1\\ \dot{x}_2 &= x_1 x_3 - x_2\\ \dot{x}_3 &= (x_3)^2(1 - x_3) + u\end{aligned}$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^3$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$.

a) Seien mit $(x_\mathrm{R}, u_\mathrm{R})$ stationäre Betriebspunkte bezeichnet. Zeigen Sie, dass es für den Fall $u_\mathrm{R} = 0$ genau einen stationären Betriebspunkt gibt. Bestimmen Sie x_R.

b) Berechnen Sie das am Betriebspunkt ($u_\mathrm{R} = 0$) linearisierte System $\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$, d.h. geben Sie die zugehörigen Matrizen A und B an.

c) Ist der Ursprung des am Betriebspunkt linearsierten Systems asymptotisch stabil?

d) Ist das am Betriebspunkt linearsierte System steuerbar?

e) Sei $u(t) = k^\top x(t)$ eine lineare Zustandsrückführung für das linerarisierte System. Finden Sie ein $k \in \mathbb{R}^3$ so, dass der Betriebspunkt aus Teilaufgabe a) asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 2

13 Punkte

Für die folgende Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s+\frac{1}{3})(s+3)}{s^2+ps+1}$$

mit $p \in \mathbb{R}$ soll eine Realisierung in Beobachtungsnormalform bestimmt werden.

a) Bestimmen Sie das Intervall für p so, dass die Übertragungsfunktion BIBO-stabil ist.

b) Bestimmen Sie den Durchgriff D und die reduzierte Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$ anhand der Zerlegung
$$G(s) = D + \tilde{G}(s)\,.$$

c) Ermitteln Sie nun die verbleibenden Matrizen der Realisierung in Beobachtungsnormalform, d.h. bestimmen Sie entsprechende Matrizen A, B und C so, dass gilt $\tilde{G}(s) = C(sI-A)^{-1}B$.

d) Für welche Werte von p ist die Ruhelage der von Ihnen bestimmten Realisierung:

   (a) instabil?

   (b) stabil?

   (c) asymptotisch stabil?

e) Für welche Werte von p ist die von Ihnen bestimmte Realisierung nicht steuerbar?

f) Geben Sie für $p = \frac{10}{3}$ die vollständig gekürzte Übertragungsfunktion an.

   Hinweis: Die Teilaufgaben e) und f) können unabhängig von den vorangestellten Teilaufgaben bearbeitet werden.

Aufgabe 3 **16 Punkte**

Gegeben sei das System

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ist das System steuerbar?

b) Bestimmen Sie einen Regler $u(i) = k^\top x(i)$, der dem geschlossenen Regelkreis Deadbeat-Verhalten, d.h. alle Eigenwerte bei null zuweist.

c) Nach wie vielen Zeitschritten wird der stationäre Zustand erreicht?

Betrachten Sie nun den Ausgang

$$y(i) = Cx(i), \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Ist das System beobachtbar?

e) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung eines Luenberger Beobachters allgemein an und leiten Sie die Dynamik des Beobachterfehler $e(i) = \hat{x}(i) - x(i)$ her.

f) Berechnen Sie eine Beobachterverstärkung $l \in \mathbb{R}^2$, so dass die Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik alle bei null liegen.

g) Betrachten Sie nun den Regler $u(i) = k^\top \hat{x}(i)$ mit bereits berechnetem Vektor k und dem Schätzzustand $\hat{x}$ aus dem berechneten Beobachter. In wie vielen Schritten wird die Ruhelage erreicht?

Aufgabe 4 **18 Punkte**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche System

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} u \end{cases} \quad \text{mit} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = (G_1(s), G_2(s))$ des Systems, d.h. es gilt für $Y(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s)$ mit $U_i(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, u_i(t)$, $i = 1, 2$, und $Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t)$.

Für die Regelung wird der Integriererzustand $\bar{x} = \int_0^t x_1(\tau)\, d\tau$ eingeführt.

b) Betrachten Sie nun den um den Integriererzustand $\bar{x}$ erweiterten Zustandsvektor $x_e = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x \end{pmatrix}$. Geben Sie die Systemdarstellung Σ_e des erweiterten Systems an, d.h. finden Sie A_e, B_e, C_e und D_e so, dass

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + B_e u \\ y = C_e x_e + D_e u\,. \end{cases}$$

Betrachten Sie das mit $u = Kx + \bar{K}\bar{x}$ geregelte System.

c) Unter welchen Bedingungen an $\bar{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k} \end{pmatrix}$ und $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$ liegen alle Eigenwerte des erweiterten Systems bei -1?

d) Legen Sie die in Aufgabenteil c) übrig gebliebenen Freiheitsgrade so fest, dass die Dynamikmatrix des erweiterten Systems im geschlossenen Regelkreis wie in Regelungsnormalform vorliegt (während die Eigenwerte noch immer bei -1 liegen).

Im Folgenden wird der Regelung noch eine Referenz r hinzugefügt: $u = Kx + \bar{K}\bar{x} + Fr$ mit $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Bestimmen Sie die vollständig gekürzte Führungsübertragungsfunktion $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

f) Ist das geregelte System für einen Referenzsprung stationär genau?

Das System erfährt nun noch eine konstante Eingangsstörung $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$: $u = Kx + \bar{K}\bar{x} + Fr + d$.

g) Unter welchen Bedingungen an d_1 und d_2 kann diese Störung stationär ausgeregelt werden?