FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN
INSTITUT FÜR PHYSIK
FACHGEBIET EXPERIMENTALPHYSIK I
Dr. rer. nat. Norbert Stein, Dipl.-Ing. Helmut Barth

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Versuch E7 - Stabilität einer Torsionswaage

Im vorliegenden Versuchsaufbau erfolgt, in Anlehnung an die Experimente von Coulomb, die Bestimmung der sehr kleinen Kräfte zwischen den geladenen Körpern mithilfe einer Dreh- oder auch Torsionswaage. Ihr Funktionsprinzip geht auf *John Michell (1724-1793)* zurück.

Zwischen Winkelmesstisch und einer Blattfeder ist ein dünner Metalldraht mit kreisförmigem Querschnitt eingespannt. Nicht zwingend auf halber Länge des Drahtes ist der Halter für die geladene Kugel zusammen mit einem Gewichtsausgleichsflügel festgeklemmt. Eine justierbare Ablesemarke erlaubt die genaue Feststellung der Gleichgewichtsposition der Anordnung (Abb. 1).

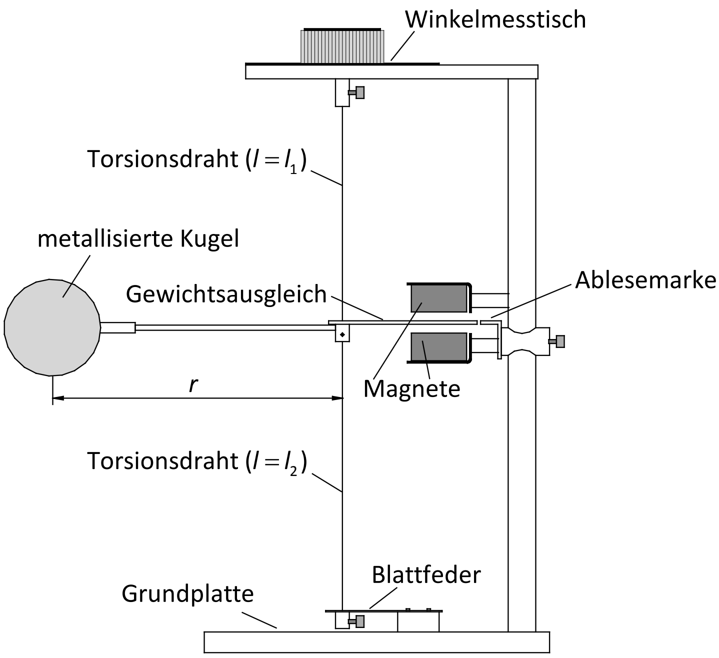

Abb. 1: Torsionswaage

Wirkt auf die geladene Kugel eine Kraft (z. B. senkrecht in die Zeichenebene, x-Richtung), so folgt daraus ein Verdrillen der Drahtstücken ober- und unterhalb des Kugelhalters (Längen l_1 bzw. l_2). Durch Verdrehen der oberen Drahtklemme wird die Gleichgewichtsposition der Waage wiederhergestellt, der Messtisch zeigt den Torsionswinkel α des oberen Drahtstücks an.

Für einen langen dünnen Draht der Länge l mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R_D) beträgt bei Verdrillung das rücktreibende Moment:

$$M_D = r \cdot F_D = -\frac{\pi G R_D^4}{2l} \cdot \alpha \,. \tag{1}$$

G ist hierbei der Schub- oder Torsionsmodul des Drahtmaterials, r der senkrechte Abstand zwischen Kugelmittelpunkt und Draht und die Kraft F_D jeweils der Coulombkraft F_C entgegen gerichtet. Zweckmäßigerweise dividiert man (1) durch r, fasst alle konstanten Größen außer der Drahtlänge zu einer durch Kalibrierung zu ermittelnden Konstanten k_D zusammen und erhält:

$$F_D = -\frac{k_D}{l} \cdot \alpha \,. \tag{2}$$

Im Gleichgewichtsfalle gilt stets $F_C + F_D = 0$ sowie $l = l_1$, es ist jedoch noch abzuschätzen, unter welchen Bedingungen überhaupt ein *stabiles Gleichgewicht* zwischen den beiden Kräften möglich ist. Dies erfordert die Untersuchung des Verlaufes der potentiellen $E_{pot}(x)$ der Torsionswaage bei kleinen Auslen-

Lösung: Mit den noch zu findenden Versuchsergebnissen kann man zeigen, dass die Torsionswaage im letzten Versuchsteil (geladene Kugel vor einer geerdeten Metallplatte, Netzteilspannung 5kV) theoretisch bis zu einem Abstand $d \approx 6{,}7\,cm$ stabil funktionieren kann. Der Einfluss der Influenz ist in dieser Entfernung praktisch noch zu vernachlässigen ($K_- = 1{,}014$).

kungen x der Probekugel aus der Gleichgewichtslage. Für ein stabiles Gleichgewicht muss die potentielle Energie des Gesamtsystems ein Minimum aufweisen. Dies führt auf folgende Bedingungen:

$$\left.\frac{dE_{pot}}{dx}\right|_{x=0} = -F_{ges} \overset{!}{=} 0\,, \tag{3}$$

$$\left.\frac{d^2E_{pot}}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{d\left(-F_{ges}\right)}{dx} \overset{!}{>} 0\,. \tag{4}$$

Bedingung (3) soll durch das Verdrehen des oberen Drahtstücks gewährleistet sein, für Bedingung (4) müssen, der Aufgabenstellung des Versuches folgend, zwei Fälle unterschieden werden.

a) Abstoßende Kraft zwischen zwei Kugeln gleicher Ladung, d ist positiv

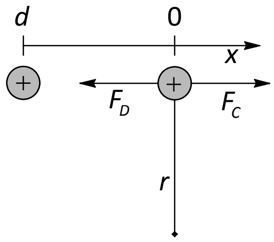

Abb. 2: Abstoßung

Für die Coulombkraft erhält man:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{\left(d+x\right)^2}\,, \tag{5}$$

die Kraft des Torsionsdrahtes beträgt:

$$F_D = -\frac{k_D}{l_1}\cdot\alpha - k_D\frac{x}{r}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right). \tag{6}$$

Hieraus folgt für die Stabilitätsbedingung (4):

$$\left.\frac{d\left(-F_{ges}\right)}{dx}\right|_{x=0} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q^2}{\left(d+x\right)^3}+\frac{k_D}{r}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\right]_{x=0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{d^3}+\frac{k_D}{r}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) \overset{!}{>} 0\,. \tag{7}$$

Man sieht, dass es keine einschränkenden Nebenbedingungen für eine stabile Anzeige der Torsionswaage gibt, weil (7) stets größer als Null ist.

b) Anziehende Kraft zwischen zwei Kugeln mit entgegengesetzt gleicher Ladung, d ist positiv

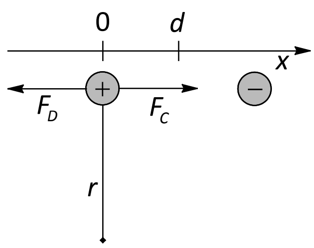

Abb. 3: Anziehung

Eine im Abstand d rechts von der Probekugel der Torsionswaage aufgestellte Metallplatte verursacht eine scheinbare Spiegelladung mit entgegengesetztem Vorzeichen im Abstand $2d$. Für die Coulombkraft erhält man jetzt:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{4\left(d-x\right)^2}\,, \tag{8}$$

die Gegenkraft F_D ist weiterhin durch Gl. (6) beschrieben.

Die Stabilitätsbedingung lautet für diesen Fall:

$$\left.\frac{d\left(-F_{ges}\right)}{dx}\right|_{x=0} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-Q^2}{2\left(d-x\right)^3}+\frac{k_D}{r}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\right]_{x=0} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{d^3}+\frac{k_D}{r}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) \overset{!}{>} 0\,. \tag{9}$$

Der Ausdruck (9) ist nur unter bestimmten Bedingungen größer als Null, d. h. es muss gelten:

$$\frac{k_D}{r}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) > \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d^3}\,. \tag{10}$$

Lösung: Mit den noch zu findenden Versuchsergebnissen kann man zeigen, dass die Torsionswaage im letzten Versuchsteil (geladene Kugel vor einer geerdeten Metallplatte, Netzteilspannung 5kV) theoretisch bis zu einem Abstand $d\approx 6{,}7\,cm$ stabil funktionieren kann. Der Einfluss der Influenz ist in dieser Entfernung praktisch noch zu vernachlässigen ($K_-=1{,}014$).