

# ELEKTRICITEIT

## Deel 3: elektromagnetisme

Prof. dr. ing. K. Stockman

Bachelor of Science in de industriële wetenschappen  
Academiejaar 2019–2020



# Inhoud

---

<b>HOOFDSTUK 3: ELEKTROMAGNETISME</b> .....	<b>1</b>
<b>1. Algemeenheden</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Definiëring van het magnetisch veld</b> .....	<b>3</b>
2.1. Kracht op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld: de Lorentz wet .....	3
2.2. Kracht op een stroomvoerende geleider in een niet homogeen veld. ....	5
2.3. Kracht op een bewegende lading in een magnetisch veld (Lorentz-wet) .....	5
2.4. Definitie van de inductie B .....	6
2.5. Veldlijnen. ....	7
2.6. Enkele toepassingen van de Lorentzwet.....	7
<b>3. De Wet van Biot Savart</b> .....	<b>12</b>
3.1. Definitie.....	12
3.2. Toepassing: inductie B door eindige rechte geleider. ....	12
3.3. Krachten op parallelle stroomvoerende geleiders.....	13
<b>4. De magnetische veldsterkte H</b> .....	<b>14</b>
4.1. Definitie.....	14
4.2. Wet van Maxwell – Ampère.....	14
4.3. Toepassingen.....	15
<b>5. De magnetische flux</b> .....	<b>24</b>
5.1. Definitie:.....	24
5.2. Wet van Gauss in magnetisme – 2° hoofdstelling.....	25
5.3. Brekingswet van magnetische veldlijnen. ....	26
<b>6. De magnetische inductie verschijnselen – Wet van Faraday Lenz</b> .....	<b>29</b>
6.1. Definitie.....	29
6.2. Fluxvariatie in een gesloten winding / spoel.....	29
6.3. Wet van Maxwell Faraday.....	30
6.4. Bewegende geleider in een magnetisch veld.....	31
6.5. Draaiende rechthoekige spoel in een magnetisch veld. ....	33
<b>7. Zelfinductie, wederzijdse inductie</b> .....	<b>35</b>
7.1. Inleiding.....	35
7.2. Wederzijdse inductie.....	36
7.3. Zelfinductie.....	38
7.4. Verband tussen wederzijdse inductie M en zelfinductie L.....	43
7.5. Seriegeschakelde spoelen. ....	44
<b>8. Magnetische veldenergie</b> .....	<b>47</b>
8.1. Inleiding.....	47
8.2. Afleiden van de magnetische energie in een spoel.....	47
8.3. Magnetische veldenergie per volume-eenheid. ....	48

8.4.	LC – keten en elektromagnetische trillingen.....	49
8.5.	LC trillingen met weerstand R (LRC keten).....	51
<b>9.</b>	<b>Gemagnetiseerde materialen. ....</b>	<b>54</b>
9.1.	Inleiding.....	54
9.2.	Het elementair magneetje. ....	54
9.3.	Het magnetisch veld van een kringstroompje; magnetisch dipoolmoment $m_{at}$ .....	55
9.4.	Begrippen magnetisatie M, magnetische polarisatie J. ....	56
9.5.	Paramagnetische stoffen. ....	57
9.6.	Diamagnetische stoffen. ....	57
9.7.	Ferromagnetisme.....	58
9.8.	De permeabiliteit bij ferromagnetsiche materialen.....	61
9.9.	Ontmagnetiseren van ferromagnetisch materiaal.....	64
9.10.	De ijzerverliezen.....	64
9.11.	Invloed van de frequentie op de hysteresislus. ....	67
9.12.	Magnetisch harde en zachte materialen.....	67
<b>10.</b>	<b>De magnetische kring. ....</b>	<b>69</b>
10.1.	Inleiding: beperkte bedekking van de kern.....	69
10.2.	De wet van Hopkinson – begrip reluctantie.....	70
10.3.	Wet van Hopkinson in een heterogene kring.....	71
10.4.	Zelfinductantie van een spoel op een ferromagnetische kern. ....	74
10.5.	Het berekenen van een eenvoudige magnetische kring.....	74
10.6.	Magnetische trekspanning.....	77
10.7.	Veldvervorming door inbreng van een ferromagnetisch materiaal.....	78
10.8.	De remanentie in en magnetisch circuit met luchtspleet. ....	79
	<b>BIBLIOGRAFIE.....</b>	<b>82</b>

# Hoofdstuk 3: Elektromagnetisme

---

## 1. Algemeenheden.

Wanneer een elektrische stroom door een geleider vloeit, dan wordt er rond de geleider een magnetisch veld opgewekt. Dit komt tot uiting doordat op een magneetnaald of op metalen deeltjes krachtwerking ontstaat.

Elk magnetisme wordt door elektrische stroom veroorzaakt. Ook in permanente magneten kan aangetoond worden dat het magnetisch veld uiteindelijk ontstaat door de elektronenbewegingen, zogenoemde moleculaire stromen. Eigenlijk kunnen we stellen dat alle magnetische verschijnselen een vorm zijn van "Elektromagnetisme".

Het magnetisme is reeds lang bekend. Oorspronkelijk ontdekten men ijzererts  $Fe_3O_4$ . Naar de vinder Magnesia, Klein Azië, noemt men een magneet een stuk metaal met magnetische eigenschappen. Deze veruiterlijkt zich door andere metalen aan te trekken.

Hangt men een staafmagneet beweegbaar op, dan gaat die zich richten volgens het aardmagnetisme. De toepassing van het kompas is reeds bekend van in de 3<sup>e</sup> eeuw. Bemerkt hierbij dat de noordpool van de magneet wijst naar de geografische noordpool. Deze laatste is echter wel de magnetische zuidpool!

Elke magneet bezit twee polen alwaar de magnetische eigenschappen het sterkst zijn. We praten van een noord- en zuidpool.

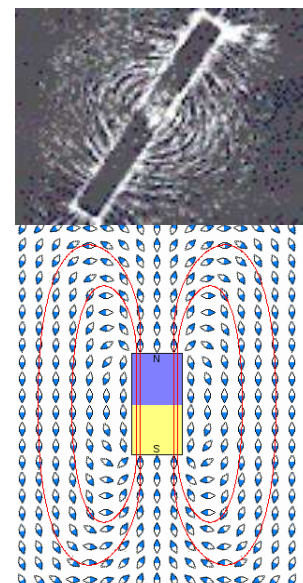
Ongelijknamige polen trekken elkaar aan, gelijknamige stoten elkaar af.

Hardstaal behoudt na inbreng in een magnetisch veld magnetische eigenschappen: het wordt een permanente magneet (het bezit permanent of remanent magnetisme). Weekijzer materialen worden terug niet-magnetisch.

De tussen twee magneten heersende kracht doet ons denken aan krachten die bestaan tussen twee ladingen (Coulomb). Het wezenlijk verschil ligt hem hierin dat N-pool en Z-pool niet als een positieve en negatieve magnetische lading kunnen gescheiden worden. Breekt men een staafmagneet, dan bekomt men twee magneten terug met elk een N-pool en een Z-pool. Er bestaan geen geïsoleerde magneetpolen, geen magnetische ladingen, maar uitsluitend magnetische dipolen.

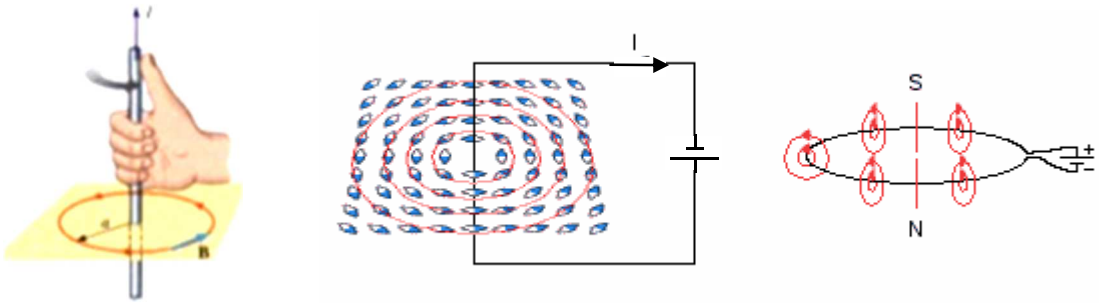
Nochtans is er een zekere analogie tussen magnetische en elektrische velden: beiden kunnen op dezelfde manier beschreven worden, nl. door **veldlijnen** (of krachtlijnen) en door de magnetische sterkte of **inductie B** (bemerkt dat magnetische veldsterkte H eigenlijk niet de grootte van het veld uitdrukt! Deze grootte gaan we op het gepast moment definiëren).

De richting van het magnetisch veld wordt door de krachtvector vastgelegd die aangrijpt op kleine ijzerstukjes ingebracht in het magnetisch veld. Het verloop wordt gemakkelijk zichtbaar gemaakt door gebruik te maken van ijzervijzel die men strooit op een glasplaat waaronder de magneet steekt. Zij stellen zich namelijk in volgens de richting van de grootste veldintensiteit. In bijgaande figuur wordt dit aangetoond bij een staafmagneet. De veldlijnen verlopen van pool tot pool. Uit de figuur blijkt dat de plaats waar ze uittreden zich uitstrekt over een bepaald oppervlak. De polen zijn aldus niet te bepalen als twee punten



Figuur 1-1Veldlijnen

van de magneet! Aan de veldlijnen wordt een zin toegekend overeenstemmend de stand van de kompasnaald. Dus verlopen veldlijnen van noord naar zuid.

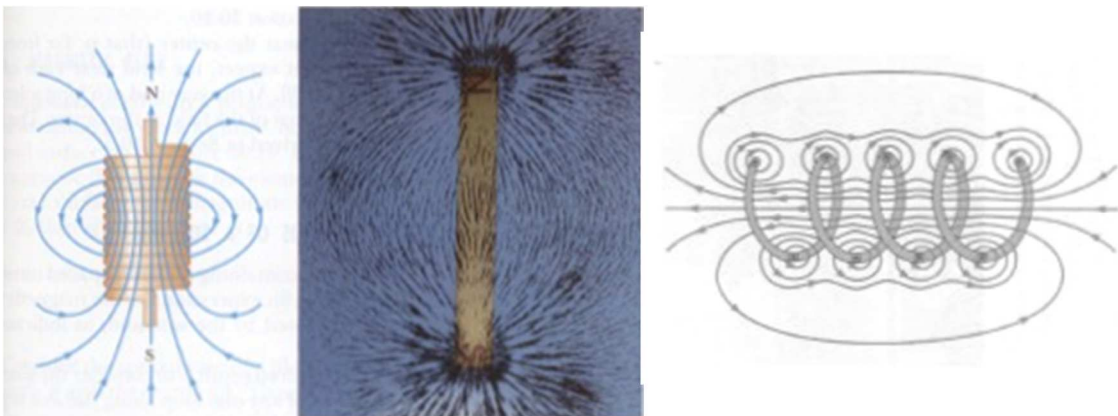


Figuur 1-2 Zin veldlijnen

Rond een geleider ontstaat een magnetisch veld, waarbij de veldlijnen cirkelvormige lijnen zijn. Buigt men de geleider tot een cirkelvormige geleider, dan bekomt men een magnetisch veld waar de veldlijnen door de winding trekken en zich uitwendig rond de winding sluiten.

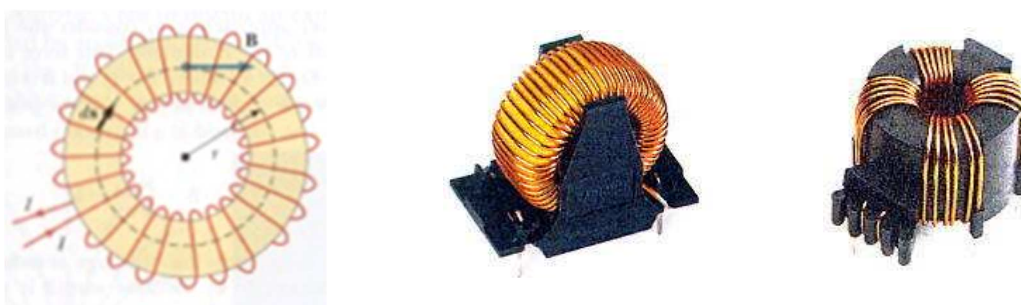
Wikkelt men een geleider tot een cirkelvormige spoel, dan is het veld uitwendig de spoel analoog als bij een permanente magneet. In bijgaande figuur bemerkt men het magnetisch veld van een aaneengesloten gewikkelde spoel en van een eerder losgewikkelde spoel.

Een solenoïde is een spoel waar men de veldlijnen binnen de spoel evenwijdig veronderstelt. Solenoïde bereikt men indien de lengte van de spoel groot wordt ten opzichte van de diameter, zodat de eindeffecten verwaarloosbaar zijn.



Figuur 1-3 Magnetisch veld bij een solenoïde

Buigt men een solenoïde tot een ringspoel of toroïde, dan ontwikkelt zich het veld, afgezien van het klein strooiveld, enkel binnen de spoel!



Figuur 1-4 Ringspoel of toroïde

Toroïden worden gebruikt bij diverse elektronische apparatuur als ontstoorfilter.

Bij andere toepassing vindt men de toroïde als transformator, die de netspanning omzet naar 12V, dit als voeding van halogeenlampen.

Bemerk dat in al de aangehaalde voorbeelden de **veldlijnen gesloten lijnen** zijn (in tegenstelling met elektrische veldlijnen die een begin en eindpunt hebben).

Magnetische veldlijnen hebben noch begin- noch eindpunt. Men spreekt van een bronvrij veld. Ook bij permanente magneten worden de veldlijnen als gesloten lijnen voorgesteld: binnen de magneet verlopen ze van zuid naar noord; buiten de magneet van noord naar zuid.

## 2. Definiëring van het magnetisch veld.

In de inleiding hebben we een aantal voorbeelden aangehaald van magnetische velden. De sterkte van het magnetisch veld in een bepaald punt wordt weergegeven door de magnetische inductie  $B$ , de wijze waarop het veld zich verspreid wordt weergegeven door veldlijnen.

Teneinde te komen tot een eensluitende definitie van de inductie gaan we uit van de wet van Lorentz.

### 2.1. Kracht op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld: de Lorentz wet

Experimenteel is gebleken dat wanneer een stroomvoerende geleider onderhevig wordt gesteld aan een magnetisch veld, hierop een kracht ontstaat. Deze kracht is:

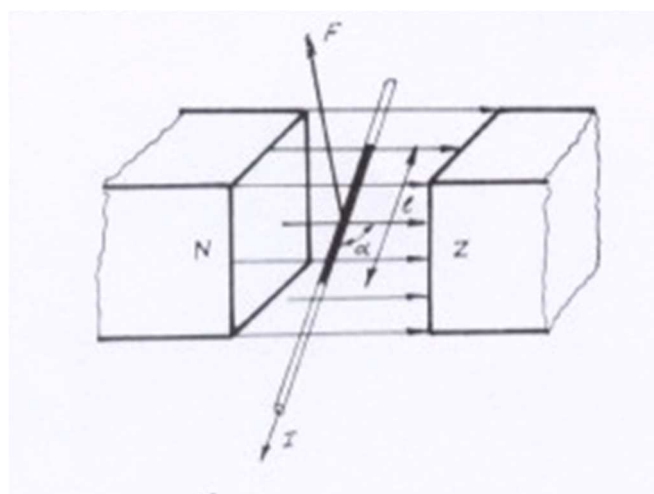
- evenredig met de stroom  $I$
- evenredig met de actieve lengte  $l$  van de geleider (stuk geleider dat zich in het magnetisch veld bevindt)
- afhankelijk van de stand van de geleider ten opzichte van het veld: hoek  $\alpha$
- gericht loodrecht op het vlak geleider, magnetisch veld
- afhankelijk van zijn magnetisch veld en de stroom.

Hieruit volgt:

$$\vec{F} = C^{te} I l \sin \alpha = B I l \sin \alpha$$

De evenredigheidsfactor  $B$  hangt alleen af van de sterkte van het magnetisch veld. Dit kan vastgesteld worden door de meting met verschillende permanente magneten over te doen.

De grootte  $B$  noemt men de **inductie** en



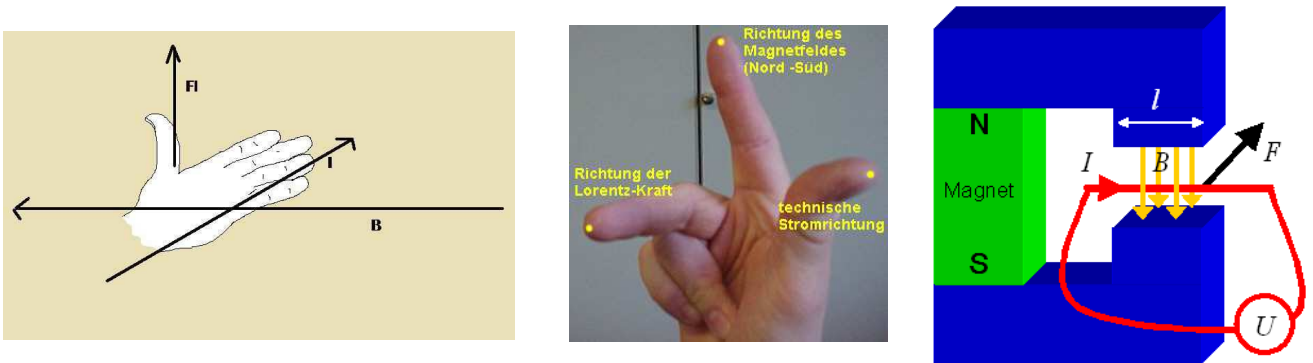
Figuur 2-1 Lorentzkracht

drukt de sterkte uit van het magnetisch veld.

De inductie  $\underline{B}$  is een vectorgrootheid: de grootte geeft de sterkte aan van het veld, de richting is volgens de veldlijnen, de zin stemt overeen met de zin van de veldlijnen.

Dat de richting van het magnetisch veld en de stroom invloed heeft op de richting van de krachtvector  $\underline{F}$  kan men proefondervindelijk vaststellen.

De richting van de Lorentzkracht kan ook gevonden worden met **de regel van de linkerhand**: *Plaats de linkerhand in het magnetisch veld zodanig dat de veldlijnen de handpalm binnendringen, met de vingers in de zin van de stroom, de duim wijst dan de richting van de kracht.*



Figuur 2-2 Bepalen van de richting van de Lorentzkracht

Deze krachtwerking werd voor het eerst vastgesteld door Lorentz, vandaar de Lorentzkracht.

Opmerking: naast de linkerhandregel wordt er ook gebruik gemaakt van de drievingerregel met de rechterhand. De duim volgens de stroomrichting, de wijsvinger volgens het magnetisch veld, de middenvinger geeft de richting van de kracht. In het kader van deze cursus wordt de linkerhandregel gehanteerd.

Eenheid van inductie B:

Uit de uitdrukking van de Lorentzwet volgt onmiddellijk:

$$[B] = \frac{[F]}{[I][l]} = \frac{N}{Am} = T \quad \text{Tesla}$$

Later wordt afgeleid dat 1T eveneens gelijk is aan 1 Vsec/m<sup>2</sup>.

## 2.2. Kracht op een stroomvoerende geleider in een niet homogeen veld.

Plaastst men een willekeurige geleider (niet noodzakelijk recht) in een willekeurig veld, dan kan de totale kracht beschouwd worden als de resultante van de krachten  $dF$  op elk stukje geleider afzonderlijk.

Stel een stukje geleider met lengte  $dl$ . Over deze korte lengte wordt het veld constant verondersteld gelijk  $B$ . De kracht die ontstaat op dit stroomelement wordt:

$$dF = B I \sin \alpha dl$$

Definiëren we  $dl$  als een vector met lengte  $dl$  en zin overeenstemmend de stroomzin, dan kunnen we de vergelijking vectorieel noteren:

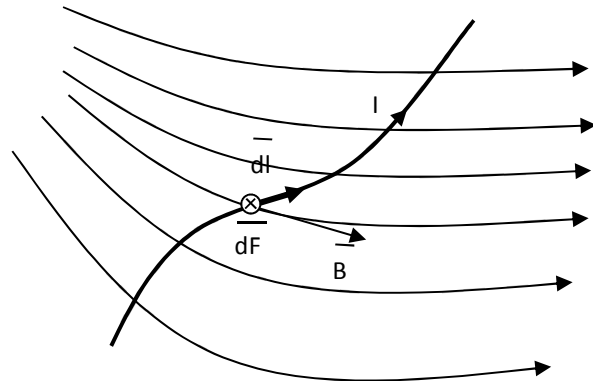
$$\vec{dF} = I(\vec{dl} * \vec{B})$$

Let hierbij op de volgorde van de vectoren in dit (vectorieel) product, daar deze bepalend zijn voor de richting en zin van de kracht  $\vec{dF}$

Deze betrekking is algemeen geldig, ook indien de stroomvoerende geleider geen rechte geleider is.

In het bijzonder geval waarbij de stroomdraad en de richting van het veld in één vlak liggen, geldt dat alle vectoren  $dF$  evenwijdig zijn. De resultante  $F$  wordt dan de rekenkundige som van alle vectoren  $dF$  samen of:

$$F = \int_0^l B I \sin \alpha dl$$



## 2.3. Kracht op een bewegende lading in een magnetisch veld (Lorentz-wet)

De Lorentz kracht zou er niet zijn indien er geen stroom  $I$  in de geleider vloeit. Deze stroom is echter het resultaat van verplaatsing van ladingsdragers. De kracht  $F$  moet dan ook als de resultante aanzien worden van de krachten op alle ladingsdragers samen.

Stel dat het aantal ladingsdragers per lengte-eenheid  $n$  is. Dan is de kracht per ladingsdrager:

$$f = \frac{B I \sin \alpha}{n l} = \frac{B I \sin \alpha}{n}$$

Is  $v$  de gemiddelde snelheid (driftsnelheid) van de ladingsdragers, dan is het aantal ladingsdragers die per seconde door de geleider vloeit:  $n \cdot v$



Bedraagt de lading van een deeltje  $q$ , dan volgt hieruit dat de stroom te noteren valt als:

$$I = q \cdot n \cdot v$$

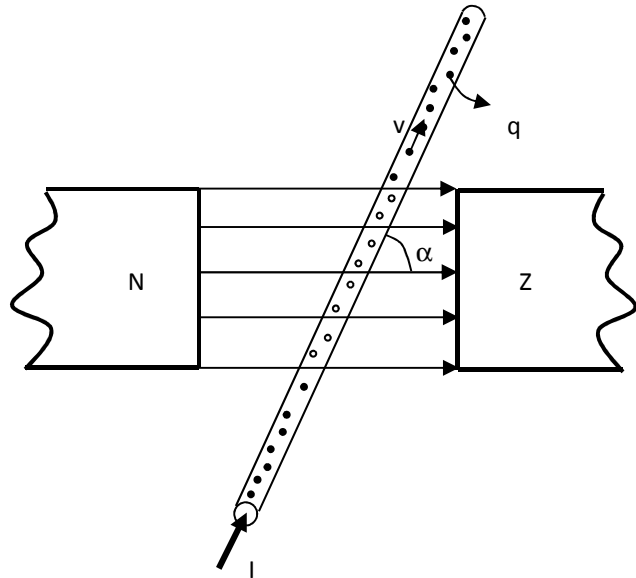
Ingebracht in voorgaande vergelijking:

$$f = \frac{B q n v \sin \alpha}{n} = B q v \sin \alpha$$

of in vectoriële schrijfwijze:

$$\vec{f} = q(\vec{v} * \vec{B})$$

Dit vormt de wet van Lorentz.



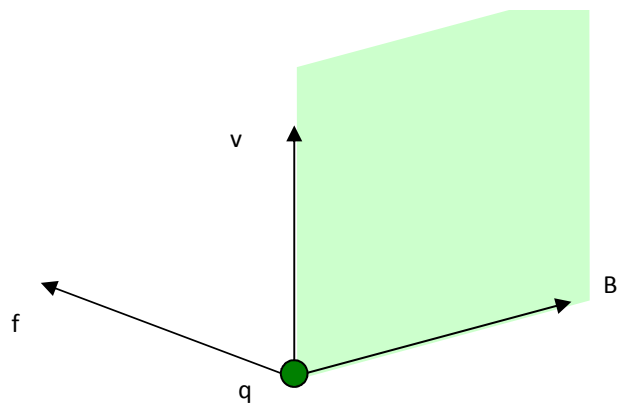
Figuur 2-3 Kracht op een bewegende lading in een magnetisch veld

Opmerking:

Indien er ook een elektrisch veld zou aanwezig zijn, dan zou de totale kracht het resultaat zijn van de krachtwerking van het elektrisch en magnetisch veld samen of:

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} * \vec{B}$$

Toepassing van deze algemene wet van Lorentz vinden we in bijvoorbeeld bij een deeltjesversneller of cyclotron, massa spectrometer.



Figuur 2-4 Vectoriële weergave

## 2.4. Definitie van de inductie B

**Uit het voorgaande kan men de magnetische inductie definiëren als de kracht op een positieve éénheidslading die zich beweegt met een eenheid van snelheid loodrecht op de veldrichting.**

$$f = B \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = B$$

De richting van de inductie is die waarin een bewegende lading geen kracht ondervindt.

De dimensie van inductie volgt uit de betrekking:

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{N}{C \cdot m/sec} = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{V \cdot sec}{m^2} = T \quad \text{tesla}$$

Homogeen veld: is een magnetisch veld waar overal zowel de grootte als de richting en zin van de inductie dezelfde blijft.

## 2.5. Veldlijnen.

Reeds in de inleiding werd gesproken over veldlijnen in een magnetisch veld. De zin van de veldlijnen wordt gevonden met een kompasnaald. Daarbij wijst de N-pool de positieve zin aan. De zin komt dus overeen met de zin van de inductie.

Wordt een magnetisch veld uitgebeeld, dan tekent men een aantal veldlijnen of krachtlijnen waarop enkele pijlen de richting van de inductie aanduiden. Fysisch stellen de lijnen niets voor. Ook in de ruimte tussen twee krachtlijnen laat de magneet zijn invloed gelden.

Aan de veldlijnen kunnen volgende eigenschappen worden toegekend:

- de veldlijnen zijn steeds gesloten lijnen zonder begin en einde. Buiten een permanente magneet gaan deze van noord naar zuid; bij elektromagnetische velden wordt de zin bepaald in functie van de stroomzin en/of wikkelzin met behulp van de rechterhandregel.
- de dichtheid van de veldlijnen is een maat voor de sterkte van het veld. Vanuit deze optiek kiest men een veldlijndichtheid evenredig met de magnetische inductie.
- de veldlijnen hebben de neiging zich zo kort mogelijk te maken en elkaar af te stoten.
- de veldlijnen zullen bij het uittreden of invallen van ferromagnetisch materiaal (lees metaal) loodrecht op het oppervlak staan. We verwijzen hiervoor naar de brekingswet.

## 2.6. Enkele toepassingen van de Lorentzwet.

### 2.6.1. Rechthoekige draadwinding resp. spoel in een homogeen veld.

In veel toepassingen zoals bij DC motoren, analoge meettoestellen, ... hebben we te maken met rechthoekige spoelen draaibaar opgesteld in een magnetisch veld. Bij stroomdoorgang ontstaat er een koppel zodanig dat het opgewekt veld door de spoel zich probeert te plaatsen in de richting van het hoofdveld. Doel is om een uitdrukking van dit koppel alsook het magnetisch dipoolmoment van een spoel te definiëren.

Beschouw een rechthoekige winding, draaibaar opgesteld langs zijn lengteas en geplaatst in een magnetisch veld. De normaal  $n$  van het vlak van de winding is zodanig gekozen dat dit met de rechterhandregel past bij de zin van de stroomdoorgang.

De Lorentz-krachten op de verticale stroomdraden zijn gelijk doch tegengesteld:

$$F = B \cdot I \cdot h$$

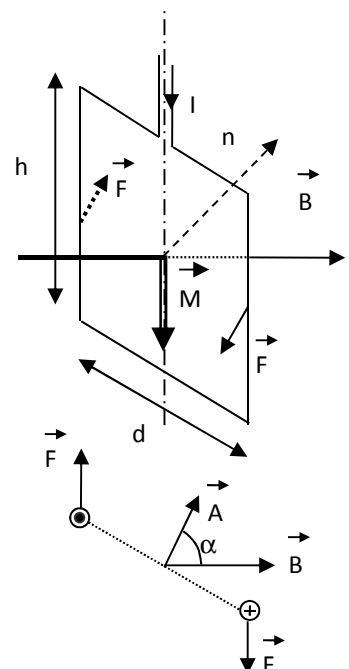
Deze twee krachten geven aanleiding tot een koppel:

$$M = F \cdot d \cdot \sin\alpha$$

Of met de uitdrukking van de kracht:

$$M = B \cdot I \cdot h \cdot d \cdot \sin\alpha = B \cdot I \cdot A \cdot \sin\alpha$$

waarin  $A$  het oppervlak van de winding voorstelt.



Figuur 2-5 Lorentzkracht op een rechthoekige draadwinding

In vectoriele vorm wordt voorgaande vergelijking:

$$\vec{M} = I(\vec{A} * \vec{B})$$

Hierin stelt \* het vectorieel product voor van de vector A en B

Bij een spoel met N windingen, dan wordt het koppel zoveel maal meer of:

$$\vec{M} = N I(\vec{A} * \vec{B})$$

Opmerking:

Bemerkt dat indien de draadwinding volledig in het magnetisch veld zich bevindt, ook op de horizontale draden een Lorentz-kracht ontstaat. Deze liggen echter in elkaars verlengde en zijn even groot. Zij leiden dan ook niet tot een resulterende kracht noch tot een koppel. In de meeste toepassingen geldt echter dat alleen de verticale draden in het magnetisch veld zich bevinden. Men dient dan uiteraard rekening te houden met de actieve hoogte, of dit stuk dat zich bevindt in het magnetisch veld.

Uit de richting van het koppel stellen we vast dat de spoel zich zodanig zal draaien dat het veld opgewekt door de spoel zich gaat richten in de richting van het hoofdveld B.

In evenwicht wordt het koppel nul (ga na).

Men definieert het **magnetisch dipoolmoment van de spoel** als:

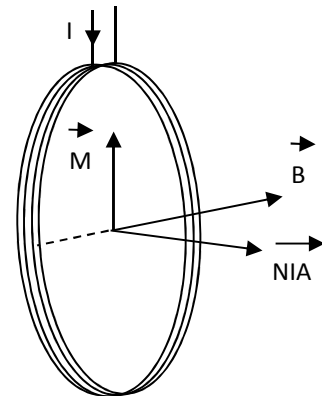
$$\vec{P}_m = N I \vec{A}$$

Deze vector staat loodrecht op het vlak van de spoel, met een zin bepaald met de rechterhand in functie van de stroomzin of nog stemt overeen met de richting van het magnetisch veld opgewekt door de spoel zelf.

De uitdrukking van het koppel wordt uiteindelijk:

$$\vec{M} = \vec{P}_m * \vec{B} = N I \vec{A} * \vec{B}$$

Men toont aan dat bovenstaande vergelijking algemeen geldig is. Hebben we een spoel van willekeurige vorm, waarbij het magnetisch dipoolmoment  $\vec{P}_m$  kan bepaald worden als het product van het aantal windingen, de stroom en het oppervlak, wat ook de vorm mag zijn, dan wordt het koppel, uitgeoefend op de spoel, gegeven door bovenstaande vergelijking.



Figuur 2-6 Vectoriële weergave koppel

Bemerkt dat in geval dat de spoel vrij opgesteld staat in het magnetisch veld (dus zonder anker, zoals in volgende paragraaf) het koppel afhankelijk is van de stand van de spoel ten opzichte van het hoofdveld. Op zich een probleem als we denken aan een drijvend koppel in een motor of analoog meettoestel. In volgende paragraaf wordt hierop tegemoet gekomen.

## 2.6.2 Het principe van een draaispoelinstrument.



Een nadeel in de voorgaande toepassing is dat het koppel uitgeoefend op de spoel afhankelijk is van de stand van de spoel ten opzichte van het hoofdveld of van de hoek  $\alpha$ .

Willen we een draaispoelinstrument bouwen waarin de uitwijking van het meetspoeltje enkel afhankelijk wordt van de stroom, dan wordt een cilindrisch ankertje gebruikt, waarrond het spoeltje zich bevindt. Door het anker worden de veldlijnen gebroken. In de luchtspleet staan ze radiaal. Bemerk dat hierdoor de krachtvectoren onafhankelijk van de stand van het spoeltje tangenciaal gericht zijn. Hierdoor wordt het drijvend koppel:

$$M_d = F * d = N B I l . d$$

In geval van een meettoestel hebben we naast het drijvend koppel eveneens een tegenwerkend koppel, uitgeoefend door een spiraalveer:

$$M_t = k \alpha$$

Naarmate de spoel verdraait spant de veer zich op. Wanneer drijvend koppel gelijk wordt aan tegenwerkend koppel, wordt een evenwicht bereikt en geldt:

$$M_d = F * d = N B I l d = M_t = k \alpha$$

waaruit :

$$\alpha = \frac{N B l d}{k} I = k' I$$

De hoekuitwijking is dus prefect evenredig met de stroom. Dit leidt dan ook tot een lineaire schaalverdeling.

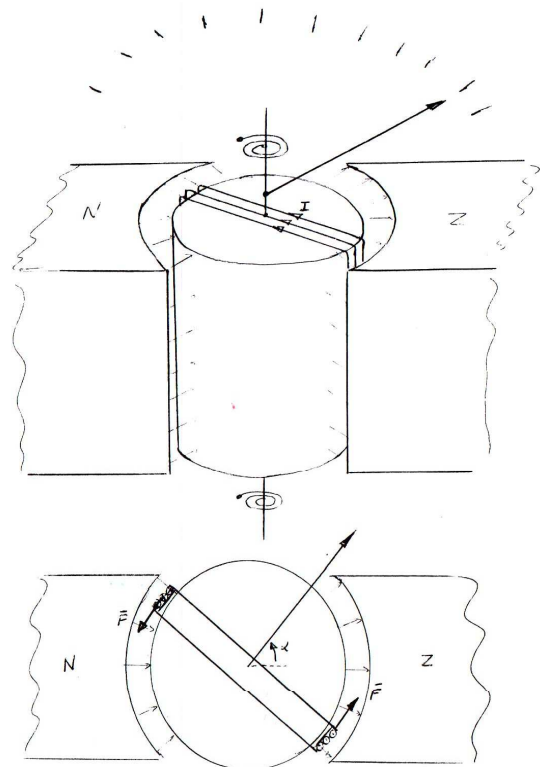
Opmerking:

Meestal is de maximale stroom door het meetspoeltje beperkt. In geval van een voltmeter zal men gebruik maken van voorschakelweerstand om het meetbereik uit te breiden naar hogere spanningen. In geval van een ampèremeter wordt gebruik gemaakt van shuntweerstand om ook grotere stromen te kunnen meten.

## 2.6.2. Hallgeneratoren.

Een belangrijke toepassing van de algemene wet van Lorentz is terug te vinden bij hallgeneratoren.

Een hallelement bestaat uit een dun metalen plaatje dat in langsrichting door een stroom  $I$  doorlopen wordt. Brengt men het plaatje in een magnetisch veld met inductie  $B$ , waarvan de richting loodrecht staat op het vlak van het plaatje, dan ontstaat in dwarsrichting een hallspanning (gelijkspanning)  $U_H$ . De oorzaak van deze spanning is een gevolg van het verdringen van de ladingsdragers onder invloed van het magnetisch veld.



Figuur 2-7 Principe van een draaispoelmeter

Indien we uitgaan van elektronen als ladingsdragers, dan ontstaan hierop lorentzkrachten:

$$\underline{F}_B = q (\underline{v} \times \underline{B})$$

Hierin is :  $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C (lading van elektron)  
 $v$  = driftsnelheid m/sec  
 $B$  de inductie T

Met behulp van de rechterhandregel toegepast op het vectorieel product leiden we de verdringingsrichting af. De elektronen worden in ons geval naar rechts verdrongen. In antwoord op deze ladingsverschuiving ontstaat een elektrisch veld. Op elke ladingsdrager ontstaat dus naast de kracht  $F_B$  nu eveneens een kracht  $F_E$  waarvoor geldt:

$$\underline{F}_E = q \underline{E}$$

waarin  $\underline{E}$  de elektrische veldsterkte voorstelt. Bij evenwicht geldt:

$$\underline{F}_E = -\underline{F}_B \text{ of}$$

$$q \underline{E} = q v B$$

waaruit

$$E = v B$$

De driftsnelheid kunnen we uitdrukken in functie van de stroom als:

$$v = \frac{I}{n b d q}$$

waarin:  $n$ : aantal ladingsdragers (elektronen) per eenheid van volume

$I$ : de stroom

$b$ : de breedte van het plaatje

$d$ : dikte van het plaatje

$q$ : de lading van een elektron.

Aldus wordt de elektrische veldsterkte  $E$ :

$$E = \frac{I B}{n b d q}$$

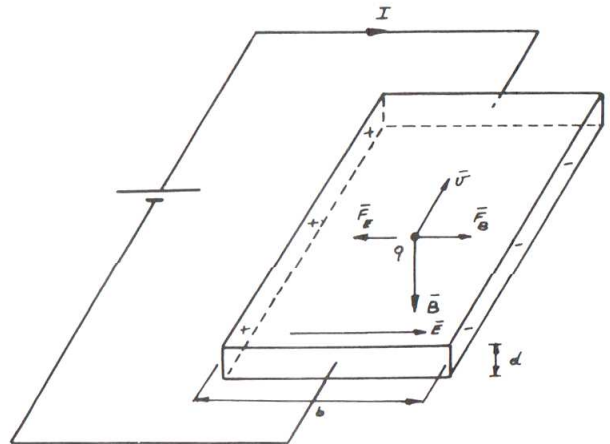
De waarde van de hallspanning wordt dan:

$$U_H = E b = \frac{I B}{n b d q} b = \frac{1}{n q} \frac{I B}{d} = R_H \frac{I B}{d}$$

Hierin vormt  $R_H$  de hallconstante ( $m^3/Asec$ ) afhankelijk van het gebruikte materiaal.

Voor koper:  $R_H = 10^{-10} m^3/Asec$

Voor halfgeleiders:  $R_H = 120 \dots 600 \cdot 10^{-6} m^3/Asec$

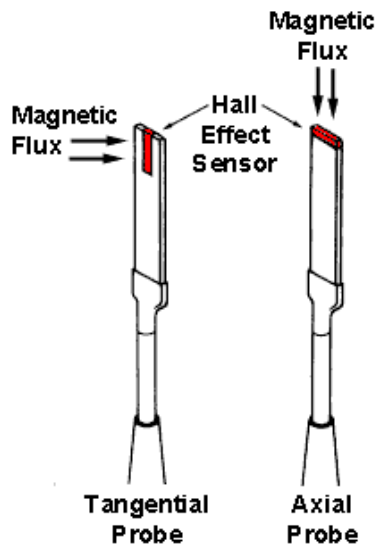


Figuur 2-8 Principe Hallelement

Doordat bij halfgeleiders een grote hallconstante kan bekomen worden (waarom) geldt dat de hallspanning de orde grootte van een aantal volts kan bereiken! Bemerkt ook dat de polariteit van de hallspanning afhankelijk is van het gebruik van P of N materiaal gebruikt (ga na).

Hallgeneratoren of hallelementen worden meestal gevormd uit halfgeleiderplaatjes van 0,1mm dikte, beschermd door een mantel uit mica of giethars. Via een opdampstelsel op een draagelement, bijvoorbeeld glas, bedraagt de dikte slechts 5µm waardoor de hallspanning dan ook bijzonder groot kan zijn (uiteraard door geringe dikte is de stroom beperkt).

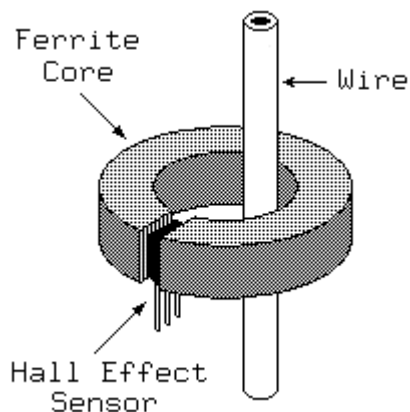
Figuur 2-9 toont een hallsonde gebruikt om magnetische velden te meten.



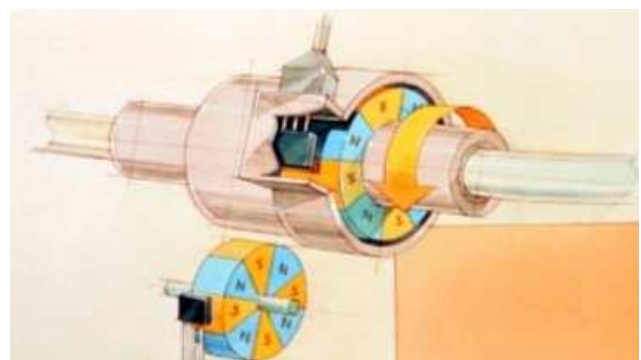
Figuur 2-9 Hallsonde

Andere toepassing vinden we bij een stroomsensor. Bij heel wat toepassingen dient men rechtstreeks contact met de geleider te vermijden. Door toepassen van dergelijke sensor krijgt men toch een beeld van de stroom. Immers, door de stroom in de geleider ontstaat in de ferrietkern een magnetisch veld evenredig met de stroom. Een hallsensor geplaatst in een luchtspleet van de kern zorgt voor een spanning evenredig met die inductie, dus eveneens met de stroom in de hoofdgeleider.

Hallsensoren kunnen ook gebruikt worden als hoekdetector respectievelijk snelheidsmeter. De opeenvolgende polen zorgen voor een voortdurende ompoling van de hallspanning. Met als gevolg een blokgolf, waarvan het aantal pulsen evenredig is met de snelheid waarmee de polen voorbij het hallelement passeren. Meten van deze frequentie laat toe om de snelheid – positie van de as te bepalen.



Figuur 2-10 Principe stroomtang



Figuur 2-11 Hoekdetector (snelheidsmeter)

### 3. De Wet van Biot Savart

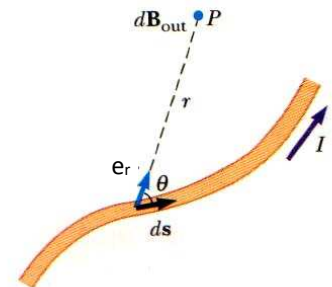
#### 3.1. Definitie

Elk klein stroomdeeltje of stroomelement van een willekeurige stroomdraad levert in een willekeurig punt P van de ruimte een bijdrage  $dB$  tot het totaal magnetisch veld in dat punt.

De grootte  $dB$  blijkt evenredig te zijn met de stroom  $I$ , omgekeerd met kwadraat van de afstand of  $r^2$  en afhankelijk van de stand van het stroomelement tov de verbindingslijn van het stroomelement met P.

Wiskundig luidt de wet van Biot Savart (ook formule van Laplace genoemd):

$$dB_P = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi r^2} \sin \vartheta$$



Figuur 3-1 Bijdrage stroomelement tot het magnetisch veld

Elke bijdrage  $dB_P$  is een vector loodrecht op het vlak  $r, dl$ . De richting wordt gevonden door toepassing van de rechterhandregel.

Passen we de vectoriele schrijfwijze toe, dan geldt:

$$\overline{dB_P} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \overline{ds} * \overline{e_r}$$

$ds$  is een vector in de richting van de stroom  $I$ ,  $e_r$  is een éénheidsvector van het stroomelement naar het punt P gericht.

Vormt de geleider en het punt P één vlak, dan staan alle vectoren  $dB_P$  evenwijdig en is de totale inductie in P, de som van alle bijdragen  $dB_P$  of

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \theta}{r^2} ds$$

#### 3.2. Toepassing: inductie B door eindige rechte geleider.

De vector staat loodrecht op het vlak gevormd door P en de geleider (zin naar voor toe).

$$dB_P = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi r^2} \sin \theta$$

nu is echter  $\sin \theta = a / r$

of  $r = a / \sin \theta$

Verder is  $\text{tg } \theta = a / x$

waaruit:

$$x = a / \text{tg } \theta = a \cotg \theta$$

$$\text{en } ds = dx = a d\theta / (\sin\theta)^2$$

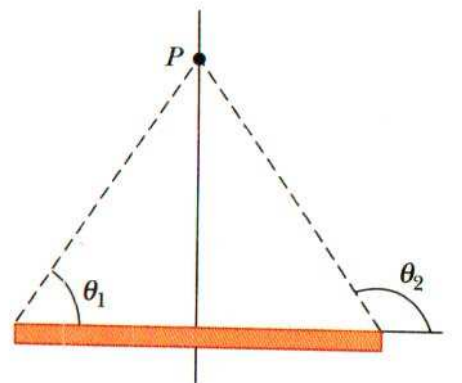
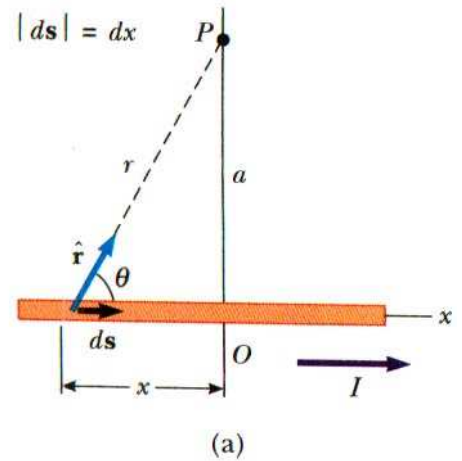
Dit allemaal in de vergelijking van  $dB_P$ :

$$B_P = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_o I}{4\pi r^2} \sin \theta \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Voor het geval dat de geleider oneindig lang wordt geldt:  $\theta_1 = 0^\circ$  en  $\theta_2 = 180^\circ$  of

$$B_P = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$$

Dit is een zeer belangrijke uitdrukking, die we nodig hebben bij de wet van Maxwell-Ampère. Anderzijds zullen we de afleiding van de inductie voor een oneindige lange geleider op een eenvoudiger manier opstellen. Verwijzen we daarvoor naar de paragraaf 4.3.



Figuur 3-2 Inductie bij een rechte geleider

### 3.3. Krachten op parallelle stroomvoerende geleiders.

Parallel stroomvoerende geleiders oefenen krachten uit op elkaar. Afhankelijk van de stroomzin wordt dit een afstotende kracht bij tegengestelde stroomzin, en een aantrekkingskracht bij gelijke stroomzin.

Het mechanisme laat zich gemakkelijk begrijpen indien men uitgaat van de Lorentz wet of BIL wet. Men kan immers de tweede stroomvoerende geleider aanzien als geplaatst in het magnetisch veld opgewekt door de eerste geleider. De magnetische veldlijnen vallen loodrecht in op de geleider,  $\sin \alpha = \pi/2$

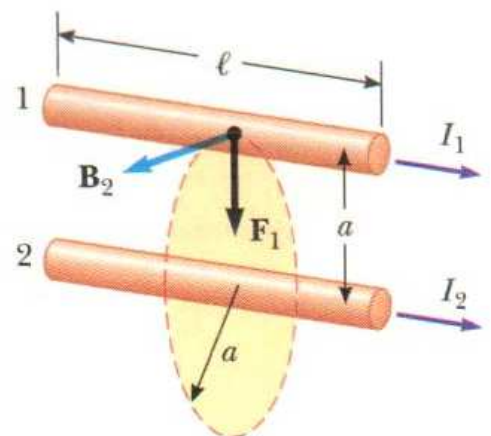
$$F_1 = I_1 \ell B_2 \sin \frac{\pi}{2} = I_1 \ell \left( \frac{\mu_o I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a} \ell$$

of per lengte eenheid:

$$\frac{F_1}{\ell} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a}$$

De kracht  $F_1$  is naar geleider 2 gericht.

Bemerk dat een even grote kracht  $F_2$  op geleider 2 ontstaat, naar geleider 1 gericht. Stromen met zelfde zin leiden tot krachten op de geleiders die ze naar elkaar toe trekken; Stromen in tegengestelde zin leiden tot afstotende krachten (leid dit af!)



Figuur 3-3 Krachten op parallel stroomvoerende geleiders



## 4. De magnetische veldsterkte H

### 4.1. Definitie

Uitgaande van de magnetische inductie B, definieert men de veldsterkte H als

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

De veldsterkte wordt eveneens als een vector voorgesteld.

De dimensie is A/m (zie later)

Passen we dit toe op een rechte stroomvoerende geleider, dan geldt op een afstand a dat de veldsterkte wordt:

$$H_P = \frac{I}{2\pi a}$$

Hieruit volgt direct de dimensie A/m.

De veldsterkte is dus een puur wiskundige grootheid en stelt ons in staat het veld te beschrijven onafhankelijk van het medium. Zoals zal blijken uit de volgende punten laat de magnetische veldsterkte ons toe op een snelle manier de inductie te berekenen in en rond geleiders, solenoïde, toroïden, coaxiaalgeleiders, etc. Eveneens zal het een hulp zijn bij het dimensioneren van magnetische kringen.

### 4.2. Wet van Maxwell – Ampère

Beschouwen we een willekeurige gesloten lijn rond een stroomvoerende geleider, dan geldt dat de lijnintegraal

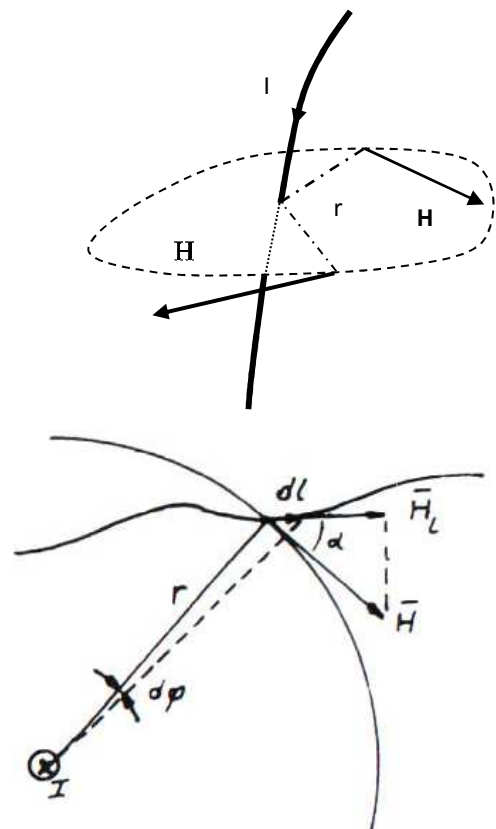
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Theta$$

Hierin is  $\Theta$  de omsloten stroom of de totale doorstroming (ampères)

Het teken hangt weliswaar af van de integratiezin.

Het bewijs beperken we tot het geval van een gesloten lijn in een vlak loodrecht op de geleider. Dit laat toe de vergelijkingen eenvoudig te houden.

We verdelen de lijn in delen  $dl$ , waarbij deze vectorieel worden voorgesteld met een zin overeenkomstig een vooraf gekozen integratiezin. Over elk deeltje  $dl$  bepalen we het scalair product:



Figuur 4-1 Veldsterkte in een gesloten lijn rond een stroomvoerende geleider

$$\vec{H} \cdot d\vec{l} = H dl \cos \alpha = H r d\varphi$$

Nu geldt op een afstand r dat:

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

zodat:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi} d\varphi = I$$

Geïntegreerd over de volledige gesloten kring wordt:

Bemerkt dat indien de integratiezin anders zou gekozen worden, het resultaat  $-I$  of negatief wordt.

Conclusie: *De lijnintegraal van de magnetische veldsterkte genomen langs een gesloten lijn rond een stroomvoerende geleider is gelijk aan de omsloten stroom I. Het teken van I is afhankelijk van de integratiezin en wordt bepaald met de regel van de rechterhand.*

Bij uitbreiding naar meerdere omsloten stroomvoerende geleiders, dan blijft de wet geldig en wordt:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = +I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = \sum I_i = \Theta$$

**De grootheid  $\Theta$  noemen we de totale doorstroming** door een vlak waarrond de kringintegraal genomen wordt.

*Deze vergelijking gaat door als de eerste hoofdstelling van het magnetisch veld.*

### 4.3. Toepassingen.

#### 4.3.1. De inductie in een toroïde of ringspoel.

Uit de configuratie van een ringvormige spoel volgt dat de veldlijnen concentrische cirkels zijn. Uit symmetrie geldt dat overal de inductie en veldsterkte even groot zijn.

Beziet de spoel N windingen, dan volgt door toepassen van de wet van Maxwell Ampère:

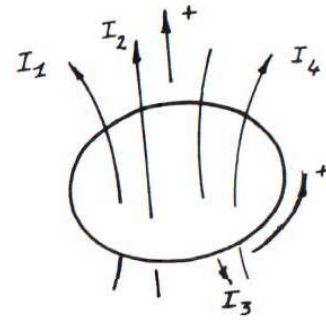
$$H r d\varphi = \frac{I}{2\pi} d\varphi$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \theta = NI$$

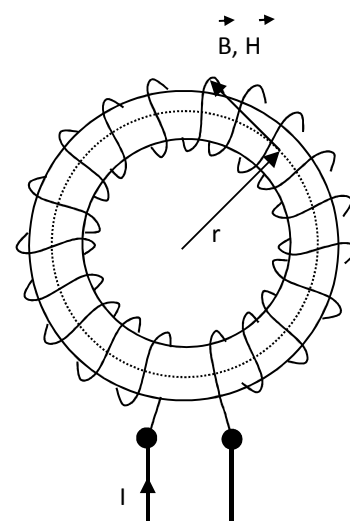
dat de veldsterkte wordt:

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

en de inductie:



Figuur 4-2 Veldsterkte bij meerdere omsloten stroomvoerende geleiders



Figuur 4-3 Inductie in een toroïde

$$B = \mu H = \mu \frac{NI}{2\pi r}$$

In principe is het magnetisch veld niet homogeen. Door de straal  $r$  in de noemer stijgt de waarde van de inductie naarmate  $r$  de waarde  $R_1$  van de binnenstraal nadert, daalt naar de buitendiameter  $R_2$ .

Meestal rekt men echter met de gemiddelde inductie:

$$B_{gem} = \mu \frac{NI}{2\pi R_{gem}}$$

Daar  $R_1$  en  $R_2$  weinig van elkaar verschillen.

Herinneren we aan het belangrijk voordeel van de toroïde namelijk dat het magnetisch veld zich praktisch volledig voordoet in de kern zelf. Dergelijke ringspoelen produceren dan ook weinig stoorvelden.

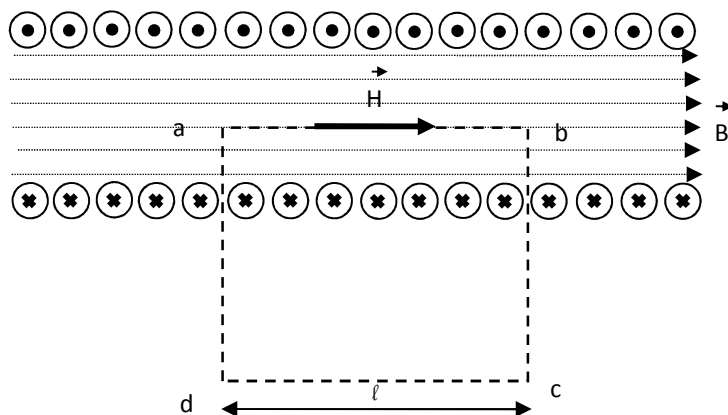
#### 4.3.2. De inductie binnen een solenoïde (luchtspoel).

Een lange dicht gewonden draadspoel wordt een solenoïde genoemd. Het magnetisch veld binnen de spoel kan als vrijwel homogeen worden verondersteld. Buiten de solenoïde is de inductie in vergelijking met de inductie erbinnen erg klein (behalve in de buurt van de uiteinden): Binnen de veldlijnen is er een hoge veldlijndichtheid. Buiten de solenoïde waaieren de veldlijnen uit in de uitgestrekte open ruimte daarbuiten.

Met behulp van de wet van Maxwell – Ampère toegepast langs een rechthoek  $abcd$  leiden we de inductie af.

De integraal is te splitsen in vier segmenten:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{H} \cdot d\vec{l}$$



Figuur 4-4 Inductie in een solenoïde

De veldsterkte buiten de solenoïde is zeer klein, zodat het derde stuk langs  $cd$  kan verwaarloosd worden.

Het stuk langs da en bc vallen eveneens weg, daar de vector  $\underline{H}$  binnen de solenoïde loodrecht staat op de segmenten en tussen de geleiders en buiten de windingen  $\underline{H}$  vrijwel nul is.

Rest alleen het stuk ab. Bemerkt dat  $\underline{H}$  en  $d\underline{l}$  zelfde richting en zin hebben. De integraal wordt:

$$\oint \overline{H} \cdot d\overline{l} = \int_a^b \overline{H} \cdot d\overline{l} = \int_a^b H \cdot dl = H \int_a^b dl = H \cdot l$$

Volgens de wet van Maxwell-Ampère is deze integraal gelijk aan de totale doorstroming.

Indien de volledige spoel met lengte L een totaal aantal windingen N bezit, dan geldt over een afstand l:  $N \cdot l/L$ .

In elke geleider is een stroom I. Dan geldt:

$$H \cdot l = I N l/L$$

waaruit:

$$H = \frac{NI}{L} \quad \text{en}$$

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{L}$$

*“In een solenoïde geldt dat de veldsterkte gelijk is aan het aantal ampèrewindingen per meter”*

Opmerking:

- In de praktijk zal de inductie lager liggen om reden van een afwijkend veldpatroon ten opzichte van de solenoïde. De veldlijnen lopen niet evenwijdig, een deel gaat reeds zijdelings de spoel verlaten. Hierdoor daalt de gemiddelde inductie. De correctiefactor  $k < 1$  hangt af van de lengte en de diameter van de spoel. Naarmate de verhouding  $L/d$  stijgt, zal  $k$  dichter bij 1 komen.
- Het veld van een solenoïde lijkt sterk op dat van een staafmagneet. In die zin gaat men ook dikwijls praten van de noord- en zuidpool van de solenoïde.
- Bij veel toepassingen wordt de solenoïde voorzien van een ijzeren staaf, waardoor het veld beter wordt geleid. In combinatie met een kern praat men ook vaak van een solenoïde. Toepassingsvoorbeeld: deurbel, elektromagnetische schakelaar of relais, ...

### 4.3.3. Het magnetisch veld in en rond een stroomvoerende geleider.

In paragraaf 3.2 werd reeds de uitdrukking van de inductie op een zekere afstand van een stroomvoerende geleider afgeleid. Met behulp van de wet van Maxwell-Ampère wordt dit echter zeer eenvoudig en laat het eveneens toe om zowel buiten als binnen de geleider de inductie te bepalen.

We gaan uit van een (oneindig) zeer lange rechte geleider, zodat we kunnen aannemen dat de veldlijnen radiaal verlopen in evenwijdige vlakken loodrecht op de geleider.

- Inductie B op afstand r buiten de geleider:

Uit symmetrie geldt dat alle punten op zelfde afstand dezelfde inductie en veldsterkte in grootte hebben.

Passen we de wet van Maxwell-Ampère toe langs een cirkel met straal  $r$ , en integratiezin overeenstemmend de stroomzin:

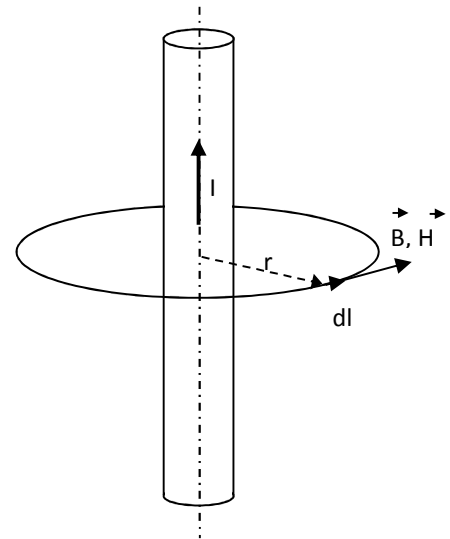
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \theta$$

$$\oint H dl = H \oint dl = H 2\pi r = I$$

waaruit:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \text{ en}$$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$



Figuur 4-5 Inductie op een afstand buiten de geleider

Naar de rand van de geleider stijgt de inductie om op de rand gelijk te worden aan:

$$B_{\max} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}$$

- Inductie in de geleider.

Ook in de geleider hebben we een magnetisch veld. De veldlijnen zijn eveneens cirkelvormig. Terug geldt dat alle punten op afstand  $r'$  een zelfde inductie bezitten.

Passen we opnieuw de wet van Maxwell- Ampère toe langs de cirkel met straal  $r'$ , integratiezin in overeenstemming met de stroomrichting:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \theta$$

$$\oint H dl = H \oint dl = H 2\pi r' = I' = I \frac{\pi r'^2}{\pi R^2}$$

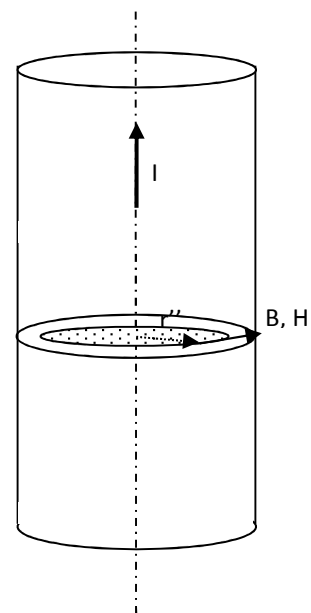
waaruit:

$$H = I \frac{r'}{2\pi R^2} \text{ en}$$

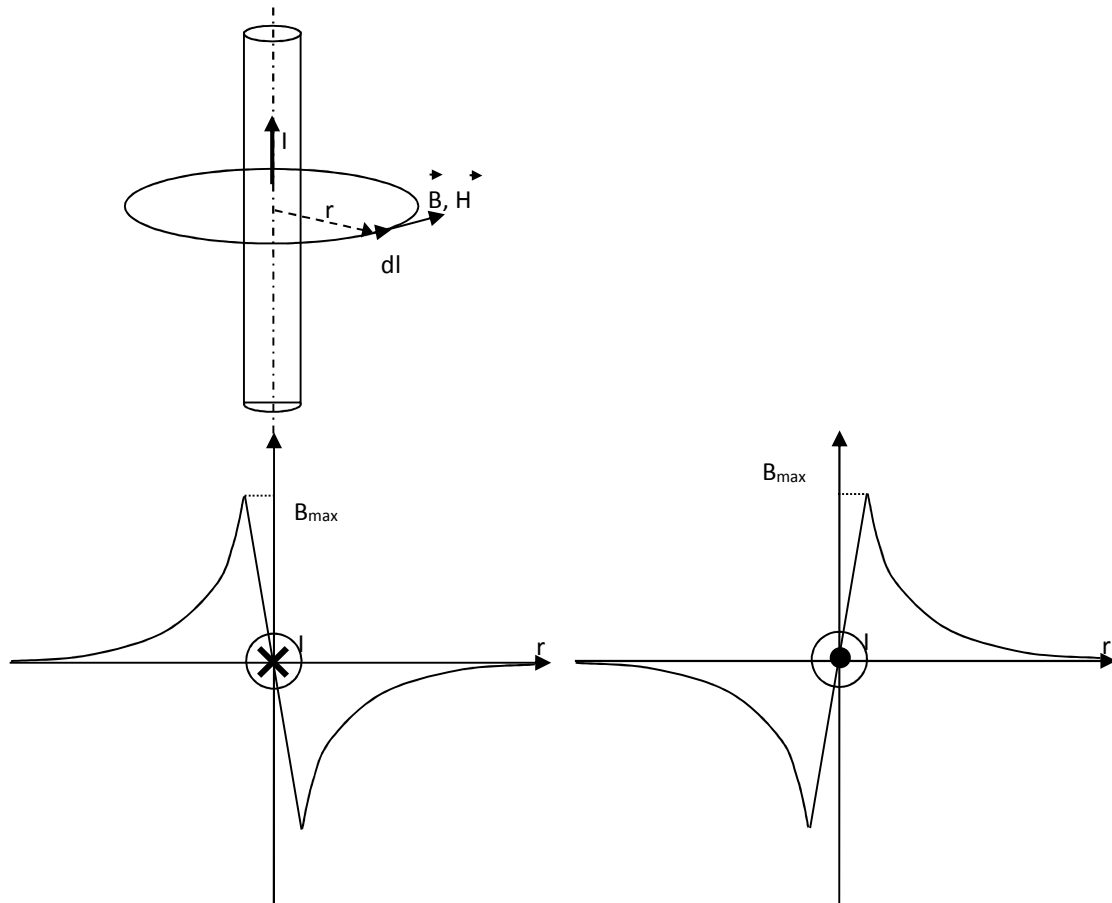
$$B = \mu_0 H = \mu_0 I \frac{r'}{2\pi R^2}$$

De inductie varieert lineair in de geleider vanaf nul op de as van de geleider naar

een maximum waarde  $B_{\max} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}$



Figuur 4-6 Inductie in de geleider



Figuur 4-7 Verloop van de inductie in functie van de afstand tot de geleider

Figuur 4-7 toont het verloop van de inductie in functie van de afstand tot de geleider. De grafiek wordt uitgezet in overeenstemming met de stroomzin. Pas hiervoor de rechterhandregel toe.

De berekening van de inductie in en rond een geleider is vooral belangrijk wanneer men de krachtwerking beschouwt tussen parallel geleiders. Immers, een tweede stroomvoerende geleider ingebracht in het veld van de eerste ondervindt een Lorentzkracht  $F = Bi l$  waarin  $B$  de inductie is op een afstand gelijk aan de afstand tussen de parallelgeleiders. Denken we hierbij aan kabels, waar de onderlinge afstand klein wordt en vergelijkbaar met de diameter van de geleiders. In geval van kortsluitstromen kan de kracht vrij hoog oplopen. Ook spoelen, waarbij de windingen onderling evenwijdig zijn aan elkaar kunnen sterke kortsluitkrachten ondervinden.

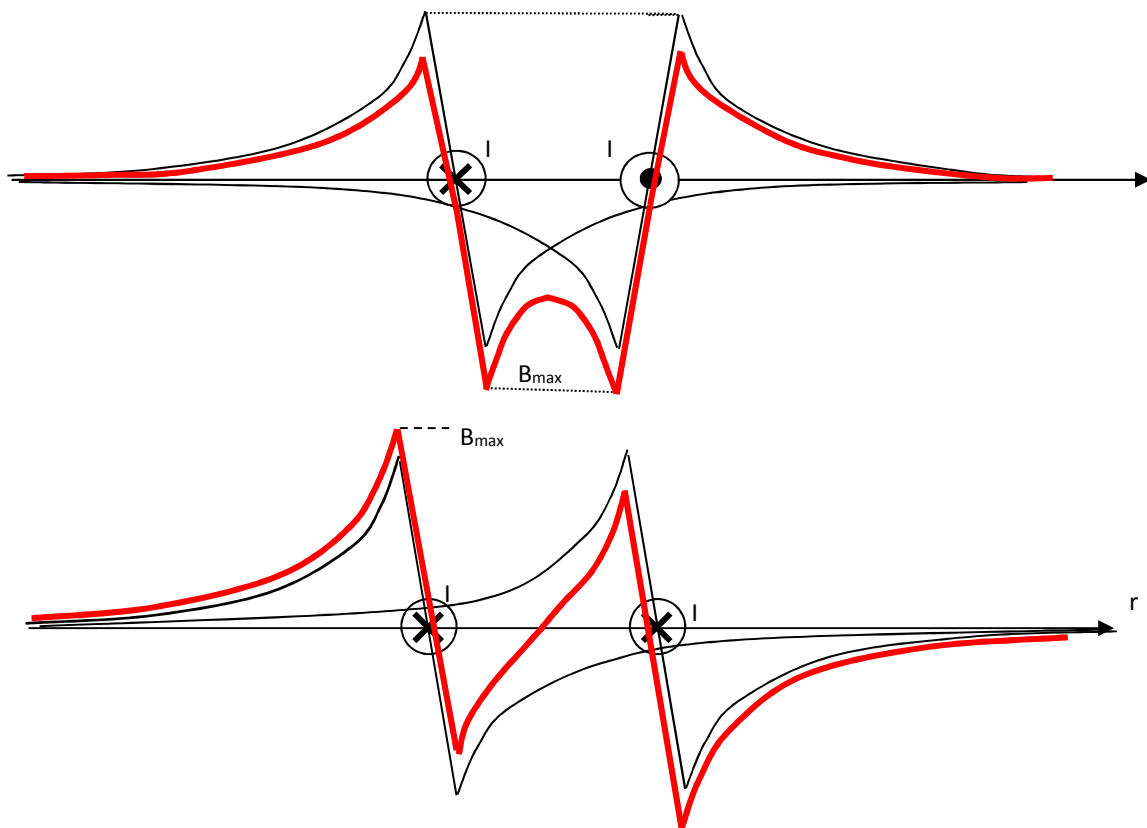
#### 4.3.4. Het magnetisch veld rond parallel geleiders.

Het verloop van het veld van dergelijke opstelling wordt gevonden door de afzonderlijke velden van beide geleiders **vectorieel** op te tellen!

Zij in een willekeurig punt P,  $\underline{B}_1$  en  $\underline{B}_2$ , de inductiecomponenten veroorzaakt door elke geleider afzonderlijk, dan geldt:

$$\overline{B}_{tot} = \overline{B}_1 + \overline{B}_2$$

Beperkt men zich tot het bepalen van de inductie in het vlak dat door de aslijnen van beide geleiders gaat, dan kan men de deelvelden algebraïsch optellen. Bijgaande figuren tonen aan hoe het resulterend veld kan worden bepaald voor tegengestelde en gelijke stroomrichting.



Figuur 4-8 Magnetisch veld rond parallel geleiders

### 4.3.5. Het magnetisch veld in en rond een coaxiaalgeleider geleider.

Een coaxiaalgeleider bestaat uit een centrale geleider met daarrond een tweede holle geleider.

Het magnetisch veld dat wordt gevormd kan als een superpositie beschouwd worden van het magnetisch veld ten gevolge van de centrale geleider enerzijds en de holle geleider anderzijds.

Voor de volle geleider verwijzen we naar voorgaande paragraaf.

Beschouwen we een holle geleider.

Het veld buiten de holle geleider laat zich op analoge manier als bij de volle geleider bepalen:

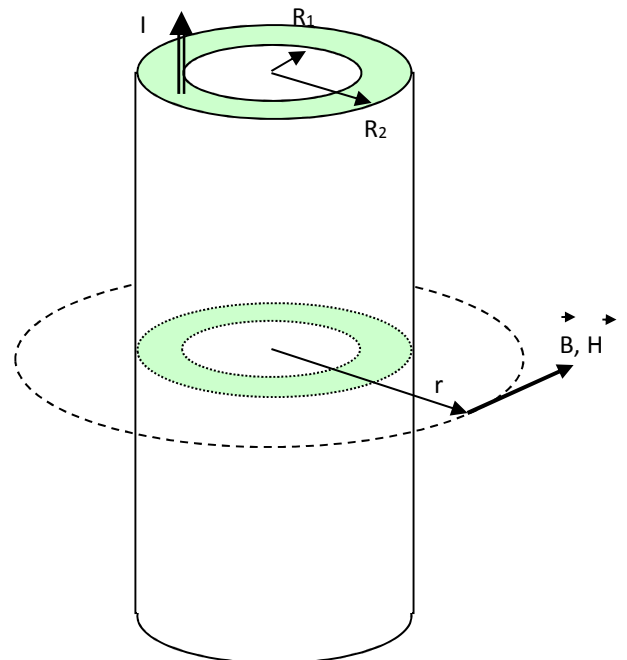
$$H = \frac{I}{2\pi r} \text{ en}$$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Het veld is omgekeerd evenredig met de afstand tot de geleider. Naar de geleider toe stijgt de inductie om een maximum te bereiken aan de rand van de geleider:

$$B_{\max} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R_2}$$

Binnen de geleider,  $R_1 < r < R_2$ :



Figuur 4-9 Veld buiten een holle geleider

We passen de wet van Maxwell-Ampère toe langs een cirkel met straal r:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \theta$$

$$\oint H dl = H \oint dl = H 2\pi r = I' = I \frac{\pi r^2 - \pi R_1^2}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}$$

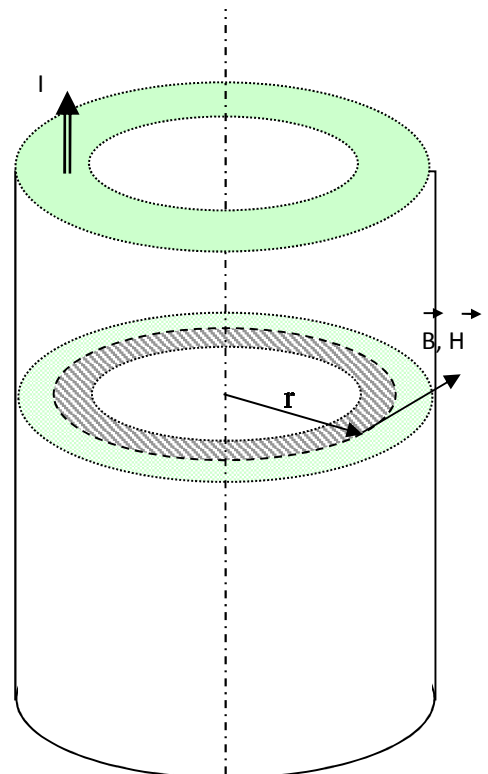
Hieruit volgt:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

Voor  $r = R_2$  wordt opnieuw  $B_{\max} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R_2}$

Voor  $r = R_1$  wordt  $B = 0$



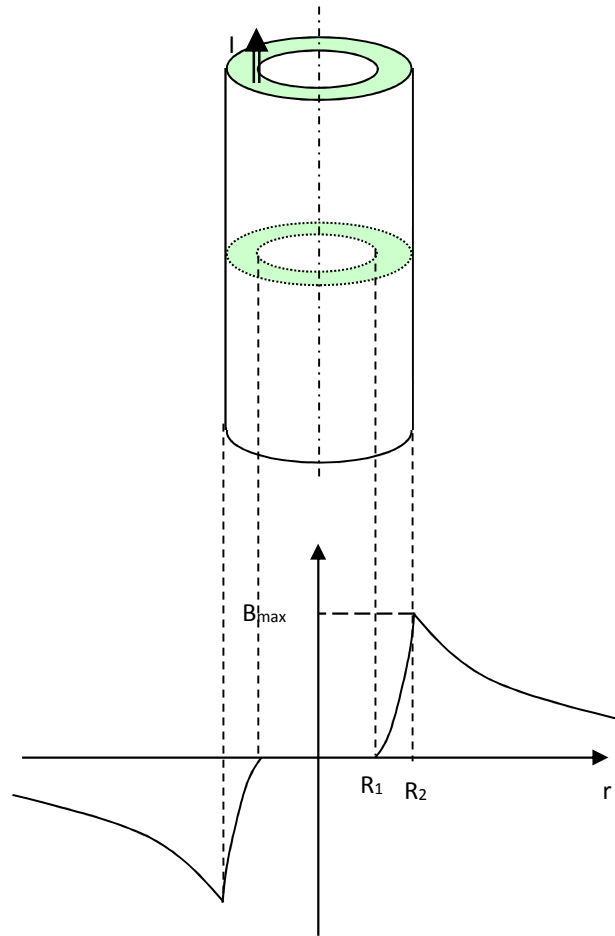
Figuur 4-10 Veld binnen een holle geleider



Voor waarden van  $r$  kleiner dan  $R_1$  blijft de inductie nul.

Bijgaande figuur toont het verloop van de inductie.

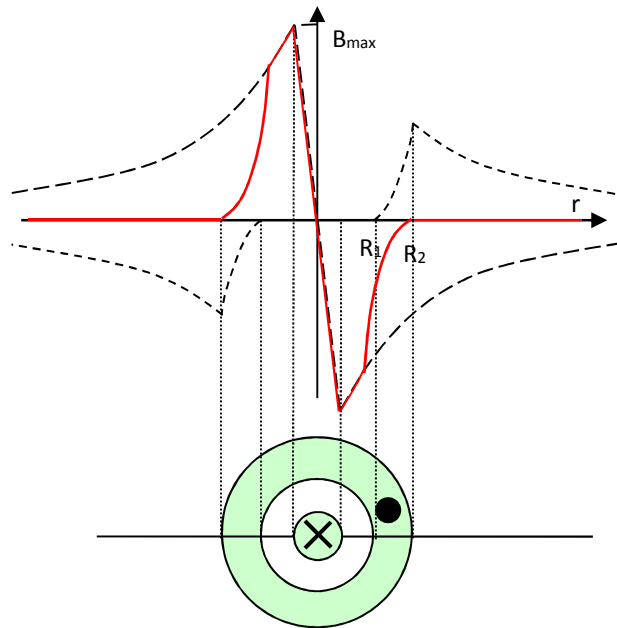
Bemerk dat in de grafiek ervan wordt uitgegaan dat de stroom in de holle geleider naar ons toe gericht is.



Figuur 4-11 Inductie in en buiten een holle geleider

*Het magnetisch veld in en rond een coaxiaalgeleider.*

De coaxiaalgeleider beschouwen we als de superpositie van een volle en holle geleider, waarvan de stroomzinnen tegengesteld zijn. Teneinde het verloop af te leiden wordt het inductieverloop voor een volle en holle geleider in één grafiek onder gebracht.



Figuur 4-12 Inductieverloop bij een coaxgeleider

Belangrijke vaststelling is dat **het magnetisch veld buiten de coaxiaalgeleider nul** is. Stroomen in een coaxiaalgeleider gaan dan ook **geen stoorvelden** veroorzaken!

Omgekeerd zullen we aantonen dat uitwendige magnetische velden geen stoorspanningen induceren in de geleider.

Om die reden maakt men bij metingen (vooral bij hoogfrequente signalen) gebruik van coaxiaalgeleiders. Zie laboproeven rond het gebruik van de oscilloscoop.



Figuur 4-13 Coaxkabel

## 5. De magnetische flux.

### 5.1. Definitie:

Beschouwen we een homogeen magnetisch veld  $B$ .

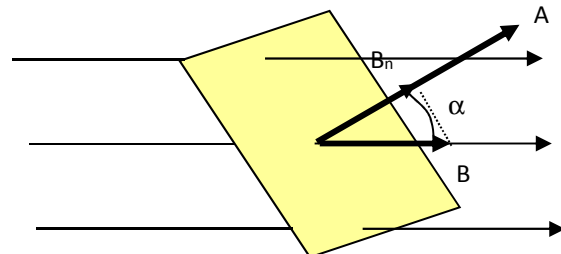
Onder magnetische flux  $\Phi$  verstaan we de hoeveelheid magnetisch veld door een bepaald oppervlak  $A$  en is gelijk aan:

$$\Phi = B A \cos \alpha = B_n A$$

Hierin is  $B_n$  de normaalcomponent van de inductie.

Vectoriëel kunnen we schrijven:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$$



Figuur 5-1 Flux in een homogeen veld

Indien het veld niet homogeen is dan bepaalt men de bijdrage  $d\Phi$  van het vlakje  $dA$ , dat zo klein is dat men de inductie over dit gebiedje als constant mag aanzien. Dan geldt hiervoor:

$$d\Phi = B dA \cos \alpha = \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

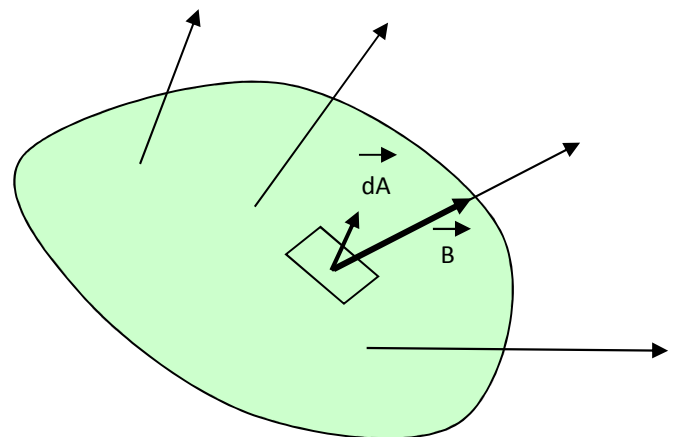
De totale magnetische flux wordt dan gevonden via de oppervlakte integraal:

$$\Phi = \iint_A B dA \cos \alpha = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Opmerking:

Als we kunnen, kiezen we altijd de vector  $d\vec{A}$  in dezelfde richting als  $\vec{B}$ .

Enkel als het oppervlakje  $dA$  deel uitmaakt van een gesloten oppervlak, dan geldt dat je verplicht bent altijd de vector  $d\vec{A}$  naar buiten te laten wijzen.



Figuur 5-2 Flux in een niet homogeen veld

Dimensie:

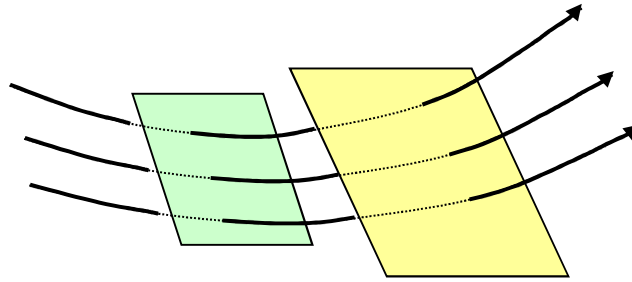
$$[\Phi] = [B][A] = T m^2 = Wb \text{ Weber}$$

Omgekeerd volgt hieruit dat de dimensie van de inductie dikwijls als  $Wb / m^2$  in plaats van Tesla T gebruikt wordt.

Opmerking:

Met gaat het magnetisch veld gaan voorstellen door een aantal veldlijnen, waarbij de dichtheid meestal evenredig met de inductie genomen wordt. De inductie is dan gelinkt aan een aantal veldlijnen per oppervlakte eenheid.

De flux is per definitie de inductie maal het oppervlak. Met andere woorden kunnen we ook stellen dat de flux kan uitgedrukt worden als het aantal veldlijnen dat door een oppervlak trekt. Worden twee oppervlakten doortrokken door dezelfde veldlijnen, dan kunnen we direct besluiten dat deze dezelfde flux omsluiten.



Figuur 5-3 Flux bij 2 oppervlakten doortrokken door dezelfde veldlijnen

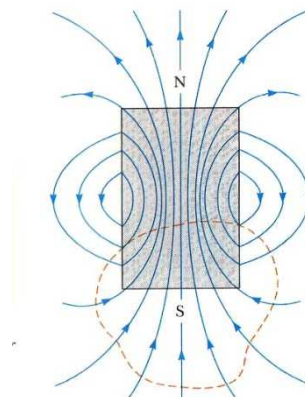
## 5.2. Wet van Gauss in magnetisme – 2<sup>o</sup> hoofdstelling

Bij het elektrostatisch veld werd afgeleid dat de totale flux door een gesloten oppervlak gelijk was aan de omsloten ladingen. Hierbij geldt dat veldlijnen gekenmerkt worden door een begin en een eindpunt (bij resp. positieve negatieve lading)

Bij magnetische velden zijn veldlijnen gesloten lijnen. Ook geldt dat er geen sprake is van magnetische ladingen. Dit houdt dan ook in dat van zodra we een gesloten oppervlak beschouwen we direct kunnen stellen dat er evenveel veldlijnen zullen intreden als uit treden. Rekening houdend met de zin, is het dan eenvoudig in te zien dat de totale flux nul zal zijn.

Als voorbeeld nemen we het veldbeeld van een permanente magneet.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



Figuur 5-4 Totale flux over een gesloten oppervlak

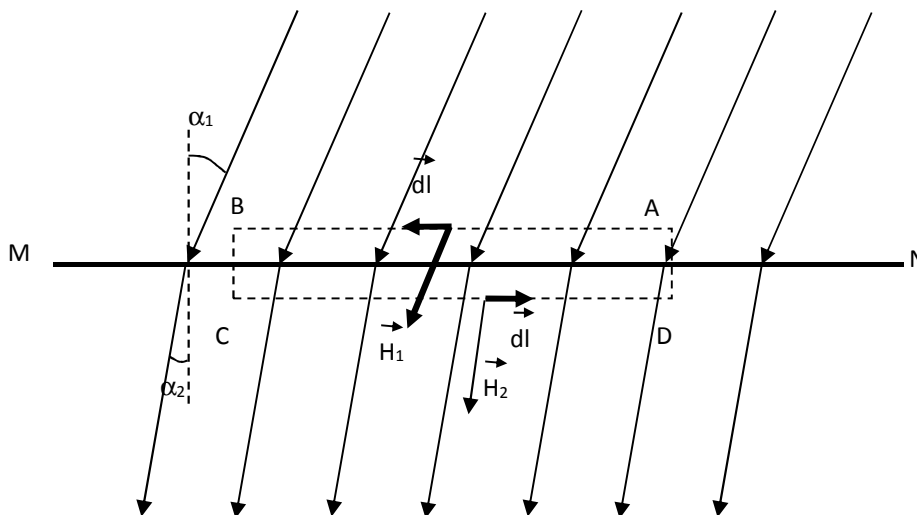
De wet van Gauss luidt dan ook "De totale magnetische flux of de oppervlakte integraal van de magnetische inductie over een gesloten oppervlak is gelijk nul"

### 5.3. Brekingswet van magnetische veldlijnen.

Beschouwen we de overgang van een magnetisch veld van een medium met bepaalde permeabiliteit  $\mu_1$  naar een medium met permeabiliteit  $\mu_2$ . De veldlijnen kennen een richtingsverandering: ze worden gebroken. De brekingswet stelt het verband op tussen de hoeken  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ .

*Verband tussen de veldsterkte  $H_1$  en  $H_2$ .*

De lijn MN vormt het scheidingsoppervlak. Langs het scheidingsoppervlak vloeien er geen stromen.



Figuur 5-5 Richtingsverandering van veldlijnen

We nemen een rechthoek ABCD, waarvan de opstaande zijden klein worden gekozen ten opzichte van de breedte. We passen de wet van Maxwell-Ampère toe langs deze rechthoek en vinden:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = (H_1 \sin \alpha_1 - H_2 \sin \alpha_2) AB = 0$$

Hieruit volgt het verband tussen de veldsterkten:

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2$$

met andere woorden de tangentiële component van de veldsterkte blijft bij overgang constant.

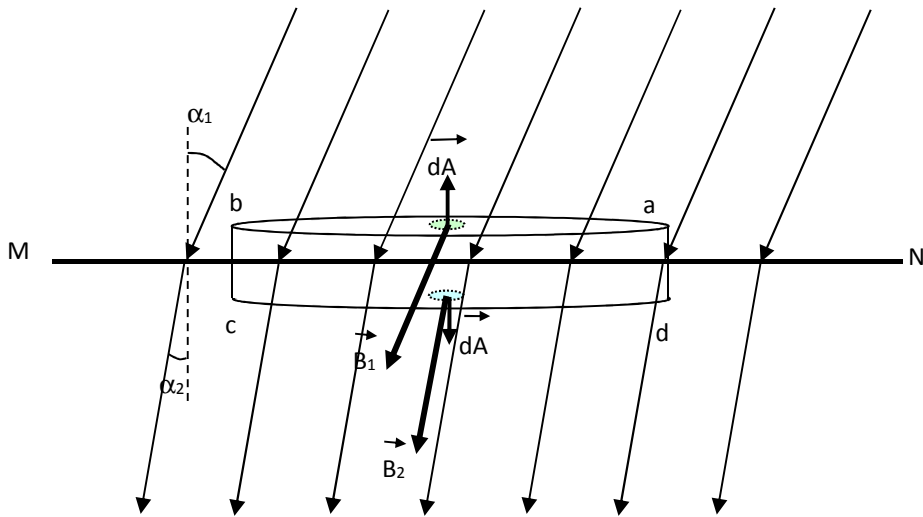
*Verband tussen de inductie  $B_1$  en  $B_2$ .*

Beschouwen we een balk met zeer geringe hoogte, zodat het zijdelings oppervlak verwaarloosbaar klein wordt ten opzichte van het boven- respectievelijk het benedenoppervlak. Passen we de wet van Gauss toe, dan geldt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = (B_2 \cos \alpha_2 - B_1 \cos \alpha_1) A = 0$$

Hieruit volgt dat de normaalcomponent van de inductie bij overgang constant blijft:

$$B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2$$



Figuur 5-6 Brekingswet bij een balk met geringe hoogte

*Brekingswet:*

Uit  $B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2$

en  $H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2$

volgt na deling van beide vergelijkingen met elkaar:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

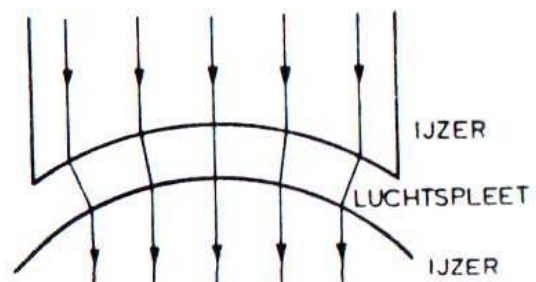
**Toepassing: overgang van magnetisch veld van ijzer naar lucht** (en omgekeerd)

Is het medium ijzer en het tweede lucht, dan geldt dat  $\mu_{r1}$  zeer groot is en  $\mu_{r2} = 1$ .

Hieruit volgt dat uitgaande van een bepaalde  $\alpha_1$  de waarde van  $\alpha_2 = 0$  wordt of:

*Bij overgang van ijzer naar lucht treedt het magnetisch veld loodrecht uit en omgekeerd, magnetische veldlijnen vallen loodrecht in op ijzer (ferromagnetisch materiaal).*

Ter illustratie toont Figuur 5-7 in een deel van een gelijkstroommotor de overgang van het veld van de pool naar het anker.



Figuur 5-7 Veldlijnen bij ijzer met luchtspleet



## 6. De magnetische inductie verschijnselen – Wet van Faraday Lenz

### 6.1. Definitie

*Elektromagnetisch inductie verschijnsel is het ontstaan van spanningen (en stromen) in spoelen ten gevolge van de variatie van de omsloten flux of in geleiders die zich bewegen in een magnetisch veld.*

Dit verschijnsel werd door Faraday (1831) ontdekt, waarbij hij de grootte van de geïnduceerde spanning vastlegde. Lenz bepaalde later de polariteit van de spanning en vervolledigde in die zin één van de belangrijkste wetten binnen de elektrotechniek.

### 6.2. Fluxvariatie in een gesloten winding / spoel

#### 6.2.1. vaststelling: Faraday

Indien de flux  $\Phi$  omsloten door een winding varieert, ontstaat in die winding een spanning waarvoor geldt:

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

Wordt de winding gesloten, dan vloeit er een stroom:

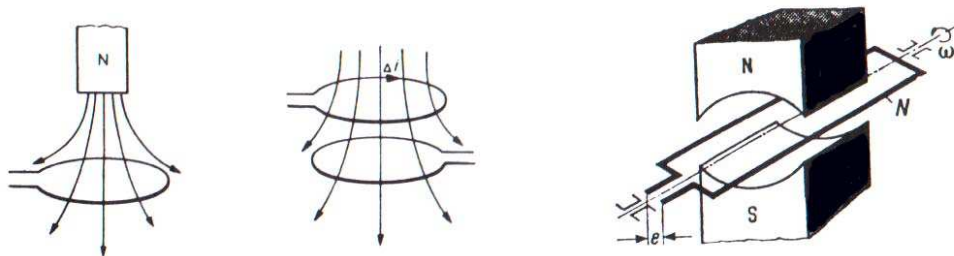
$$i = e / R$$

De fluxvariatie kan een gevolg zijn van:

- het bewegen van de winding in een veranderlijk magnetisch veld
- het veranderen van de sterkte B van het omsloten veld
- een stroomvariatie in de winding, waardoor het veld die de winding opwekt in de tijd varieert; we spreken van zelfinductie
- een stroomvariatie in een naburige winding die hierdoor een veranderlijk magnetisch veld opwekt wat door de eerste winding omsloten wordt; we spreken van wederzijdse inductie;

Wordt de winding een spoel, dan geldt dat de totale geïnduceerde spanning N maal groter wordt, met N het aantal windingen of:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt}$$



Figuur 6-1 Ontstaan van een geïnduceerde spanning

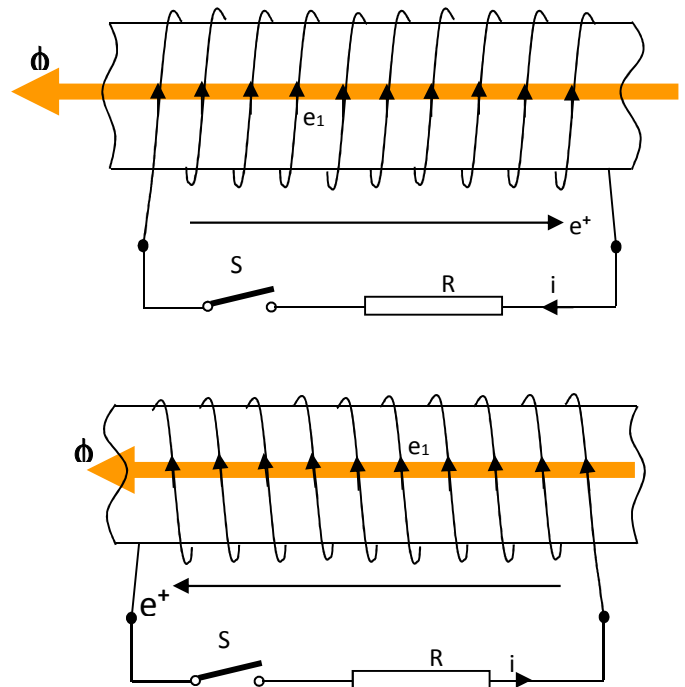
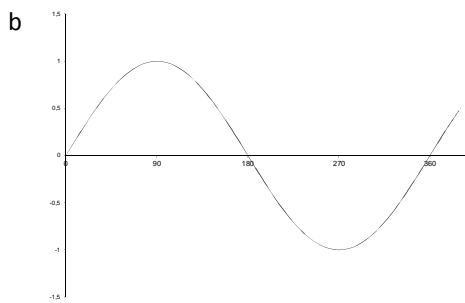


## 6.2.2. richting van de spanning: wet van Lenz

Wordt een spoel onderhevig gesteld aan een variabel magnetisch veld, dan ontstaat een inductie spanning:

$$e = N e_1 = - N \frac{d\phi}{dt}$$

Hierbij is  $\phi = b A$ , met  $b$  de veranderlijke inductie van een uitwendig aangelegd magnetisch veld.



Figuur 6-2 Inductie bij een variabel magnetisch veld

Bemerk dat hierbij de inductie  $b$  en dan ook de flux  $\phi$  zowel positieve als negatieve waarden kan aannemen. Uitgaande van de positieve richting van de flux wordt met de rechterhandregel de positieve richting van de geïnduceerde spanning per winding bepaald. Daarna sommeren zich al deze spanningen  $e_1$  tot de totale spanning  $e^+$ .

Het is hierbij belangrijk op te merken dat de richting afhankelijk is van de wikkelzin van de spoel.

Dat de polariteit van de spanning zodanig is dat deze de oorzaak van ontstaan tegenwerkt en dus voldoet aan de wet van Lenz, laat zich gemakkelijk afleiden door diverse tijdstippen in beschouwing te nemen. Bij sluiten van de schakelaar  $S$  zal telkens een stroom vloeien die op zijn beurt een veld opwekt dat de variatie van het hoofdveld tegenwerkt. Ga dit na.

## 6.3. Wet van Maxwell Faraday

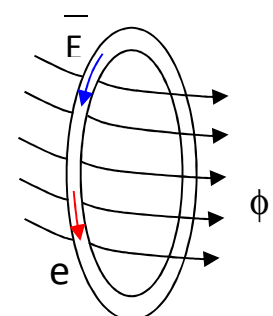
Het ontstaan van een stroom  $i$  in de winding is uiteindelijk een gevolg van een elektrisch veldsterkte  $E$  binnen de geleider.

Hierbij geldt dat de geïnduceerde spanning  $e$  binnen de geleider gelijk is aan:

$$e = E \cdot l$$

met  $l$  de lengte van de winding, of algemeen:

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Figuur 6-3 Spanning  $e$  binnen een geleider

Daar anderzijds  $e = - d\phi/dt$ , volgt hieruit de wet van Maxwell Faraday :  
 Ook indien er geen winding aanwezig is ontstaat in de ruimte een elektrisch veld

$$-\frac{d\phi_B}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Een elektrisch veld ontstaat telkens bij een variatie van een magnetisch veld, zelfs al zijn er geen ladingsdragers.

Elektrische velden gaan (quasi) altijd samen met magnetische velden.

### 6.4. Bewegende geleider in een magnetisch veld.

Beweegt een geleider zich in een magnetisch veld, dan ontstaat een geïnduceerde spanning:

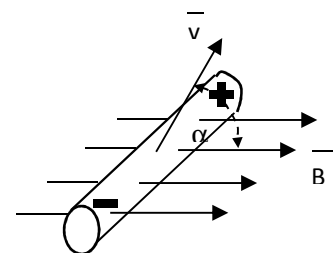
$$e = B l v \sin\alpha$$

waarin: B de inductie

l de actieve lengte of dat gedeelte van de geleider dat veldlijnen snijdt

v de snelheid van de geleider

$\alpha$  de verplaatsingshoek tov het magnetisch veld.



Figuur 6-4 Spanning bij een bewegende geleider in magnetisch veld

De zin of polariteit van de emk wordt gevonden met de regel van de rechterhand: “ met de handpalm de veldlijnen opvangen, de duim volgens de beweging, de vingers geven de richting van de spanning”.

Daar de emk uiteindelijk ook een gerichte grootheid is, kunnen we deze als een vector voorstellen en is voorgaande vergelijking vectorieel te noteren als:

$$\vec{e} = l(\vec{v} * \vec{B})$$

Steunend op de wet van Lorentz kan men dit verschijnsel gemakkelijk verklaren.

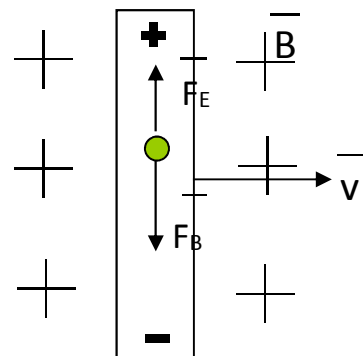
Binnen de geleider bevinden er zich ladingsdragers (elektronen). Bij het bewegen van de geleider, gaan dus ook deze ladingsdragers met een snelheid v bewegen. Hierdoor ontstaat een kracht:

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} * \vec{B}) = -q_e (\vec{v} * \vec{B})$$

De elektronen worden naar het uiteinde van de geleider gedreven.

Hierdoor ontstaat een terugstelkracht  $F_E$  ten gevolge van een elektrisch veld.

Naarmate er meer elektronen zich verplaatsen, hoe groter het elektrisch veld en dus ook een grotere spanning. Er ontstaat een evenwicht bij gelijkheid van krachten:



Figuur 6-5 Verklaring van het ontstaan van e

$$-q_e \bar{E} = -q_e (\bar{v} * \bar{B})$$

waaruit de grootte  $E = v B \sin \alpha$  volgt.

Nu geldt dat de spanning

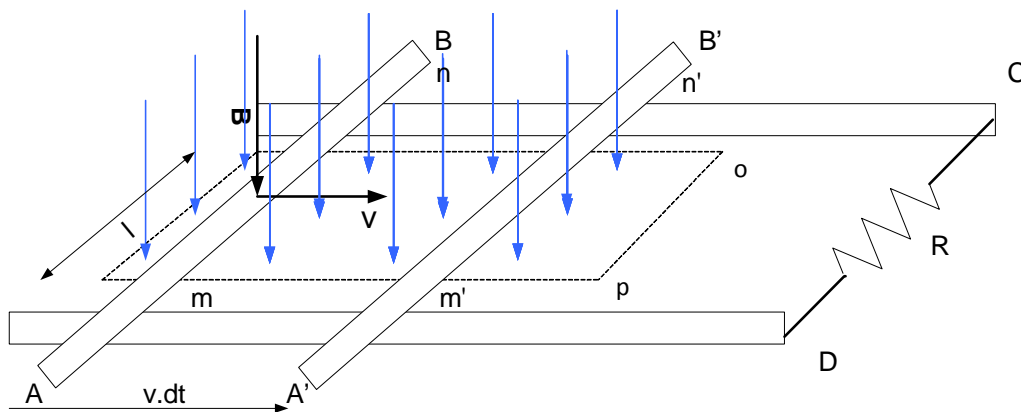
$$U = E l$$

of

$$U = B l v \sin \alpha$$

Dat deze wet ook te herleiden valt naar een toepassing van de algemene wet blijkt uit het volgende. Sluit men de geleider AB aan een weerstand, dan vormt men in principe een gesloten winding .

In de kring ABCD is de omsloten flux:



Figuur 6-6 Ontstaan e bij gesloten winding

$$\Phi = (mnop) B$$

Verplaatst de geleider zich naar rechts met snelheid  $v$ , dan is de fluxvariatie na  $dt$  sec.:

$$d\Phi = -(mnn'm') B = -Blv dt$$

Waaruit:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

Volgens de wet van Faraday is:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = Blv$$

De positieve omloopzin vindt men door toepassen van de rechterhandregel. Daar  $d\Phi/dt$  negatief is, betekent dit dat de spanning gericht is volgens de omloopzin, dus van A naar B. Dit is in overeenstemming met wat we in 6.4 vastgesteld hebben. Deze spanning doet een stroom ontstaan die probeert de fluxdaling te compenseren. Tevens ontstaat een Lorentzkracht tegengesteld aan de beweging. Ga dit na!

## 6.5. Draaiende rechthoekige spoel in een magnetisch veld.

Een rechthoekige spoel wordt draaibaar om zijn lengteas opgesteld in een homogeen magnetisch veld met inductie  $B$ .

De omsloten flux zal in de tijd variëren waardoor een wisselspanning wordt geïnduceerd in de spoel. In bijgaande figuur kan men in functie van de stand van de spoel ten opzichte van het veld nagaan wat de ogenblikkelijke spanning is. Bemerkt dat de grootste fluxverandering ontstaat wanneer de spoel horizontaal staat (volgens de poollijn) en omsloten flux nul is: dan is de spanning maximaal. De kleinste fluxverandering krijgt men wanneer de spoel vertikaal staat en de maximale flux omsluit.

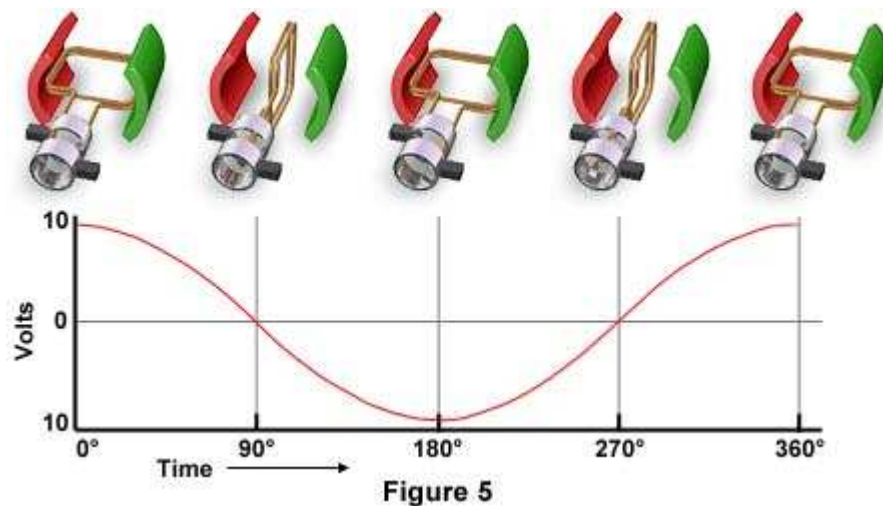


Figure 6-7 Verloop  $e$  bij een draaiende spoel in een magnetisch veld

Aan de hand van de BLV regel komt men eveneens tot hetzelfde besluit (ga dit na).

De uitdrukking van de spanning kunnen we afleiden uitgaande van de algemene wet van Faraday-Lenz of van de BLV regel.

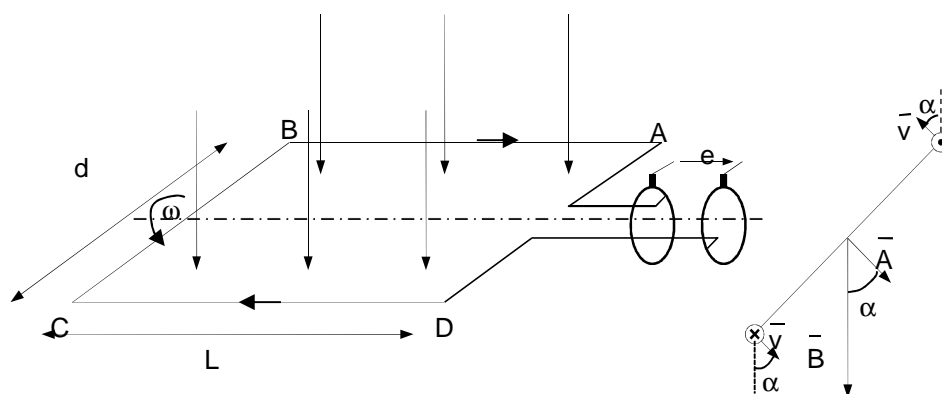


Figure 6-8 Verduidelijking afleiding van de spanning  $e$

De omsloten flux wordt:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B A \cos \alpha = B A \cos \omega t$$

Dan wordt de opgewekte spanning:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} = -N B A \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = N B A \omega \sin \omega t$$

De maximum spanning of de amplitude wordt:

$$E_{\max} = N B A \omega$$

De opgewekte spanning varieert sinusoidaal en wordt via twee sleepringen en borstels afgetakt.

De uitdrukking kan ook worden afgeleid door uit te gaan van de BLV regel.

In de twee spoelzijden wordt een spanning opgewekt. De richting leiden we af met de rechterhandregel.

Bemerk dat de twee spanningen zich optellen bij elkaar.

In spoelzijde CD:

$$\vec{e}_{CD} = N l (\vec{v} * \vec{B})$$

$$e_{CD} = N B l v \sin \alpha = N B l v \sin \omega t$$

In de spoelzijde AD geldt analoog:

$$\vec{e}_{AD} = N l (\vec{v} * \vec{B})$$

$$e_{AD} = N B l v \sin(\pi - \alpha) = N B l v \sin \omega t$$

De totale spanning wordt uiteindelijk:

$$e = e_{AB} + e_{CD} = 2 N B l v \sin \omega t = E_{\max} \sin \omega t$$

De omtreksnelheid kan geschreven worden als:

$$v = \omega r = \omega \frac{d}{2}$$

Dan wordt terug:

$$E_{\max} = 2 N B l v = 2 N B l \omega \frac{d}{2} = N B A \omega$$

In de spoelzijde BC en AD wordt geen spanning opgewekt (waarom).

Voorbeeld:

Een spoel met 40 rechthoekige windingen met 16cm breedte en 25 cm actieve lengte draait met een snelheid van 1200 omwentelingen per minuut rond zijn lengteas en loodrecht op de krachtlijnen van een uniform magnetische veld met een inductie 0,3T. Bereken de maximale waarde van de geïnduceerde spanning. (60,3V)

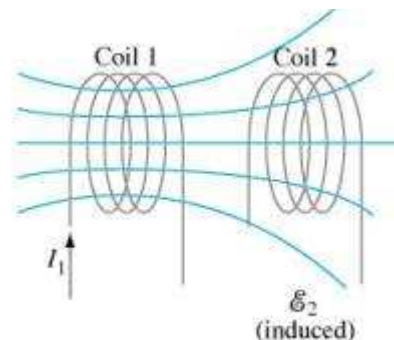
## 7. Zelfinductie, wederzijdse inductie

### 7.1. Inleiding.

Wanneer een magnetische flux in een spoel varieert, dan wordt daarin een spanning geïnduceerd.

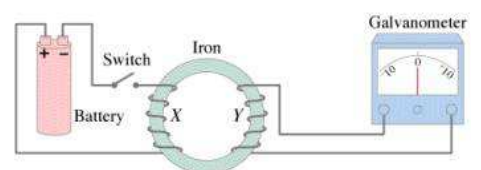
Anderzijds geldt ook dat een stroom in een spoel een magnetisch veld opwekt.

Combineren we nu twee spoelen, waarbij in één spoel een variabele stroom  $i_1$  vloeit, dan wekt spoel 1 een variabele flux op welke gedeeltelijk door spoel twee wordt omsloten. Hier wordt dan ook een spanning in opgewekt.



Omgekeerd, stel dat in spoel 2 een variabele stroom  $i_2$  vloeit, dan gaat die ook een variabele flux opwekken, door spoel één gedeeltelijk omsloten. Hierin wordt dan eveneens een spanning in geïnduceerd.

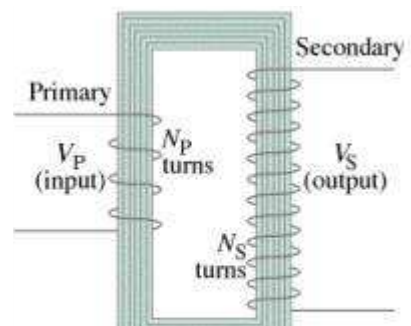
De twee spoelen gaan elkaar wederzijds gaan beïnvloeden. We spreken van wederzijdse inductie, respectievelijk wederzijdse inductiespanningen.



Op dit principe berust de werking van een transformator.

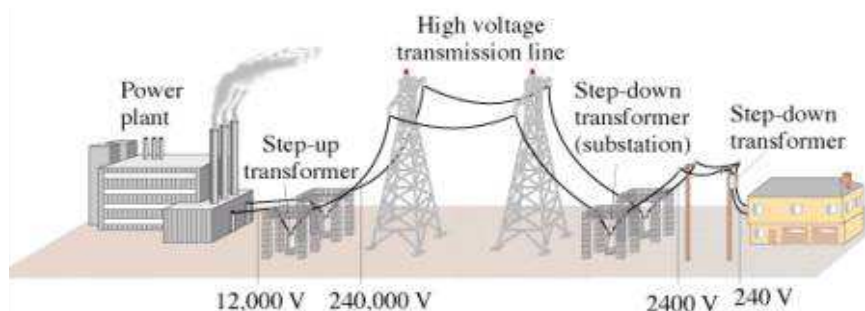
Een primaire spoel wordt aan een wisselspanning  $U_P$  gelegd. Door het wisselend magnetisch veld door deze primaire opgewekt, wordt in een tweede spoel, de secundaire, een spanning  $U_S$  opgewekt. Wordt aangetoond dat:

$$\frac{U_P}{U_S} = \frac{N_P}{N_S}$$



Figuur 7-1 Wederzijdse inductie

In het kader van energieoverdracht spelen transformatoren een belangrijke rol. Immers, met  $P = U \cdot I$  geldt dat hoe groter  $U$ , des te kleiner  $I$ . Verder geldt  $P = U_P \cdot I_P = U_S \cdot I_S$  (in de veronderstelling dat de verliezen in de transformator nul zijn) wat neerkomt dat bij het overgaan naar grotere spanningen, de stromen in dezelfde verhouding dalen.



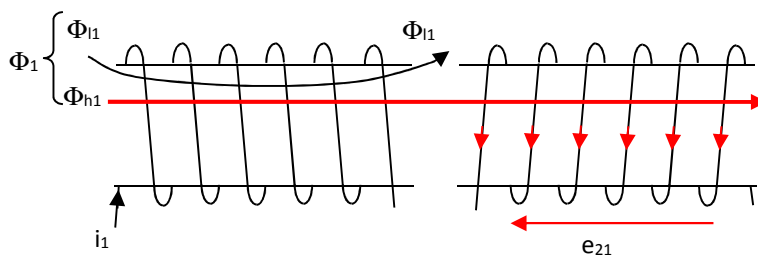
Figuur 7-2 Energieoverdracht

Grotere transportspanningen betekenen kleinere lijnstromen en dus ook kleinere lijnverliezen!

## 7.2. Wederzijdse inductie

### 7.2.1. definitie

We gaan uit van twee spoelen waarvan het magnetisch veld opgewekt door de spoelen gedeeltelijk door de andere spoel wordt omsloten. Eenvoudigheidshalve nemen we aanvankelijk aan dat alleen spoel 1 doorlopen wordt door stroom  $i_1$ .



Figuur 7-3 Wederzijdse inductie t.g.v. stroom in spoel 1

Ten gevolge van de variabele stroom  $i_1$  ontstaat een variabele flux  $\Phi_1$ , waarvan de hoofdflux  $\Phi_{h1}$  door spoel 2 omsloten wordt, terwijl de lekflux  $\Phi_{l1}$  zich rechtstreeks sluit door de lucht.

Uitgaande van de positieve stroomrichting  $i_1$  leidt men de positieve fluxrichting af.

De variabele hoofdflux  $\Phi_{h1}$  wekt in spoel twee een inductiespanning, de **wederzijdse inductiespanning**  $e_{21}$ , op:

$$e_{21} = -N_2 \frac{d\phi_{h1}}{dt}$$

Met behulp van de regel van de rechterhand leiden we de positieve richting af van de inductiespanningen in elke winding. Daarna bekomen we door sommatie de totale inductiespanning  $e_{21}$  (Ga na!!)

Daar  $e_{21}$  uiteindelijk wordt opgewekt door de stroom  $i_1$ , is het duidelijk dat men die spanning gaat noteren in functie van de stroom  $i_1$ .

Anderzijds kunnen we stellen dat  $\Phi_1$  en dus ook  $\Phi_{h1}$  evenredig zijn met  $i_1$ . We noteren:

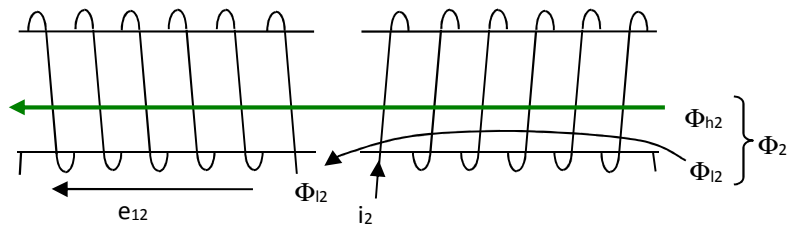
$$N_2 \Phi_{h1} = M_{21} i_1.$$

$N_2 \Phi_{h1}$  noemen we de **gekoppelde spoelenflux of fluxomwindingen**, de evenredigheidsfactor  $M_{21}$  vormt de **wederzijdse inductiecoëfficiënt**.

De uitdrukking van de wederzijdse inductiespanning wordt aldus:

$$e_{21} = -N_2 \frac{d\phi_{h1}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Omgekeerd, vloeit een variabele stroom  $i_2$  door spoel 2, dan gaat een variabele flux  $\Phi_2$  ontstaan, waarvan het gedeelte de hoofdflux  $\Phi_{h2}$  door spoel 1 omsloten wordt.



Figuur 7-4 Wederzijdse inductie t.g.v. stroom in spoel 2

$\Phi_{12}$  vormt de lekflux.

Door de flux  $\Phi_{h2}$  wordt in spoel 1 een spanning opgewekt, de wederzijdse inductiespanning  $e_{12}$ :

$$e_{12} = -N_1 \frac{d\phi_{h2}}{dt}$$

Opnieuw wordt deze spanning genoteerd in functie van de uiteindelijke oorzaak, de stroom  $i_2$ :

$$N_1 \Phi_{h2} = M_{12} i_2$$

De uitdrukking van de wederzijdse inductiespanning  $e_{12}$  wordt aldus:

$$e_{12} = -N_1 \frac{d\phi_{h2}}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Men toont aan dat de wederzijdse inductiecoëfficiënten gelijk zijn aan elkaar of:

$$M_{21} = M_{12} = M.$$

De stromen  $i_1$  en  $i_2$  kunnen tegelijkertijd vloeien. Dan ontstaan ook de inductiespanningen  $e_{12}$  en  $e_{21}$  tezelfdertijd. Op het zelfde moment gaan de spoelen elkaar beïnvloeden. Wel degelijk is er een “wederzijdse beïnvloeding” of wederzijdse inductiespanning. Dit is typisch wat er gebeurt in een transformator. De primaire en secundaire spoel gaan op hetzelfde moment zodanig elkaar beïnvloeden dat de globale flux in de kern onveranderlijk blijft.

Stijgt de stroom  $i_2$  in de secundaire, dan zal door de wederzijdse inductie de stroom  $i_1$  stijgen en ervoor zorgen dat de toenemende secundaire flux door een toenemende primaire flux gecompenseerd wordt, waardoor de resulterende flux gelijk blijft. Zie verder in de cursus transformatoren.

### 7.2.2. Dimensie van de wederzijdse inductiecoëfficiënt $M$ .

Uit de vergelijking van de wederzijdse inductiespanning volgt direct af te leiden:

$$[M] = \frac{[e][t]}{[i]} = \frac{V \text{ sec}}{A} = H \text{ Henry}$$

### 7.2.3. Zin van de wederzijdse inductiespanningen.

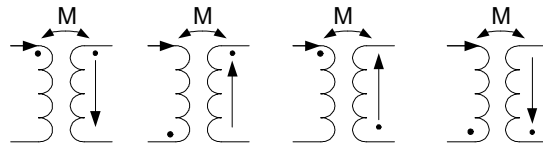
De positieve richting van de inductiespanningen zijn afhankelijk van de wikkelzin van de spoelen 1 en 2. (ga na). Dit zou betekenen dat men verplicht is de wikkelzin op te geven of te tekenen. Bij gebruik van de symbolische voorstelling van de spoelen wordt echter gewerkt met stippen, om uitgaande van de stromen  $i_1$  en  $i_2$  de emk richtingen af te leiden.



De regel:

- vloeit de positieve stroom  $i_1$  binnen langs de stip, dan ontstaat in de andere spoel een wederzijdse inductiespanning  $e_{21}$  gericht weg van de stip.
- vloeit de positieve stroom  $i_1$  weg van de spoel langs de stip, dan ontstaat in de andere spoel een wederzijdse inductiespanning  $e_{21}$  gericht naar de stip.

Figuur 7-5 geeft de diverse mogelijkheden weer.



Figuur 7-5 Weergave zin van de wederzijdse inductiespanningen

In de figuur wordt de wederzijdse inductie in de rechter spoel opgegeven ten gevolge van een stroomverandering in de linker spoel.

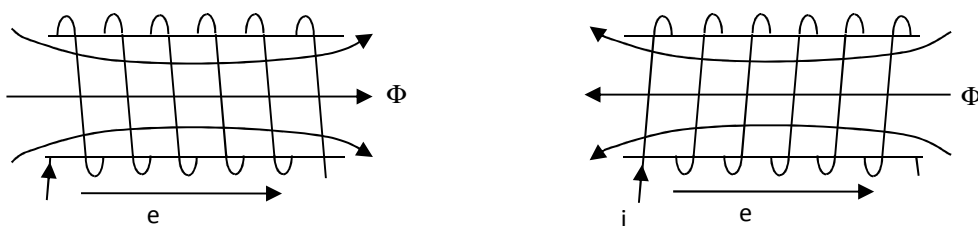
Nota: breng in Figuur 7-3 en Figuur 7-4 stippen aan, zodat naar de symbolische voorstelling van de spoelen kan overgestapt worden.

Men toont eveneens eenvoudig aan dat indien de beide spoelen tezelfdertijd onderhevig worden gesteld aan dezelfde variabele flux, de kant van de spoelen aangeduid door de stippen dezelfde polariteit kennen (ga dit na).

## 7.3. Zelfinductie

### 7.3.1. Definitie.

Gaan we uit van een enkelvoudige spoel met N windingen.



Figuur 7-6 Principe zelfinductie

Wordt een spoel doorlopen door een variabele stroom  $i$ , dan ontstaat een variabele flux  $\Phi$ . Deze gaat op zijn beurt een spanning induceren waarvoor geldt:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt}$$

Daar deze spanning wordt opgewekt door de eigen stroom of de eigen flux  $\Phi$ , noemt men deze spanning **de zelfinductiespanning**. Het is duidelijk dat deze opnieuw wordt geschreven in functie van de uiteindelijke oorzaak van ontstaan, de stroom  $i$ , door invoering van de zelfinductiecoëfficiënt  $L$ :

$$N \Phi = L i$$

of:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

De zelfinductiecoëfficiënt  $L$  is hierin de verhouding van het aantal fluxomwindingen  $N\Phi$  tot de stroom  $i$ .

### 7.3.2. Dimensie.

Uit de uitdrukking van de zelfinductiespanning volgt onmiddellijk:

$$[L] = \frac{[e][t]}{[i]} = \frac{V \text{ sec}}{A} = H \text{ Henry}$$

### 7.3.3. zin van de zelfinductiespanning;

Uit bijgaande figuur in vorige paragraaf leiden we af dat ongeacht de wikkelzin, de zelfinductiespanning telkens is gericht meegaand met de stroom. We kunnen dan ook in de symbolische voorstelling van de spoel de zelfinductiespanning direct noteren, meegaand met de stroom.



Figuur 7-7 Zin zelfinductiespanning

### 7.3.4. zelfinductiecoëfficiënt van een luchtspoel.

In paragraaf 4.3.2 werd de veldsterkte en inductie in een solenoïde afgeleid:

$$H = \frac{Ni}{l} \text{ en}$$

$$B_0 = \mu_0 \frac{Ni}{l}$$

De totale flux in de solenoïde wordt dan:

$$\phi = B_0 A = \mu_0 \frac{Ni}{l} A$$

Uit de definitie van de zelfinductiecoëfficiënt volgt:

$$L = \frac{N \phi}{i} = \frac{N^2 \mu_0 A}{l}$$

Belangrijk is te noteren dat de zelfinductiecoëfficiënt kwadratisch toeneemt met het aantal windingen. Deze uitdrukking werd afgeleid uitgaande van een solenoïde. In een solenoïde geldt dat de fluxlijnen evenwijdig verlopen en bijgevolg omsluit elke winding dezelfde flux  $\Phi$  of in elke winding ontstaat dezelfde spanning  $e_1$ .

In werkelijkheid geldt dit echter niet. Een gedeelte van het veld gaat reeds zijdelings de spoel verlaten, zodat de eindwindingen een kleinere flux omsluiten. Hierin is dan ook de geïnduceerde spanning kleiner in vergelijking met deze in de middelste windingen opgewekt.

We dienen dan ook een correctiefactor  $k$  in te voeren of:

$$L = k \frac{N \phi}{i} = k \frac{N^2 \mu_0 A}{l}$$

De correctiefactor  $k$  varieert tussen 0 en 1 en hangt af van de verhouding lengte  $l$  tot diameter  $d$  van de spoel. Naarmate de lengte groter wordt ten opzichte van de diameter, naarmate de factor  $k$  dichter bij 1 komt.

Bijgaande tabel toont de waarde van  $k$  in functie van  $d/l$ .

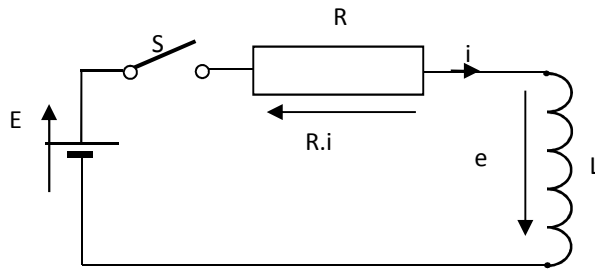
Tabel 7-1 Correctiefactor in functie van  $d/l$

$d/l$	$k$	$d/l$	$k$	$d/l$	$k$
0	1,000	1,0	0,688	3,5	0,394
0,1	0,959	1,1	0,667	4,0	0,365
0,2	0,920	1,2	0,648	4,5	0,341
0,3	0,884	1,4	0,611		
0,4	0,850	1,6	0,580	5,0	0,320
0,5	0,818	1,8	0,551	6,0	0,285
0,6	0,789	2,0	0,526	7,0	0,258
0,7	0,761			8,0	0,237
0,8	0,735	2,5	0,472	9,0	0,219
0,9	0,711	3,0	0,429	10,0	0,203

### 7.3.5. Inschakelen van een spoel op een DC bron.

In de praktijk geldt dat een spoel naast een zekere inductiecoëfficiënt of inductiviteit  $L$  eveneens een zekere weerstand  $R$  bezit. Dan geldt dat die spoel moet worden voorgesteld door een RL seriekring. Is de spoel in serie geschakeld met een weerstand, dan hebben we sowieso een RL kring.

Interessant is de in- en uitschakeling van een RL kring op een DC bron. Dit doet zich veelvuldig voor wanneer DC motoren worden ingeschakeld. Ook in elektronische schakelingen hebben we frequent te maken met inductieve kringen waarop een blokvormige spanning wordt aangeschakeld. Dergelijke spanning komt neer op een in- en uitschakelen van de kring op een DC spanning.



Figuur 7-8 RL seriekring

Bij het sluiten van de schakelaar S op  $t=0$  zal een stroom  $i$  slechts exponentieel stijgen ten gevolge van de zelfinductiespanning  $e$  in de spoel.

Bemerk dat het teken van deze zelfinductiespanning  $e$  uit:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

negatief is, of in de spoel ontstaat een spanning die belet dat de stroom onmiddellijk begint te vloeien. De stroom  $i$  zal slechts geleidelijk naar zijn eindwaarde  $i_0 = E/R$  overgaan.

Eenmaal die eindwaarde bereikt, wordt de stroom constant en geldt dat de inductiespanning  $e$  nul wordt; vanaf dat moment heeft de inductiviteit in de kring geen enkele invloed meer.

De spanningsvergelijking van de kring op een willekeurig ogenblik beschouwd, luidt:

$$E - Ri + e = 0$$

of

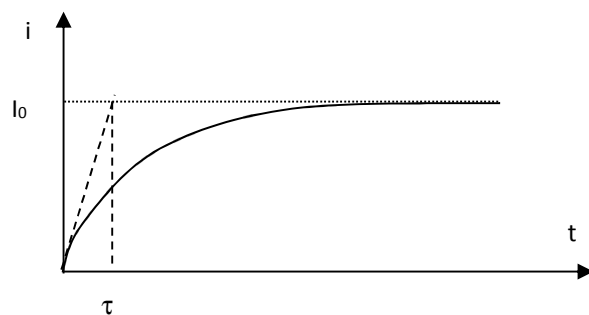
$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

De oplossing van deze spanningsdifferentiaalvergelijking luidt:

$$i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

met

$$I_0 = \frac{E}{R}$$



Figuur 7-9 Stroomverloop spoel bij inschakelen van de bron

De verhouding

$$\tau = \frac{L}{R}$$

wordt **de tijdconstante** van de kring genoemd. (ga na dat de dimensie van  $\tau$  seconde is)

Theoretisch geldt dat de stroom slechts na tijd oneindig de eindwaarde  $i_0$  bereikt. Praktisch geldt echter dat men aanneemt dat *de eindwaarde wordt bereikt na  $5\tau$* .

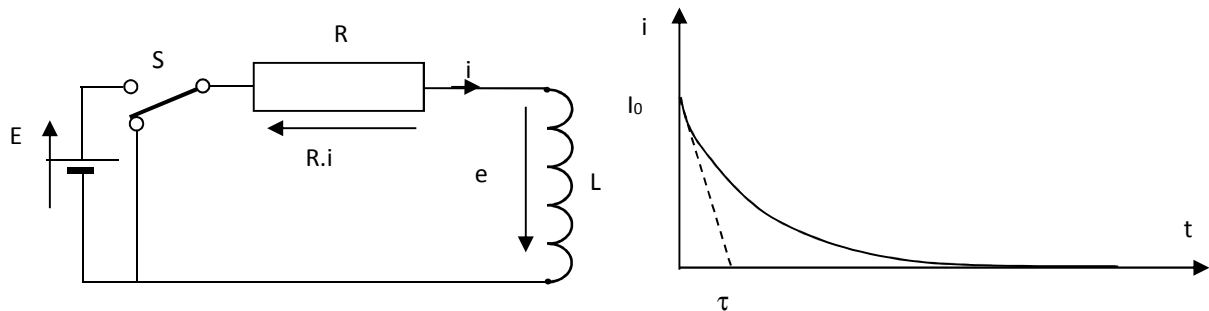
Bij uitschakelen van de spoel ontstaat opnieuw een stroomverandering. De stroom  $i$  wordt sowieso nul! Dit houdt in dat in de spoel opnieuw een inductiespanning zal ontstaan, die nu echter positief is, daar  $di/dt$  negatief is. De inductiespanning zal ervoor zorgen dat de stroom niet onmiddellijk nul wordt doch slechts exponentieel naar nul gaat.

Indien de uitschakeling gebeurt via een sluiting van de spoel op zichzelf, dan wordt de spanningsdifferentiaalvergelijking:

$$-Ri + e = 0$$

of

$$0 = Ri + L \frac{di}{dt}$$



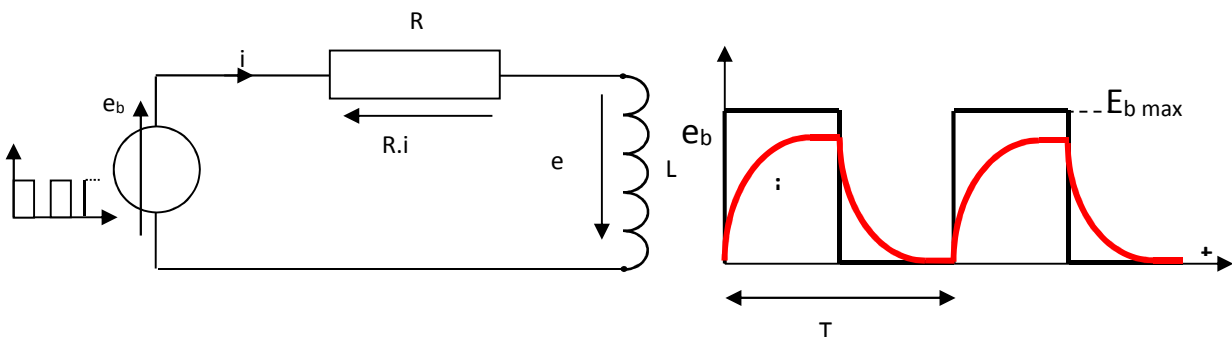
Figuur 7-10 Gedrag spoel bij het uitschakelen van de bron

De oplossing wordt:  $i = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$  met  $I_0 = \frac{E}{R}$

de beginwaarde van de stroom op het ogenblik van afschakeling.

Gaan we uit van een bron die een blokvormige spanning opwekt, dan hebben we opeenvolgend een stroom die exponentieel stijgt naar een waarde  $E_{b \max} / R$ , om daarna opnieuw te dalen naar nul.

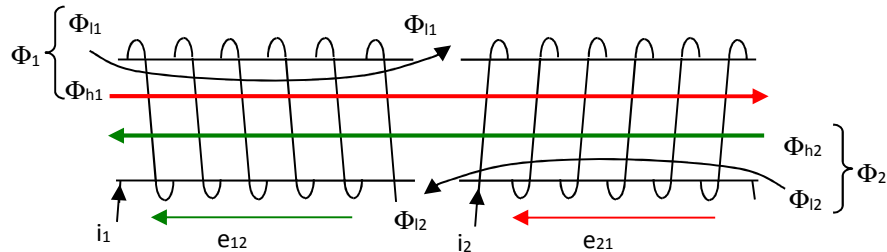
(Ga zelf na wat er gebeurt wanneer de periode  $T$  van het signaal vermindert)



Figuur 7-11 Gedrag spoel bij het aanleggen van een blok golf

## 7.4. Verband tussen wederzijdse inductie M en zelfinductie L.

In paragraaf 7.2 werd de wederzijdse inductie M gedefinieerd. Deze kan gedefinieerd worden in functie van de zelfinductiecoëfficiënten  $L_1$  en  $L_2$  van de spoelen.



Figuur 7-12 Wederzijdse inductie

De flux  $\Phi_1$  en  $\Phi_2$  kunnen we schrijven als:

$$\phi_1 = \phi_{h1} + \phi_{l1}$$

$$\phi_2 = \phi_{h2} + \phi_{l2}$$

Hoofd- en lekveld kunnen geschreven worden als een fractie van de totale flux:

$$\phi_{h1} = k_1 \phi_1 \quad ; \quad \phi_{l1} = \sigma_1 \phi_1 \quad ; \quad k_1 + \sigma_1 = 1$$

$$\phi_{h2} = k_2 \phi_2 \quad ; \quad \phi_{l2} = \sigma_2 \phi_2 \quad ; \quad k_2 + \sigma_2 = 1$$

$k_1$  en  $k_2$  vormen de partiële koppelfactoren;  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  de partiële strooicoëfficiënten.

De wederzijdse inductiecoëfficiënten werden gedefinieerd als:

$$M_{12} = \frac{N_1 \phi_{h2}}{i_2}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \phi_{h1}}{i_1}$$

Noteren we hierin de hoofdflex in functie van de totale flux:

$$M_{12} = \frac{N_1 \phi_{h2}}{i_2} = \frac{N_1 k_2 \phi_2}{i_2}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \phi_{h1}}{i_1} = \frac{N_2 k_1 \phi_1}{i_1}$$

Anderzijds werd in paragraaf 7.3 de zelfinductantie bepaald. Definiëren we nu deze voor elke spoel als:

$$L_1 = \frac{N_1 \phi_1}{i_1}$$

$$L_2 = \frac{N_2 \phi_2}{i_2}$$

Aldus valt te noteren:

$$M_{12} M_{21} = \frac{N_1 k_2 \phi_2}{i_2} \frac{N_2 k_1 \phi_1}{i_1} = k_1 k_2 \frac{N_1 \phi_2}{i_2} \frac{N_2 \phi_1}{i_1} = k_1 k_2 \frac{N_1 \phi_1}{i_1} \frac{N_2 \phi_2}{i_2} = k_1 k_2 L_1 L_2$$

Men toont aan dat de wederzijdse inductiecoëfficiënten gelijk zijn en gelijk M. Dan wordt:

$$M = \sqrt{k_1 k_2 L_1 L_2} = k \sqrt{L_1 L_2}$$

De factor k noemt men de totale koppelfactor en varieert van 0 tot 1.

Op een eenvoudige manier kan men eveneens afleiden dat:

$$k^2 = k_1 k_2 = (1 - \sigma_1) (1 - \sigma_2) = 1 - (\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2) = 1 - \sigma$$

De factor  $\sigma$  vormt de totale stroofactor. Bij sterk gekoppelde spoelen waar k groot is, kan men benaderend stellen dat:  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ .

Zoals in de inleiding aangehaald, geldt dat bij transformatoren men streeft naar sterk gekoppelde spoelen. Het gebruik van magnetisch blik werkt dat uitermate in de hand.

Naarmate twee spoelen, in lijn opgesteld, verder van elkaar verwijderd worden, vermindert de magnetische koppeling.

Bemerk echter dat de magnetische koppeling eveneens vermindert naarmate de ene spoel méér haaks komt te staan ten opzichte van de andere. De magnetische koppeling wordt nul wanneer de spoelen loodrecht komen te staan op elkaar.

## 7.5. Seriegeschakelde spoelen.

### 7.5.1. Niet magnetisch gekoppeld.

Stel twee spoelen worden in serie geschakeld. Beiden worden gekenmerkt door een zekere inductiviteit L en weerstand R (niet ideale spoelen)

De totale weerstand wordt:

$$R_{tot} = R_1 + R_2$$

De totale inductiviteit wordt eenvoudig de som van de individuele inductiviteiten of:

$$L_{tot} = L_1 + L_2$$

### 7.5.2. Magnetisch gekoppelde spoelen.

De totale weerstand wordt terug:

$$R_{tot} = R_1 + R_2$$

De totale inductiviteit zal afhankelijk zijn van de manier hoe de magnetische koppeling werkt, spanningsverhogend of verlagend.

Maken we gebruik van punten om de aard van de magnetische koppeling aan te duiden.

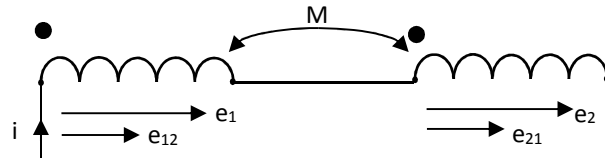
Indien de positieve stroom in beide spoelen langs het punt binnen treedt of wegvloeit, dan geldt voor de totale inductantie:

$$L_{tot} = L_1 + L_2 + 2M$$

Is hieraan niet voldaan, dan geldt:

$$L_{tot} = L_1 + L_2 - 2M$$

Beschouwen we onderstaande schakeling, waar de stroom in beide spoelen langs het punt intreedt.



Figuur 7-13 Opstelling waarbij spoelen elkaar meewerken

De totale geïnduceerde spanning wordt:

$$e = e_1 + e_{12} + e_2 + e_{21}$$

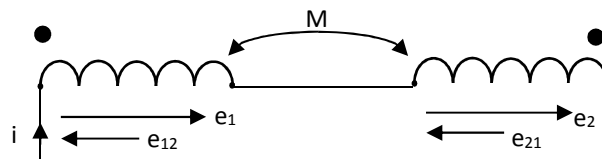
Of in functie van de stroom:

$$e = -L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = -L_{tot} \frac{di}{dt}$$

Waarin:

$$L_{tot} = L_1 + L_2 + 2M$$

Beschouwen we het geval waar de spoelen elkaar tegenwerken:



Figuur 7-14 Opstelling waarbij de spoelen elkaar tegenwerken

De totale spanning wordt:

$$e = e_1 - e_{12} + e_2 - e_{21}$$

of in functie van de stroom:

$$e = -L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = -L_{tot} \frac{di}{dt}$$



waarin:

$$L_{tot} = L_1 + L_2 - 2M$$

Algemeen is de totale inductiecoëfficiënt:

$$L_{tot} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Hierin is, vroeger afgeleid:

$$M = \sqrt{k_1 k_2} \sqrt{L_1 L_2} = k \sqrt{L_1 L_2}$$

## 8. Magnetische veldenergie

### 8.1. Inleiding

Het opbouwen van een magnetisch veld vergt een extra energie van de bron (precies zoals het opbouwen van elektrische veldenergie extra energie vraagt). Het magnetisch veld bezit dus een zekere hoeveelheid energie. Bij het afbouwen van het magnetisch veld zal deze energie terug afgegeven worden.

Magnetische energie vormt dikwijls een tussenschakel bij energieomzettingen. In een motor hebben we magnetische energie nodig om elektrische energie omgezet te krijgen in mechanische en omgekeerd.

In inductieovens, inductiekookplaten wordt magnetische energie uit elektrische energie gevormd om direct om te zetten in thermische energie.

### 8.2. Afleiden van de magnetische energie in een spoel.

In paragraaf 7.3.5 werd de inschakeling van een inductieve kring of RL kring op een DC bron beschouwd. De spanningsdifferentiaalvergelijking luidde:

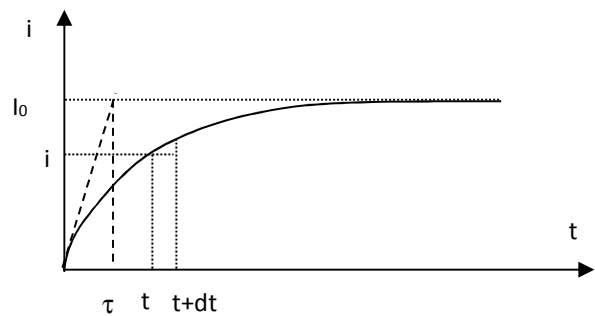
$$E - Ri + e = 0$$

of

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

De inschakelstroom varieert exponentieel met een tijdsconstante  $\tau = L/R$ :

$$i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$



Figuur 8-1 Verloop Inschakelstroom bij een spoel

We beschouwen de inschakeling op een bepaald ogenblik  $t$ . Gedurende een interval  $t, t+dt$  veronderstellen we even de stroom constant.

Vermenigvuldigen we de differentiaalvergelijking met  $i \cdot dt$ :

$$E \cdot i \cdot dt = R i^2 dt + L \frac{di}{dt} i dt$$

Hierin vormt:

$E \cdot i \cdot dt$ : de energie van de bron gedurende het interval  $dt$  afgeleverd;

$R i^2 dt$ : de energie in de weerstand omgezet in warmte.

De term  $L \cdot i \cdot di$  kan dan niets anders zijn dan de energie die gedurende het interval  $dt$  naar de inductiviteit  $L$  gaat om daar gebruikt te worden om het magnetisch veld op te bouwen:

$$dW_m = L \cdot i \cdot di$$

De totale veldenergie nadat de stroom de eindwaarde  $I_0$  heeft bereikt, wordt:

$$W_m = \int_0^{I_0} L i \, di = \frac{L I_0^2}{2}$$

*Bemerk dat slechts energie naar de inductiviteit gestuurd wordt als er een stroomstijging plaats grijpt. Eenmaal de stroom constant wordt gelijk  $I_0$  en het magnetisch veld is opgebouwd, stopt de energietoevoer naar L en vergt het in stand houden van het veld geen energie. De bronenergie gaat dan verder naar de weerstand en wordt daar omgezet in warmte.*

### 8.3. Magnetische veldenergie per volume-eenheid.

Beschouwen we een solenoïde.

Daar werd afgeleid:

$$H = N i / l.$$

Hieruit leiden we de stroom  $i$  af:

$$i = H \cdot l / N$$

Uit de definitie van de zelfinductiespanning:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

leiden we af:

$$N d\phi = L di$$

De verandering van de magnetische veldenergie kan genoteerd worden als:

$$dW_m = L i \, di = (L di) i = N d\phi \frac{H l}{N} = d\phi \cdot H \cdot l = A \cdot dB \cdot H \cdot l = H \cdot dB (A \cdot l) = H \cdot dB \cdot V$$

Hierin is  $V$  het volume van de spoel.

De magnetische veldenergie -verandering per volume-eenheid wordt dan:

$$dw_m = H \cdot dB$$

of de totale energie per volume-eenheid:

$$w_m = \int_0^B H \cdot dB$$

Deze uitdrukking, hier afgeleid uitgaande van een solenoïde, is eigenlijk algemeen geldig en geldt in elk gebied van de ruimte waarin het magnetisch veld zich voordoet.

Varieert de inductie lineair met de veldsterkte, wat bijvoorbeeld het geval is van een luchtspoel, dan geldt:

$$B = \mu_0 H$$

en is de energiedichtheid:

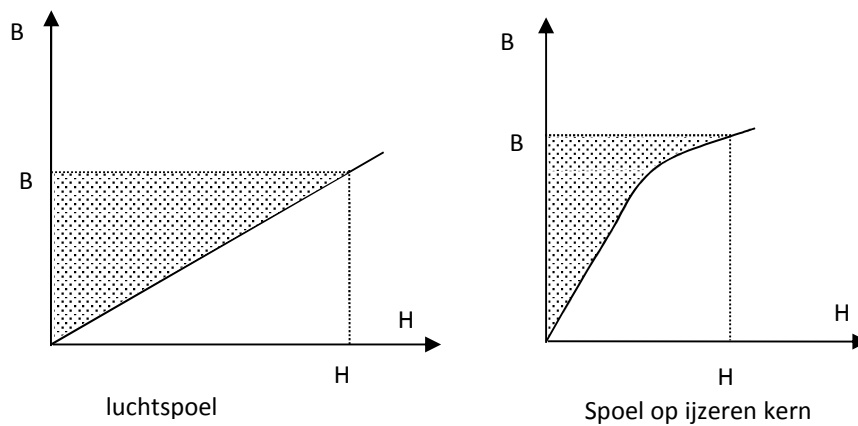
$$w_m = \int_0^B H \cdot dB = \int_0^B \frac{B}{\mu_0} \cdot dB = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

In geval van een spoel op een ijzeren kern is

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$$

en varieert B niet lineair met de veldsterkte H.

De integraal is zomaar niet uit te werken. De magnetische energiedichtheid komt hier neer op het oppervlak tussen de curve en de inductie-as.



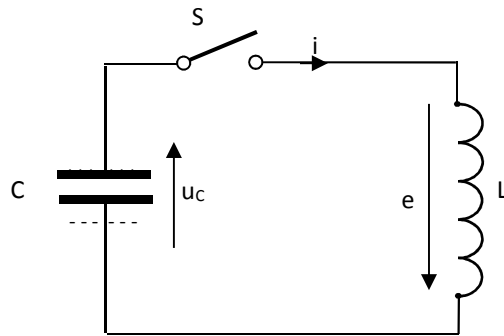
Figuur 8-2 Energiedichtheid bij luchtspoel en spoel met ijzeren kern

## 8.4. LC – keten en elektromagnetische trillingen.

Gaan we uit van een ideale spoel (weerstand nul) en condensator, via een schakelaar parallel met elkaar verbonden. We nemen aan dat de condensator initieel een lading  $Q_0$  bezit.

Bij sluiten van de schakelaar begint de condensator zich onmiddellijk te ontladen. Terwijl dit gebeurt stijgt de stroom die door de spoel trekt. Op elk ogenblik geldt dat de spanning over de condensator gelijk is aan de spanning over de spoel:

$$u_c = -e = +L \frac{di}{dt}$$



Figuur 8-3 Schakeling LC-keten

Op het ogenblik dat de condensatorspanning nul wordt bereikt de stroom in de spoel haar maximum. ( $di/dt = 0$ ) De condensatorenergie is nul.

De stroom ondervindt op dat ogenblik geen verandering. Tegelijk is ook de sterkte van het magnetisch veld maximaal: de magnetische veldenergie is maximaal.

Vervolgens begint de stroom te dalen: de magnetische veldenergie daalt. De condensator laadt zich op, maar in tegenovergestelde zin als initieel. Bij het opladen stijgt de condensatorlading en spanning of de elektrische veldenergie en wordt maximum als de stroom in de spoel door nul gaat. De magnetische veldenergie is nu terug nul.

Dan begint de condensator opnieuw zich te ontladen, vertrekkende van omgekeerde polariteit. Het boven beschreven proces herhaalt zich, waarbij de lading heen en weer gaat en telkens via de spoel van de ene plaat naar de andere plaat gaat. Men noemt dit verschijnsel een LC-trilling, ook wel elektromagnetische trilling.

De wiskundige analyse steunt op de spanningsvergelijking, op elk moment geldig en gelijk:

$$u_c = -e = +L \frac{di}{dt}$$

Op tijdstip nul is de lading  $Q_0$ .

Na tijd  $t$  geldt dat de lading is gedaald naar een waarde:

$$q = Q_0 - \int_0^t i \cdot dt$$

De afgeleide van deze vergelijking levert de stroom  $i$ :

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

Belangrijk is hier het minteken! De stroom leidt tot een daling van de lading  $q$  op de condensator.

De condensatorspanning noteren we in functie van de lading of:

$$u_c = \frac{q}{C} = -e = +L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

Bovenstaande vergelijking kan geschreven worden als:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Dit vormt een tweede orde differentiaalvergelijking, waarvan de oplossing overeenstemt met een massa – veersysteem, waar de massa een sinusoidale beweging of trilling ondergaat. (enkelvoudige harmonische beweging). In ons geval zal de lading, stroom, spanning, etc sinusoidaal variëren met een oscillatiepulsatie  $\omega = 2\pi f$ .

De oplossing is van de vorm:

$$q = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Op  $t=0$  is de lading maximum gelijk  $Q_0$ , of de initiële fasehoek  $\phi$  kunnen we nul stellen.

Inbrengen in de differentiaalvergelijking leidt tot:

$$-Q_0 \omega^2 \cos \omega t + \frac{1}{LC} Q_0 \cos \omega t = 0$$

Hieruit leiden we af dat de oscillatiepulsatie wordt:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

waarin  $f$  de natuurlijke frequentie is.

De stroom in de kring wordt:

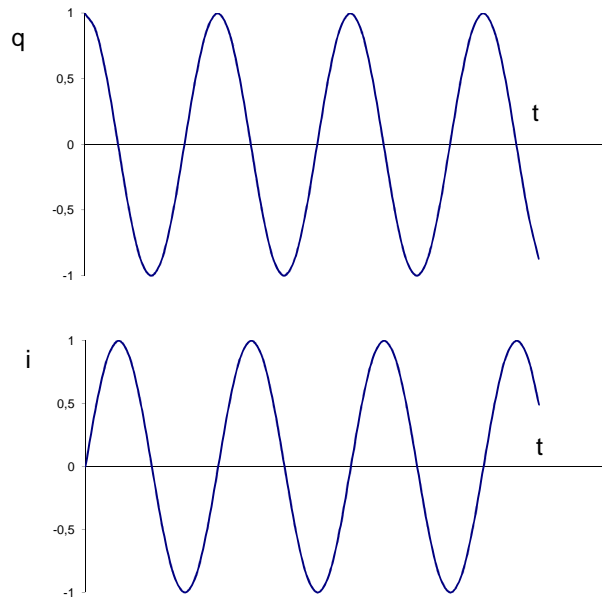
$$i = -\frac{dq}{dt} = \omega Q_0 \sin \omega t$$

De energie van de condensator, met andere woorden de elektrische veldenergie is af te leiden uit:

$$W_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t$$

De magnetische veldenergie leiden we af uit:

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{L}{2} \omega^2 Q_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2 \omega t$$



Figuur 8-4 Verloop lading en stroom in een LC-keten

Bemerk dat op ogenblik  $t=0$  de condensatorenergie maximaal is, terwijl de magnetische energie in de spoel nul is. Op het ogenblik dat de magnetische energie maximaal is, is de elektrische energie in de condensator nul. Er treedt een voortdurende energie-uitwisseling, waarbij de som:

$$W_E + W_m = \frac{Q_0^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{Q_0^2}{2C}$$

de totale energie constant blijft, gelijk aan deze die aanvankelijk op de condensator aanwezig was.

## 8.5. LC trillingen met weerstand R (LRC keten)

In voorgaande paragraaf werd uitgegaan van het ideale geval, ideale spoel parallel op een condensator. In werkelijkheid dienen we rekening te houden met de weerstand van de spoel en de verbindingsgeleiders. Stel dat aldus de totale weerstand  $R$  is (meestal komt dat neer op de weerstand van de spoel alleen, gezien de weerstanden van de verbindingsgeleiders klein zijn).

De spanningsvergelijking wordt:

$$u_C + e - u_R = 0$$

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$

Drukken we de stroom uit in functie van de lading:

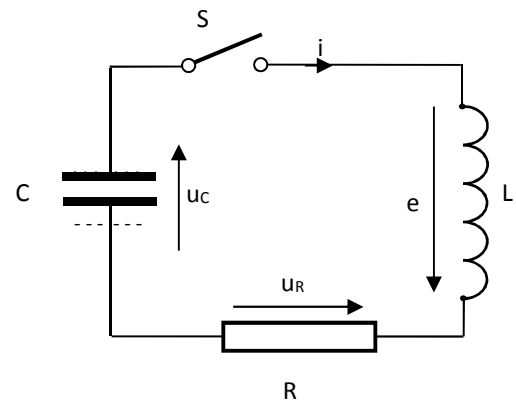
$$i = -\frac{dq}{dt}$$

(let op het minteken: zie voorgaande paragraaf!)

dan wordt de vergelijking:

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = 0$$

Dit is een tweedeorde differentiaalvergelijking.



Figuur 8-5 Schakeling RLC-kring

- Indien  $R^2 < 4L/C$  leidt de oplossing naar een ondergedempte trilling:

$$q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \omega't$$

waarin:

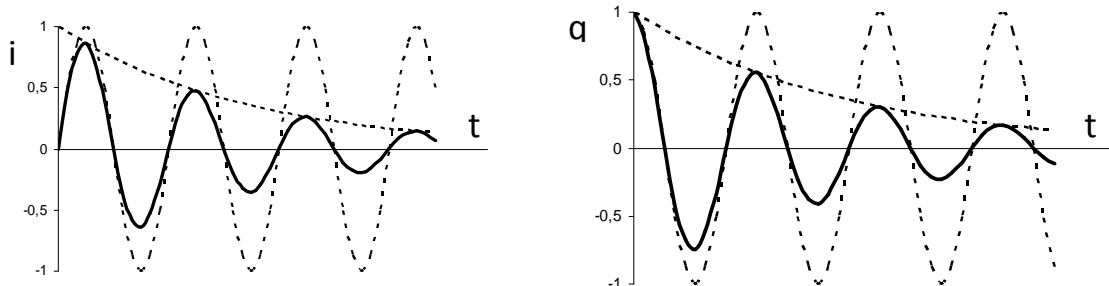
$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

De stroom in de kring vinden we uit:

$$i = -\frac{dq}{dt} = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left( \frac{R}{2L} \cos \omega't + \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin \omega't \right)$$

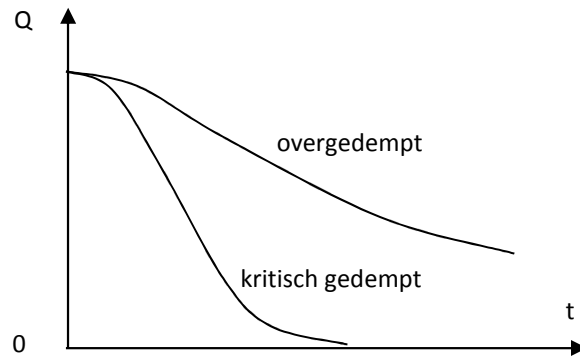
Omdat R meestal veel kleiner is dan  $\sqrt{4L/C}$ , mag men de term  $\cos \omega't$  verwaarlozen, zodat we krijgen:

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega't$$



Figuur 8-6 Verloop stroom en lading bij een ondergedempte kring

- In geval  $R^2 = 4L/C$  is de kring kritisch gedempt.
- In geval  $R^2 > 4L/C$  is de kring overgedempt.



Figuur 8-7 Verloop  $q$  bij kritisch en overgedempt systeem

Trillingskringen spelen een belangrijke rol in veel elektronische apparaten. In radio en TV toestellen worden ze gebruikt voor het afstemmen, ....

Daar er in elke keten wel wat weerstand voorkomt, moet er aan elektrische oscillatoren gewoonlijk met regelmatige tussenpozen vermogen worden toegevoerd, ter compensatie van de energie die in de weerstand wordt omgezet in warmte.



## 9. Gemagnetiseerde materialen.

### 9.1. Inleiding

Faraday stelde reeds in 1845 vast dat stoffen magnetische eigenschappen bezitten. Dit komt tot uiting als men uitgaat van een toroïde, aanvankelijk als een luchtspoel geconstrueerd.

Stuurt men een stroom  $I$  door de spoel, dan ontstaat een magnetisch veld waarvan de inductie gelijk is aan:

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

$NI$ : het aantal ampèrewindingen,

$l$  de gemiddelde lengte.

$\mu_0$  de permeabiliteit voor vacuüm =  $4 \pi 10^{-7}$  Vsec/Am.

Wikkelt men de toroïde rond een metaal, dan stelt men een verhoging van de inductie vast:

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l}$$

waarin  $\mu_r$  de relatieve permeabiliteit vormt.

Naargelang de waarde van  $\mu_r$  onderscheidt men drie groepen:

- de paramagnetische stoffen,  $\mu_r$  (iets) groter dan 1. Zij ondervinden een kracht in de richting van toenemende inductie, of nog uitgevoerd als een verplaatsbare kern wordt de kern in de spoel getrokken;
- de diamagnetische stoffen,  $\mu_r$  (iets) kleiner dan 1. Zij ondervinden een kracht in de richting van afnemende inductie
- de ferromagnetische stoffen,  $\mu_r$  zeer groot (100 ... 1000). Zij vormen veruit de belangrijkste groep en worden gebruikt bij de constructie van motoren, transformatoren, relais, kortom, daar waar de werking van het apparaat steunt op de aanwezigheid van een magnetisch veld.

De vraag stelt zich nu, wat veroorzaakt eigenlijk die veldversterking? Wat is de ware betekenis van  $\mu$ ?

### 9.2. Het elementair magneetje.

Het is bekend dat bij het verdelen van een staafmagneet in kleinere stukken, elk stukje op zich een magneetje vormt.

Men kan zo verder gaan, tot men uitmondt op moleculair vlak. Zo'n moleculair of elementair magneetje is ondeelbaar, wil men nog altijd een magnetisch veld overhouden.

Men beschouwt zo'n elementair magneetje daarom als een ondeelbaar magnetisch dipooltje en de staafmagneet als een grotere magnetische dipool opgebouwd uit een aaneenschakeling van dergelijke kleine dipooltjes.

Volgens de hypothese van Ampère is alle magnetisme van materie te verklaren te ontstaan uit elementaire kringstroompjes in de stof. Deze elementaire kringstroompjes zijn niets anders dan de elektronbeweging rond de kern.

### 9.3. Het magnetisch veld van een kringstroompje; magnetisch dipoolmoment $m_{at}$

De beweging van een elektron rond een kern kan equivalent gesteld worden met een kleine stroom  $I_e$  in tegenovergestelde zin (elektronenstroom versus conventionele stroom).

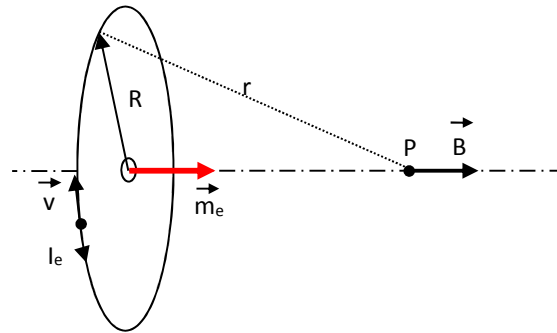
Van een stroomvoerende winding is bekend dat dit aanleiding heeft tot een magnetisch veld. Hierbij laat de inductie op de as van de winding zich noteren als:

$$B_e = \mu_0 I_e \frac{R^2}{2r^3}$$

De afleiding laten we achterwege.

Bovenstaande uitdrukking kunnen we enigszins aanpassen als:

$$B_e = \mu_0 I_e \frac{R^2}{2r^3} = \mu_0 I_e \frac{\pi R^2}{2\pi r^3} = \mu_0 \frac{I_e A}{2\pi r^3}$$



Figuur 9-1 Magnetisch dipoolmoment van een elektron

Het product

$$I_e A = m_e$$

wordt gedefinieerd als het *magnetisch dipoolmoment van deze elektron - kringstroom of elementair magneetje* en is materiaalafhankelijk. Het magnetisch dipoolmoment is dus bepalend voor de grootte van het magnetisch veld dat wordt opgewekt!

Volledigheidshalve moeten we vermelden dat het elektron zelf nog een magnetisch dipoolveld opwekt ten gevolge van het wentelen rond zijn eigen as ("spinning elektron"); ter onderscheiding spreekt men van een baanmoment en een spinmoment.

Het magnetisch dipoolmoment wordt voorgesteld door een vector loodrecht op het baanvlak, met een zin in functie van de zin van de elementaire kringstroom. (Rechterhandregel)

In een atoom hebben we diverse elektronen. Alle elektronen samen zullen aanleiding geven tot een resulterend magnetisch veld per atoom eenduidig bepaald door een resulterend **magnetisch dipoolmoment  $m_{at}$** :

$$\overline{m}_{at} = \sum \overline{m}_e$$

Doordat deze dipoolmomenten  $m_{at}$  in de metaalstructuur een willekeurige richting hebben, vertoont het materiaal uitwendig geen magnetisch veld.

## 9.4. Begrippen magnetisatie M, magnetische polarisatie J.

Gaan we uit van een solenoïde opgesteld in vacuüm.

Hiervoor werd afgeleid:

$$H = \frac{NI}{l} \quad \text{en} \quad B_0 = \mu_0 H = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Brengt men een magneticum in de spoel, dan worden de elementaire magneetjes gericht (gepolariseerd) naar het aangelegd veld. De magnetische dipoolmomenten  $m_{at}$  gaan zich richten waardoor een resulterend magnetisch dipoolmoment per volume-eenheid M ontstaat:

$$M = \frac{\sum m_{at}}{\Delta V} \quad [M] = \frac{Am^2}{m^3} = A/m$$

Met andere woorden, een inwendig magnetisch veld wordt gevormd waarvan de sterkte gedefinieerd wordt als **de magnetische polarisatie J**:

$$J = \mu_0 M \quad [J] = \text{Tesla } T$$

De totale inductie B of sterkte van het magnetisch veld wordt de som van het oorspronkelijk veld  $B_0$  en het bijkomend inwendig veld J:

$$B = B_0 + J$$

Het moet duidelijk zijn dat hoe groter de stroom in de spoel en dus hoe groter H, hoe meer de magnetische dipoolmomenten worden gepolariseerd. De magnetisatie M zal evenredig stijgen met H of:

$$M = \chi H$$

Hierin is  $\chi$  de magnetische susceptibiliteit van de materie, wat des te groter wordt naarmate de dipooltjes zich richten.

De totale inductie wordt nu:

$$B = B_0 + J = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 H + \mu_0 \chi H = \mu_0 (1 + \chi) H = \mu_0 \mu_r H$$

Hierin is  $1 + \chi = \mu_r$  de relatieve permeabiliteit.

***“De relatieve permeabiliteit is des te groter naarmate de dipooltjes zich méér gaan richten of naarmate de inwendige polarisatie groter wordt”.***

Verder kunnen we noteren:

$$J = \mu_0 (\mu_r - 1) H$$

$$M = (\mu_r - 1) H$$

De waarden van de polarisatie J en magnetisatie M zijn afhankelijk van de dimensieloze grootte  $\mu_r$ .

## 9.5. Paramagnetische stoffen.

De moleculen vertonen een resulterend magnetisch dipoolmoment. Onder invloed van een magnetisch veld gaan ze zich richten en ontstaat het fenomeen hierboven beschreven.

Het inwendig veld is echter niet zo groot.

Uit een studie van Pierre Curie (1859-1906) blijkt dat de magnetisatie toeneemt naarmate het uitwendig veld stijgt en afneemt met de temperatuur:

$$M = C \frac{B}{T}$$

Waarin C een constante is. Als de verhouding B/T zeer groot wordt, 5B zeer groot en T zeer klein), dan gaat de wet van Curie niet langer nauwkeurig op. Want wordt B verhoogd en T verlaagd, dan nadert de magnetisatie tot een maximumwaarde wat neerkomt dat alle dipooltjes gericht zijn. Dit is echter in extreme voorwaarden, zeer hoog veld (boven 2T) resp heel lage temperatuur (enkele Kelvin).

Voorbeelden van paramagnetische stoffen zijn:

Aluminium:  $\mu_r = 1,000023$

Zuurstof:  $\mu_r = 1,000019$

## 9.6. Diamagnetische stoffen.

Diamagnetische stoffen bezitten een relatieve permeabiliteit  $\mu_r$  iets kleiner dan één!

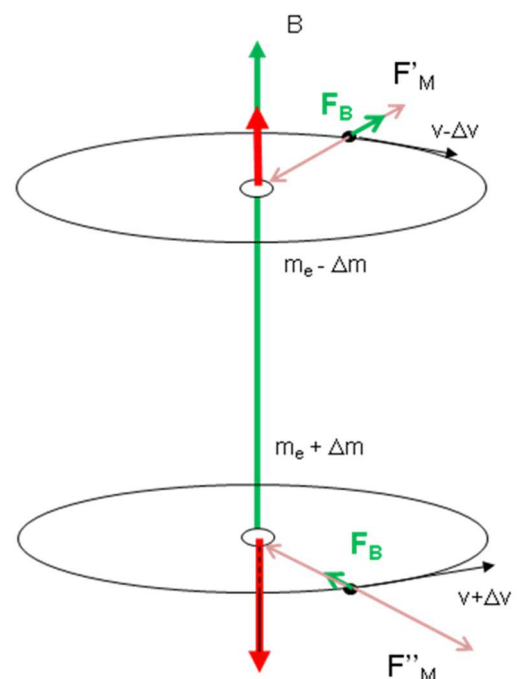
Dit zijn stoffen die geen permanent dipoolmoment bezitten. Wanneer er een uitwendig magnetisch veld wordt aangelegd, wordt er in de moleculen een magnetisch dipoolmoment opgewekt, dat echter tegengesteld gericht is aan het hoofdveld. Het totaal veld wordt hierdoor iets kleiner.

Wordt er uitgegaan van het primitief gezichtspunt dat elektronen cirkelvormige banen rond de kern beschrijven, dan kan het effect op het uitwendig veld toegeschreven worden aan een verhoging van de baansnelheid van elektronen die in de ene richting draaien en een verlaging van de baansnelheid van de elektronen in de andere richting; beide effecten resulteren in een netto-dipoolmoment dat het uitwendig veld tegenwerkt. In vrijwel elk materiaal treedt dergelijk verschijnsel op; diamagnetisme is echter nog zwakker dan paramagnetisme zodat in materialen die tegelijk ook paramagnetisch of ferromagnetisch zijn, het effect vrijwel in het niet verdwijnt.

Voorbeelden zijn:

argon:  $\mu_r = 0,999999991$

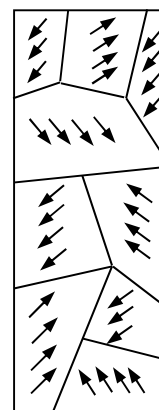
koper:  $\mu_r = 0,9999912$



Figuur 9-2 Dipoolmoment bij diamagnetische stoffen

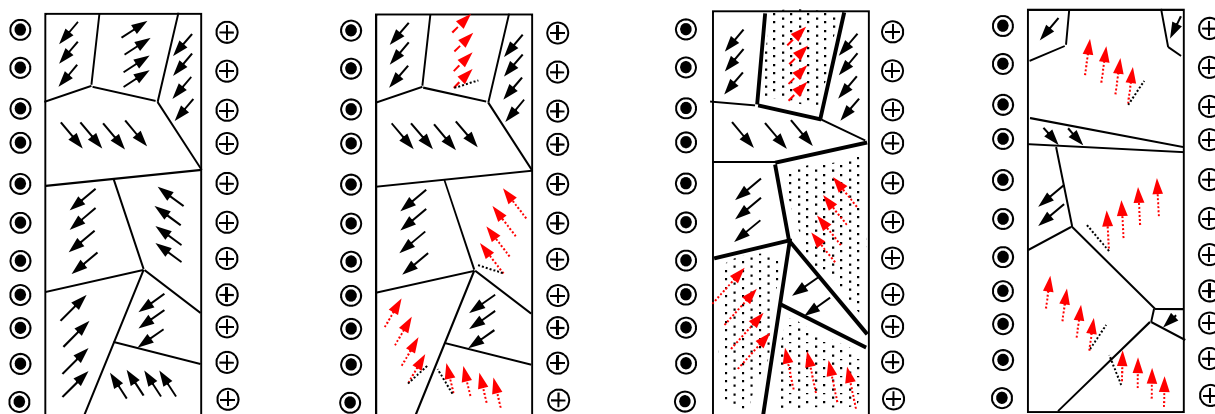
## 9.7. Ferromagnetisme

Ook bij de zogenoemde ferromagnetische stoffen vindt men per atoom een resulterend magnetisch dipoolmoment. Echter, door de kristalstructuur van deze stoffen zijn de magnetische dipoolmomenten over gehele gebieden, zogenaamde *Weisgebieden*, gelijk gericht. Men spreekt in dergelijke gevallen over spontane magnetisatie. De richtingen van de dipoolmomenten in de verschillende naast elkaar gelegen Weisgebieden zijn niet gelijk. Het gemiddeld magnetisch moment naar buiten is daarom nul. In het overgangsg gebied tussen twee Weisgebieden (grootte orde honderd tot duizend atomen) vindt een geleidelijke wijziging van de richting plaats.



Figuur 9-3 Weisgebieden

Het ferromagnetisch materiaal wordt onderhevig gesteld aan een uitwendig magnetisch veld. Hiervoor brengen we bijvoorbeeld een spoel rond het materiaal, waarin de stroom geleidelijk groter wordt gemaakt; of de veldsterkte  $H = NI / l$  stijgt geleidelijk.



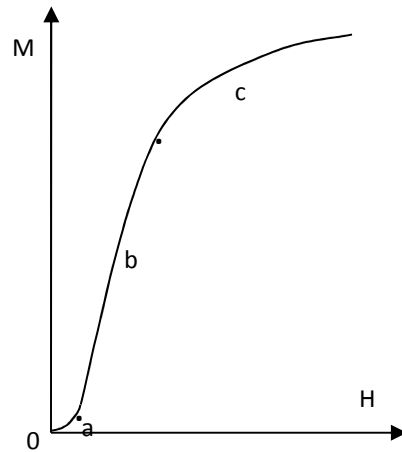
Figuur 9-4 Weisgebieden onder invloed van een magnetisch veld

Stijgt de veldsterkte vanaf nul, dan komen de grenzen van de verschillende weisgebieden in beweging. Aanvankelijk gaan die gebieden bijdraaien waarvan de spontane magnetische richting praktisch samenvalt met de richting van het uitwendig veld. Het resulterend magnetisch dipoolmoment per volume-eenheid of de magnetisatie  $M$  neemt toe. Indien de veldsterkte nog kleine waarden heeft en men laat deze opnieuw verminderen tot nul, dan keert normaal alles in de oorspronkelijke positie terug (Figuur 9-5: gebied a in de  $M$ - $H$  karakteristiek)

Vervolgens zullen de gebiedsgrenzen tussen de weisgebieden waarvan de spontane magnetische richting ongeveer samenvalt met de richting van het aangelegd veld verschuiven; gebieden die parallel met het aangelegd veld georiënteerd zijn groeien, terwijl de andere krimpen. De waarde van de magnetisatie neemt nu vrij snel toe (Figuur 9-5: gebied b in de  $M$ - $H$  karakteristiek)

Door inwendige spanningen, roosterfouten en verontreinigingen liggen de grenzen tussen de gebiedjes op bepaalde plaatsen **verankerd**. Bij het toenemen van het uitwendig veld komt het dan dikwijls voor dat een grens plotseling een heel eind verschuift. Dit plotseling verschuiven veroorzaakt inductiestoten, wat met behulp van een spoeltje en versterker waar te nemen is. Dit verschijnsel noemt men het verschijnsel van Barkhausen.

Naarmate het uitwendig veld grote waarden aanneemt, vermindert de snelheid waarmee de grenzen verschuiven; de gebieden met een magnetisatierichting als het aangelegd veld bereiken hun maximum waarde. Alleen een geleidelijke draaiing van de spontane magnetisatierichting in de gebiedjes is nog te herkennen, zodat die meer parallel komt met de richting van het uitwendig veld. Het materiaal komt in verzadiging (Figuur 9-5: gebied c of het verzadigingsgebied van de magnetisatiekarakteristiek)



Figuur 9-5 Magnetisatiekarakteristiek

De warmtebeweging van de atomen stoort het richtingsproces van de dipooltjes. Bij het absoluut nulpunt is de magnetisatie het grootst. Bij stijgende temperatuur neemt het proces af en verdwijnt praktisch volledig bij de zogenoemde Curietemperatuur. (bv Fe: 770°C) Vanaf dan geldt alleen nog paramagnetisme (wat quasi verwaarloosbaar is).

Laat men vanuit verzadigingstoestand het uitwendig magnetisch veld of met andere woorden de stroom weer afnemen, dan loopt de magnetisatie  $M$  niet volgens dezelfde kromme terug, maar blijft iets achter. Dit verschijnsel staat bekend onder de naam **hysteresiseffect**.

De weisgebiedjes nemen hun dichtbijgelegen voorkeursrichting aan en behouden voor een deel de richting de richting waarin ze werden getrokken. Bij stroom nul of uitwendig veld nul ( $H=0$ ) is er een zeker resterend magnetisatie, de **remanente magnetisatie** of **remanentie  $M_r$** .

Onder de **coërcitieve veldsterkte**  $H_c$  verstaat men de veldsterkte waarbij de magnetisatie verdwijnt (of met andere woorden, dit is de veldsterkte waarbij het remanent magnetisme bedwongen wordt).

Men kan de stroom en veldsterkte in negatieve zin laten stijgen tot dat de verzadiging terug optreedt. Bij terugkeer naar een magnetisatie in de oorspronkelijke richting wordt terug niet dezelfde kromme doorlopen, maar blijft de magnetisatie  $M$  terug iets achter. De  $M$ - $H$  karakteristiek vertoont een lus, de **hysteresislus** die symmetrisch is t.o.v. het nulpunt voor zover men eenzelfde maximum negatieve stroom heeft aangelegd als de maximum positieve stroom. De  $M$ - $H$  kromme die men krijgt uitgaande van ontmagnetiseerd materiaal noemt men de aanloopcurve.

### Overgang naar de B-H karakteristiek.

In de praktijk wordt in plaats van de M-H karakteristiek, veelal de inductie B in functie van de veldsterkte H uitgezet, de zogenaamde B-H karakteristiek. Maken we gebruik van de vroeger afgeleid verband:

$$B = B_0 + J = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 H + J = \mu H$$

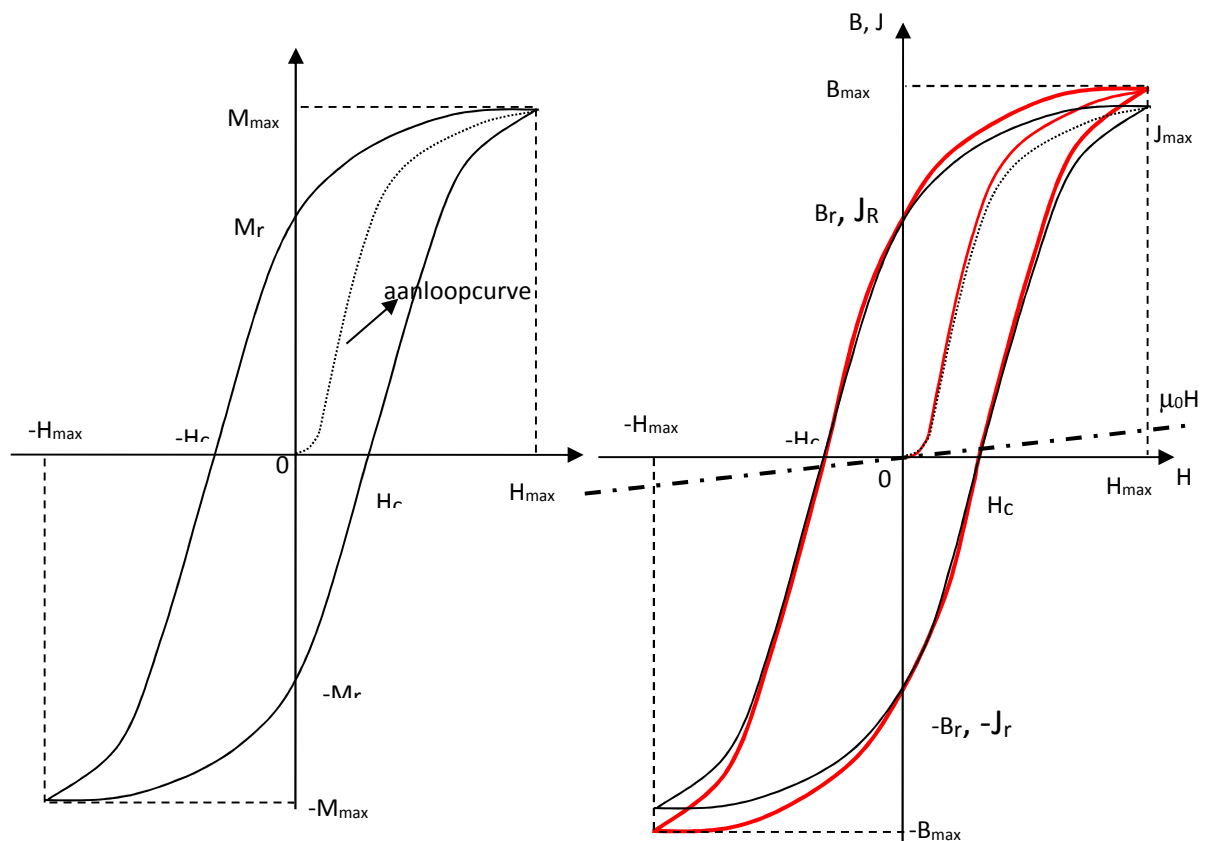
Uitgaande van de magnetisatiekarakteristiek M-H gaat men aanvankelijk over naar de polarisatie  $J = \mu_0 M$  in functie van de veldsterkte. Het is duidelijk dat de vorm hetzelfde blijft, gezien de overgang slechts neerkomt op een vermeerdering van de M-coördinaat met een factor  $\mu_0$ .

Tellen we hierbij de karakteristiek  $\mu_0 H - H$ , wat neerkomt op een rechte door de oorsprong, dan bekomen we de inductie B in functie van H.

Merk echter op dat bij ferromagnetische materialen de polarisatie J ten opzicht van  $B_0 = \mu_0 H$  een factor  $\chi = \mu_r - 1$  groter is! Het verschil tussen de curve J-H en B-H is dus vrij klein (bijna verwaarloosbaar).

Dikwijls gaat men de B-H kromme betitelen als de magnetisatiekromme, terwijl deze laatste de M-H karakteristiek is. Slechts in het geval dat de polarisatie J groot is (wat het geval is voor ferromagnetische materialen) kan dit niet veel kwaad. In het omgekeerde geval maakt dit echter een wezenlijk verschil uit.

Analoog als de magnetisatiecurve vertoont de B-H karakteristiek een hysteresislus. Laat men de veldsterkte of de stroom toenemen tot een zekere waarde  $H_{\max}$  om dan terug te dalen, dan zal de curve bij  $H=0$  de **remanente inductie  $B_r$**  aannemen. Om de inductie naar nul te dwingen is een coërcitieve veldsterkte  $-H_c$  nodig. Voor zover men een negatieve stroom of veldsterkte aanlegt en dan deze opnieuw laat stijgen naar een positieve  $H_{\max}$ , zullen we een symmetrische hysteresislus bekomen.

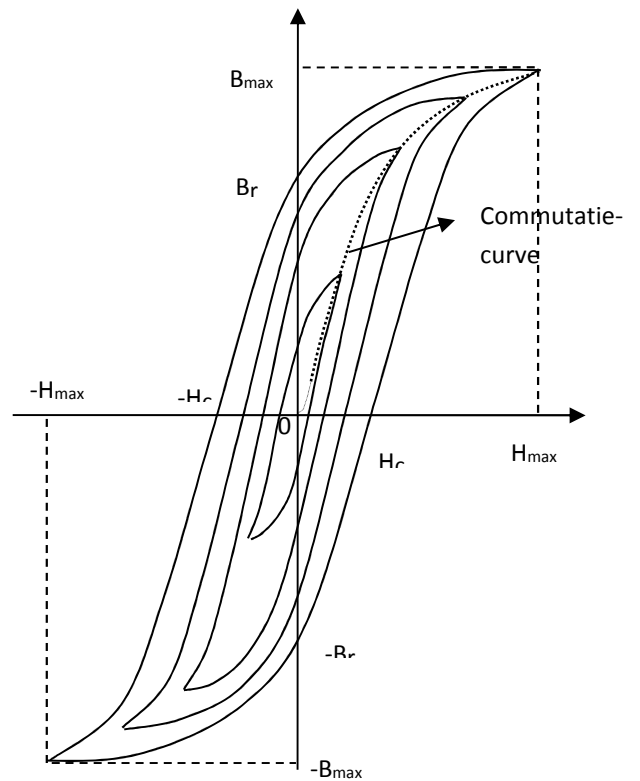


Figuur 9-6 Overgang M-H karakteristiek naar B-H karakteristiek

Bijgaande figuur toont het geval waarbij diverse waarden van  $H_{\max}$  werden gebruikt.

Bij verbinding van de toppen van de hysteresislussen, bekomt men de zogenoemde commutatiecurve. (maakt weinig verschil uit men de eerder gedefinieerde aanloopcurve).

Bij ferromagnetische materialen gebruikt bij transformatoren en elektrische machines zijn de hysteresislussen vrij smal. Bij de studie van elektrische machines wenst men het verband tussen B en H eenduidig te houden, zonder daarom de verzadiging te verwaarlozen. Daarom gaat men veelal uit van de commutatiecurve in plaats van de volledige hysteresislus te gebruiken. (zie verder inductantie van spoelen op een ferromagnetische kern)



Figuur 9-7 B-H karakteristiek bij variërende maximale veldsterkte

## 9.8. De permeabiliteit bij ferromagnetsiche materialen.

Het niet lineair verband tussen de inductie en veldsterkte veroorzaakt een veranderlijke permeabiliteit bij ferromagnetische stoffen. Eerder werd de permeabiliteit gedefinieerd als de verhouding van de inductie B tot de veldsterkte H, of:

$$B = H \cdot \mu$$

Naargelang het werkpunt op de hysteresislus kan de totale permeabiliteit variëren van min tot plus oneindig en komt overeen met tang  $\alpha$ .

Wordt een kern voor gemagnetiseerd en laat men het veld variëren rond een werkpunt, dan ontstaat een kleine hysteresislus. Men definieert de reversibele permeabiliteit als  $\mu_{rev} = \Delta B / \Delta H$ .

Experimenteel kan men aantonen dat bij zelfde  $\Delta B$  de reversibele permeabiliteit dezelfde waarde blijft behouden, ongeacht de ligging van het werkpunt waarrond men werkt.

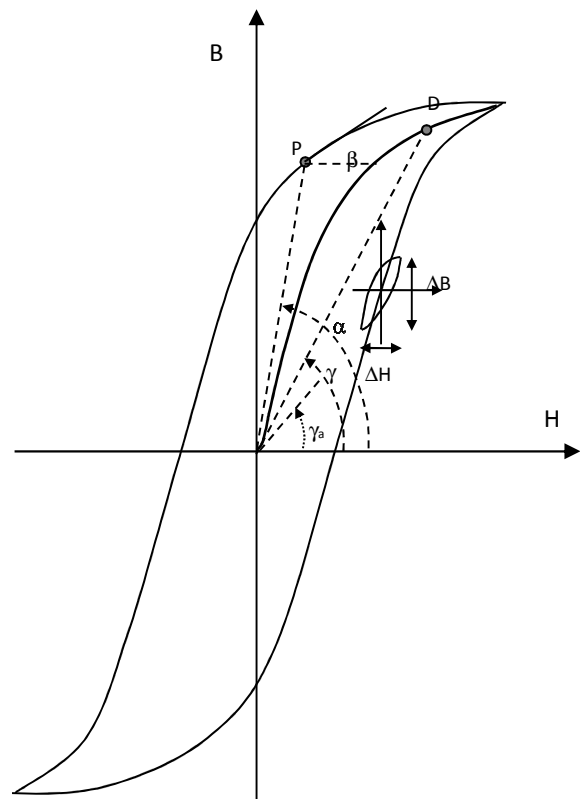


De differentiële permeabiliteit  $\mu_d$  wordt gedefinieerd als de helling van de BH karakteristiek in een bepaald punt, of:  $\mu_d = dB/dH$ . Dit stemt overeen met  $\tan\beta$

Zoals reeds gemeld gebruikt men bij wisselstroomapparaten dikwijls de commutatiecurve als de gemiddelde curve van de hysteresislus. (de hysteresislus bij de gebruikelijke ferromagnetische materialen is trouwens ook smal).

De permeabiliteit gedefinieerd langs deze curve noemt men de wisselstroompermeabiliteit  $\mu_{\sim}$

Voor punt D stemt dit overeen met  $\tan\gamma$ . De wisselstroompermeabiliteit varieert van een initiale permeabiliteit  $\mu_a$  naar een maximum waarde  $\mu_{max}$ , om daarna opnieuw te dalen.



Figuur 9-8 Permeabiliteit bij ferromagnetische materialen

Tabel 9-1 Relatieve permeabiliteit en eigenschappen van ferromagnetische stoffen heeft enkele waarden van de relatieve permeabiliteit voor enkele belangrijke ferromagnetische stoffen, met daarnaast de voornaamste eigenschappen.

Tabel 9-1 Relatieve permeabiliteit en eigenschappen van ferromagnetische stoffen

materiaal	initiale relatieve permeabiliteit	max relatieve permeabiliteit	remanente inductie	coërcitieve veldsterkte	geleidbaarheid
	$\mu_a$	$\mu_p$	$B_r$ Tesla	$H_c$ A/cm	$\gamma$ S/m
gegloeid koolstofstaal	250	6.500	1	0,6	10.000
zuiver ijzer	25.000	250.000	1,4	0,04	10.000
gietijzer	70	600	0,5	5	3.000
dynamoblik (4%Si)	500	7.000	0,8	0,4	1.700
permalloy (78,5%Ni, 21,5%Fe)	10.000	50.000	0,6	0,04	6.000
supermalloy (79%Ni, 15%Fe, 5%Mo, 0,5%Mn)	100.000	300.000	0,6	0,004	2.000
mangaan zinkferriet	2.000	3.000	0,15	0,2	1,00E-03
nikkel zinkferriet	15	50	0,13	0,1	1,00E-07

**Opmerking: permeabiliteit als magnetische geleidbaarheidscoëfficiënt.**

Gaan we uit van twee materialen A en B waarvan de B/H karakteristiek gegeven is. (Figuur 9-8) Uit de karakteristiek leiden we eveneens het verloop af van de permeabiliteit.

Materiaal B bezit een hogere gemiddelde permeabiliteit  $\mu_{rB}$  dan A.

Veronderstel twee identieke kernen met zelfde afmetingen voorzien van een zelfde spoel.

Door beide spoelen sturen we dezelfde stroom.

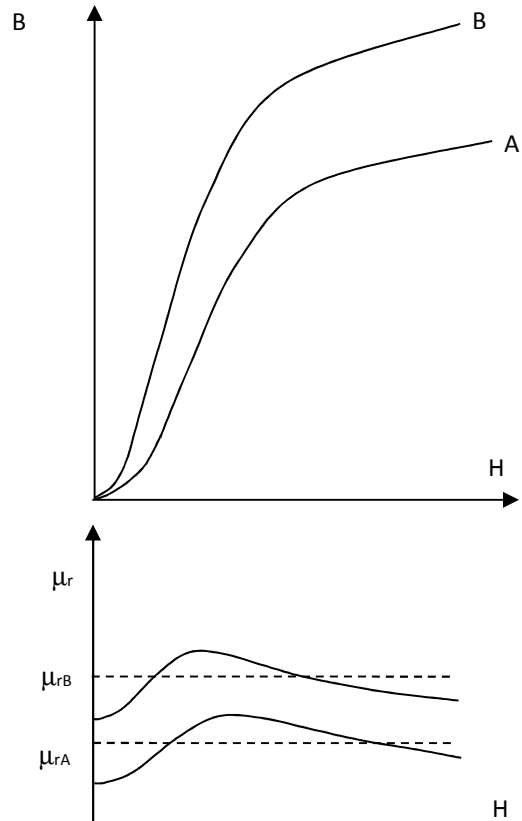
Voor zelfde aantal Aw/m of zelfde veldsterkte H zal in materiaal B een grotere inductie ontstaan dan in A.

We kunnen stellen dat hoe groter de relatieve permeabiliteit is, voor zelfde veldsterkte des te groter de inductie B wordt; *het materiaal laat zich gemakkelijk magnetiseren.*

Wenst men omgekeerd in beide kernen dezelfde flux of inductie, dan zal in de spoel van materiaal B veel minder Aw/m of veel minder veldsterkte noodzakelijk zijn. Het aantal (noodzakelijke) Aw/m daalt naarmate de permeabiliteit groter is. *Materiaal B gaat veel gemakkelijker het magnetisch veld geleiden!* (Bemerk dat veldsterkte staat voor de noodzakelijke inspanning om een zekere flux in het materiaal te bekomen.)

**Besluit: We kunnen de permeabiliteit  $\mu$  vertalen als de magnetische geleidbaarheids coëfficiënt van het materiaal.**

Verwijzen we verder bij de definiëring van de reluctantie.



Tabel 9-2 B-H curve en permeabiliteit bij verschillende stoffen

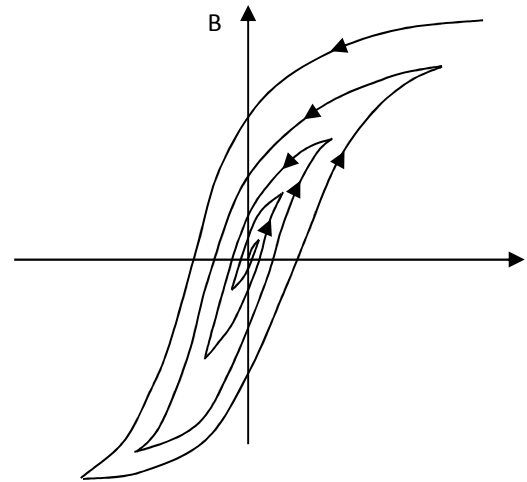
## 9.9. Ontmagnetiseren van ferromagnetisch materiaal

Door het hysteresiseffect bezit ferromagnetisch materiaal na magnetiseren, een zeker remanent magnetisch veld  $B_r$ .

Merk op dat het aanleggen van de coërcitief veldsterkte  $H_c$  geen middel is tot ontmagnetiseren.

Ontmagnetiseren gebeurt door:

- verhitting tot boven de curietemperatuur, waarbij de spontane magnetisatie verdwijnt. Dit is echter niet altijd mogelijk.
- Het aanbrengen van een wisselveld met afnemende amplitude. Zowel de coërcitiefkracht  $H_c$  als de remanente inductie  $B_r$  zijn afhankelijk van de maximum waarde van de inductie. Door een wisselveld tot de waarde nul terug te regelen, verdwijnt de spontane magnetisatie. Zie Figuur 9-9.



Figuur 9-9 Demagnetisatie

## 9.10. De ijzerverliezen.

In ferromagnetische materialen onderhevig aan veranderlijke velden ontstaat warmte ten gevolge van hysteresisverliezen en wervelstroom verliezen (foucaultstromen – eddy currents).

### 9.10.1. Hysteresisverliezen.

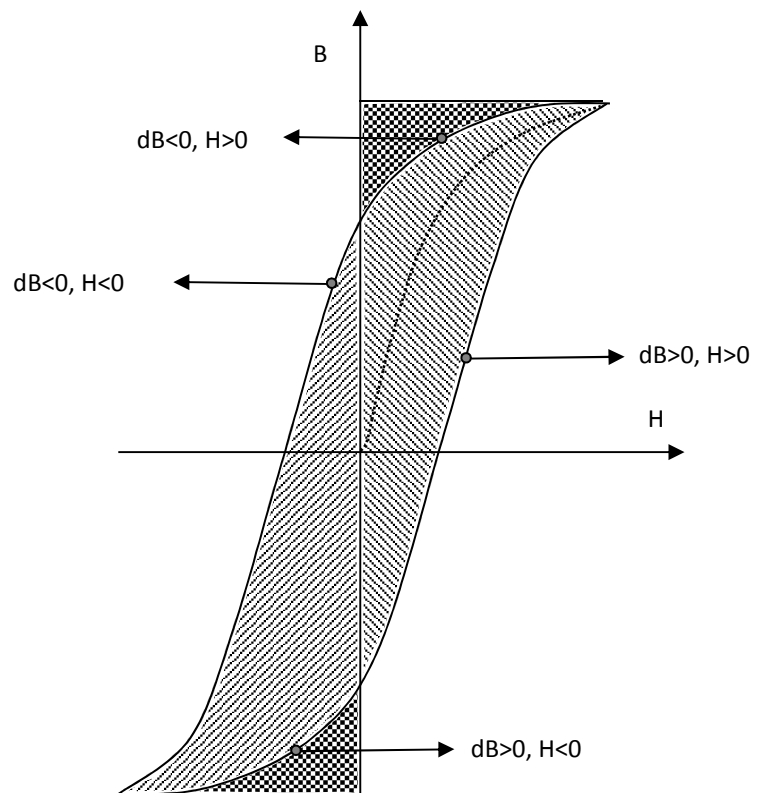
Het doorlopen van de hysteresislus vergt energie. Deze energie zet zich uiteindelijk om in warmte in het materiaal.

In paragraaf 8.3 werd afgeleid dat bij verandering van de magnetische inductie de energieverandering per volume-eenheid werd uitgedrukt als:

$$dW_m = H \cdot dB$$

Gaan we uit van het punt  $B_{max}, H_{max}$ .

Daalt de inductie van  $B_{max}$  naar  $B_{rem}$ , dan wordt  $dW_m$  negatief en zal een hoeveelheid energie terug geleverd worden gelijk:



Figuur 9-10 Hysteresisverliezen

$$W_m = \int_{B_{\max}}^{B_{\text{rem}}} H \cdot dB$$

Dit stemt overeen met het oppervlak tussen de curve en de B-as (dubbel gearceerd)

Daalt de inductie verder van  $B_{\text{rem}}$  naar  $-B_{\max}$ , dan is het product  $H \cdot dB$  positief en wordt een hoeveelheid energie geleverd, per volume-eenheid:

$$W_m = \int_{B_{\text{rem}}}^{-B_{\max}} H \cdot dB$$

Dit stemt overeen met het oppervlak tussen de curve en de inductie-as.

Stijgt opnieuw de inductie van  $-B_{\max}$  naar  $-B_{\text{rem}}$ , dan is  $dB$  positief, terwijl  $H$  negatief, zodat een hoeveelheid energie terugkeert gelijk:

$$W_m = \int_{-B_{\max}}^{-B_{\text{rem}}} H \cdot dB$$

Dit stemt overeen met het oppervlak tussen de curve en de inductie-as, dubbel gearceerd.

Tenslotte gaan we van  $-B_{\text{rem}}$  naar  $B_{\max}$ .

Opnieuw wordt een hoeveelheid energie geleverd aan het systeem, daar  $dB$  en  $H$  positief zijn:

$$W_m = \int_{-B_{\text{rem}}}^{B_{\max}} H \cdot dB$$

Resultierend wordt een hoeveelheid energie geleverd, per volume-eenheid gelijk aan het oppervlak van de hysteresislus.

In wisselstroommachines, transformatoren, elektromagnetische relais, etc zal de hysteresislus in elke periode van de spanning doorlopen worden. Daardoor is het hysteresisverlies ook evenredig met de frequentie. Daar de vorm van de hysteresislus zeer veranderlijk is met de stroom, is het onmogelijk een algemeen geldende formule voor het hysteresisverlies langs theoretische weg af te leiden. Steinmetz heeft echter proefondervindelijk een formule opgesteld, bekend als "de formule van Steinmetz":

$$P_H = \eta f V B_{\max}^{1,6}$$

Waarin:  $\eta$ : hysteresis-coëfficiënt, een materiaalconstante, afhankelijk van de natuur van de stof

$f$ : de frequentie (Hz)

$V$ : het volume ( $\text{m}^3$ )

$B_{\max}$ : maximum inductie (T)

Deze formule is geldig voor inductiewaarden tussen 0,15 en 1,2T. Daarbuiten verandert de exponent in meer of mindere mate.

De waarde van  $\eta$  gaat van 3000 voor ontladen gietijzer en 750 voor ontlaten gewoon plaatijzer, tot 115 voor de beste kwaliteiten siliciumstaal en 25 voor permalloy.

Om deze reden wordt in de constructie van elektrische machines siliciumstaal gebruikt.

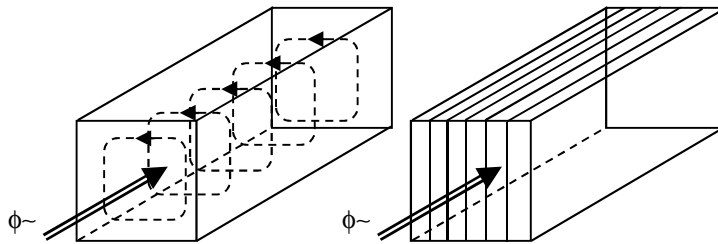
Permalloy is een Ni-Fe legering en wordt gebruikt in talrijke toepassingen van de telecommunicatie.

## 9.10.2. Wervelstroomverliezen.

Wordt een massief stuk metaal (geleidend materiaal zoals ijzer of koper) aan een veranderlijk magnetisch veld onderhevig gesteld, of beweegt het zich ten opzichte van een magnetisch veld, dan treden er in dat lichaam elektrische stromen op. Deze inductiestromen volgen niet altijd een nauw omschreven traject, zoals een stroomdraad. We noemen ze dan ook wervelstromen of foucaultstromen (eddy-current)

Dergelijke stromen gaan altijd hun oorzaak van ontstaan tegenwerken.

Nemen we het geval van een massief stuk metaal, waardoor een veranderlijk veld trekt.



Figuur 9-11 Wervelstroomverliezen

In vlakken loodrecht op de veldrichting ontstaan stromen die een magnetisch veld opwekken, tegengesteld aan het hoofdveld. Dergelijke stromen leiden tot opwarming van het materiaal. Is dit ongewenst, dan spreekt men van wervelstroomverliezen. Zij kunnen worden beperkt door het materiaal te lamelleren, in de richting van het veld. Het magnetisch veld gaat op zich hierdoor weinig invloed ervan ondervinden. Daarentegen geldt dat de plaatjes (dikte 0,35--0,5mm) geïsoleerd ten opzichte van elkaar zijn (meestal doordat ze voorzien zijn van een niet geleidende oxidelaag), wat belet dat de stromen vloeien (slechts over de geringe dikte is er nog enigszins mogelijkheid)

Men kan aantonen dat bij gelamelleerd materiaal het wervelstroomverlies per volume-eenheid gegeven wordt door de uitdrukking:

$$P_w = \frac{\pi^2}{6} \frac{B_{\max}^2 e^2 f^2}{\rho} \quad W/m^3$$

Hierin is:  $B_{\max}$  de maximum inductie (T)

e: dikte van de plaatjes (m)

f: frequentie (Hz)

$\rho$ : soortelijke weerstand  $\Omega m^{-1}$

In bepaalde omstandigheden kan de warmteontwikkeling wel nuttig zijn. We denken hierbij aan inductieve verwarming van kookpotten, alwaar in de bodem van de pot wervelstromen ontstaan door een meestal hoogfrequent magnetisch veld dat zich erdoor sluit.

Ander voorbeeld is een wervelstroom- of foucaultrem, gebruikt als belasting bij motortesten of als afremming in voertuigen (bussen, treinen, ...) Een metalen schijf, aangedreven door de testmotor draait tussen stilstaande elektromagneten. In de schijf ontstaan inductiespanningen, want de geleider verplaatst zich (en tegelijkertijd de elektronen in de geleider) Als gevolg van deze inductiespanningen ontstaan er stromen die naar omhoog gaan en zich sluiten door het gebied dat buiten het magnetisch veld zich bevindt. Het magnetisch veld oefent krachten uit op de geïnduceerde stromen die de draaibeweging van de schijf tegenwerken.

Wervelstromen kunnen ook een dempend effect hebben op trillingen van een oscillerend systeem. Een voorbeeld vinden we bij een galvanometer, waarin magnetische demping ervoor zorgt dat de naald niet te ver uitslaat of teveel gaat slingeren.

### 9.10.3. Het verliesgetal

Zowel de hysteresisverliezen als de wervelstroomverliezen treden gelijktijdig op. De som van beide verliezen noemt men de ijzerverliezen.

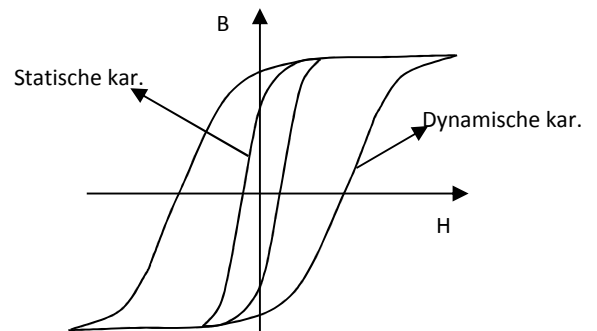
Een maat voor de ijzerverliezen is het zogenaamd verliesgetal. Dit is het aantal watt ijzerverlies per kg metaal, bij een fluxdichtheid van 1T, een netfrequentie van 50Hz en plaatdikte van 0,5mm.

Het verliesgetal of verliescijfer varieert afhankelijk van de samenstelling van het ijzer tussen 0,5 en 3,5W/kg.

### 9.11. Invloed van de frequentie op de hysteresislus.

Bij vele materialen wordt de vorm van de lus door de snelheid waarmee de cyclus wordt doorlopen beïnvloed. Bij hogere frequenties wordt de lus breder en daarmee de verliezen groter.

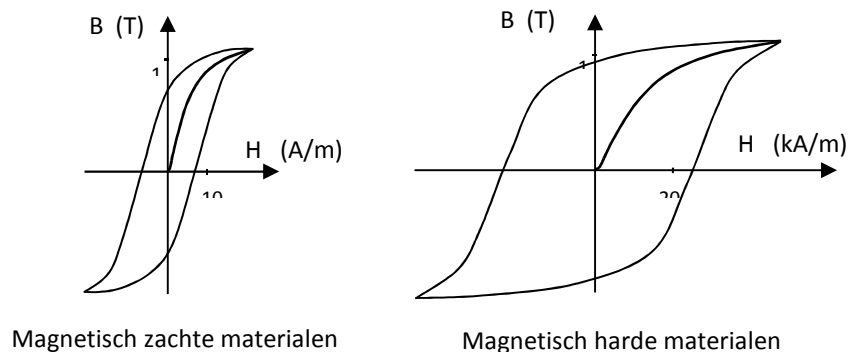
In die zin praat men van statische en dynamische hysteresislus, naargelang deze zeer traag wordt doorlopen of eerder met hoge snelheid (hoge frequentie).



Figuur 9-12 Invloed frequentie op hysteresis

### 9.12. Magnetisch harde en zachte materialen.

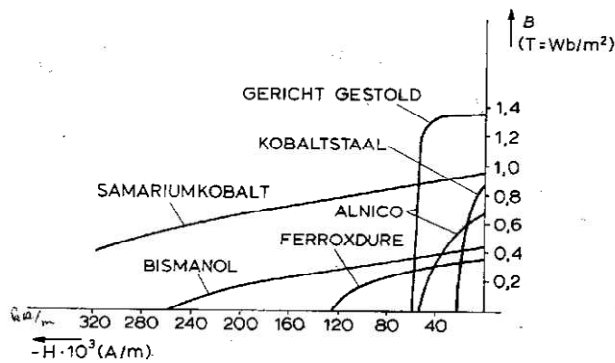
Magnetisch zachte materialen zijn materialen die zich relatief gemakkelijk laten magnetiseren. Zij worden dan ook gekenmerkt door een relatieve smalle hysteresislus, waarbij de waarde van de coërcitiefkracht relatief klein is, kleiner dan 800 A/m. Daar zij meestal onderhevig zijn aan een variabel magnetisch veld, leidt een smalle hysteresislus ook tot kleine hysteresisverliezen. Voorbeelden zijn weekijzer en dynamoblik bestaande uit ijzer en enkele procenten silicium. Zij worden gebruikt als elektroblik voor motoren, transformatoren, kernen van relais, etc. Van deze materialen krijgt men meestal enkel de commutatiecurve opgegeven. De waarde van de remanente inductie en de hysteresisverliezen krijgt men eerder in tabelvorm.



Figuur 9-13 B-H curve bij zachte en harde materialen

De voornaamste globale gegevens van enkele permanent magnetische materialen

Magneet materiaal	Samenstelling in gewichtspercentage	$(B_r H_y)_{\max}$ joule/m <sup>3</sup>	$B_r$ W/m <sup>2</sup>	$H_c$ A/m
koolstofstaal	98,5% Fe 1% C 0,5% Mn	2000	0,9	4000
kobaltstaal	58,1% Fe 31% Co 1% C 4,8% W 4,7% Cr 0,4% Mo	7200	0,85	20 000
ferroxdure	14% BaO 86% Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	30000	0,35-0,40	120 000
alnico	46,5% Fe 9% Al 15,5% Ni 24% Co 4% Cu 1% Ti	30200	1,05	43 800
ticonal G	51% Fe 24% Co 14% Ni 8% Al 3% Cu	40000	1,2	50 000



Nieuwe materialen met een grote coërcitief kracht zijn: bismanol MnBi, samariumkobalt SmCo 5

Figuur 9-14 Gegevens van permanente magnetische materialen

Materialen met een grote coërcitiefkracht, groter dan 10kA/m, en dan ook een brede hysteresislus noemt men magnetisch harde materialen. Zij laten zich moeilijk magnetiseren. Eén maal gemagnetiseerd houden ze een relatief sterk permanent magnetisme over. Ze laten zich niet gemakkelijk ontmagnetiseren. Zij worden dan ook gebruikt voor het vervaardigen van permanente magneten.

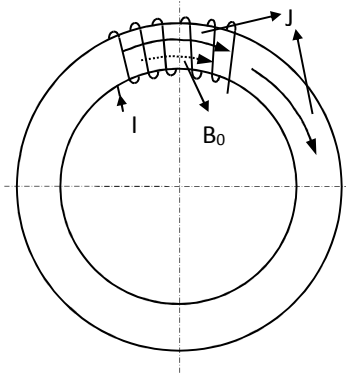
Van dergelijke materialen geldt dat men niet de volledige hysteresislus opgeeft, doch enkel het tweede kwadrant. Bij het dimensioneren van permanente magneten heeft men ook slechts dit kwadrant nodig!

## 10. De magnetische kring.

### 10.1. Inleiding: beperkte bedekking van de kern

Tot op heden hebben we weinig aandacht geschonken op de kern waarop een spoel kan worden aangebracht. Meestal gingen we ervan uit dat de spoel evenwichtig over de kern werd aangebracht.

Praktisch echter geldt dat de spoel slechts een beperkt deel van de ferromagnetische kern bedekt. Vraag stelt zich wat de flux en inductie is in de kern ter hoogte van de spoel en daarbuiten.



Figuur 10-1 Beperkte bedekking van de kern

Ter hoogte van de spoel zullen we het gekend fenomeen hebben van het kernmateriaal dat gemagnetiseerd wordt. De magnetische dipolen gaan zich richten. Een sterk inwendig veld of magnetische polarisatie  $J$  treedt op. Het totaal veld wordt:

$$B_{\text{spoel}} = B_0 + J$$

Hierbij werd afgeleid dat:

$$J = \mu_0 M = \mu_0 \chi H = \chi B_0$$

$$\chi = \mu_r - 1$$

Doordat bij ferromagnetische materialen het inwendig veld zeer sterk is, geldt dat  $\chi$  ook vrij hoog is!

De magnetisatie van het ferromagnetisch materiaal ter hoogte van de spoel is zo sterk dat ook dipolen buiten de spoel gepolariseerd worden. "Het magnetisch veld schrijdt vooruit en sluit zich door de kern". Buiten de spoel noteren we enkel het magnetisch veld tengevolge van de polarisatie of:

$$B_{\text{kern}} = J$$

Meestal kunnen we in de uitdrukking van de inductie ter hoogte van de spoel de inductie  $B_0$  verwaarlozen ten opzichte van de polarisatie  $J$ . Hieruit volgt dat

$$B_{\text{spoel}} = B_{\text{kern}}$$

of binnen de kern geldt dat de inductie overal gelijk is. De totale flux is dan ook overal gelijk

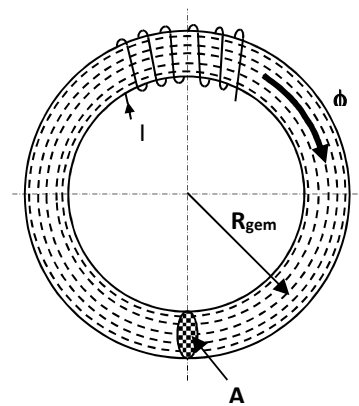


De wet van Ampère liet vroeger toe het verband tussen de inductie, veldsterkte respectievelijk het aantal ampèrewindingen af te leiden. (afleiding van de inductie in een solenoïde) Wensen we opnieuw de wet van Ampère toe te passen teneinde de veldsterkte en daaruit de totale inductie  $B$ , waarin rekening wordt gehouden met het inwendig veld, dan dienen we wel erop te letten dat de kringintegraal genomen wordt via de volledige kern (vroeger volstond het de stroomvoerende geleiders op een willekeurige manier te omsluiten).

## 10.2. De wet van Hopkinson – begrip reluctantie

Beschouwen we een ring uit ferromagnetisch materiaal met overal een constante doorsnede  $A$ . Rondom een deel van de kern wordt een spoel  $N$  windingen aangebracht, waardoor een stroom  $I$  vloeit. Hierdoor ontstaat een magnetisch veld.

We wensen het verband af te leiden tussen de flux  $\phi$  en de stroom  $I$ .



Figuur 10-2 Beperkte bedekking van een kern met cte diameter

Passen we de wet van Ampère toe langs een cirkel met gemiddelde diameter:

$$H = \frac{NI}{l}$$

$$l = 2\pi R_{gem}$$

De inductie in de kern wordt:

$$B = \mu H = \mu \frac{NI}{l}$$

En de flux:

$$\Phi = BA = \mu \frac{NI}{l} A$$

Deze uitdrukking herschrijven we onder de vorm:

$$\Phi = \mu \frac{NI}{l} A = \frac{NI}{\frac{l}{\mu A}} = \frac{M}{\mathfrak{R}}$$

Deze uitdrukking staat bekend als de **wet van Hopkinson**.

Hierin vormt:

- **M**: de magnetomotorische kracht, het aantal ampèrewindingen, wat werkt als de magnetische bron
- **$\mathfrak{R}$** : de reluctantie of magnetische weerstand van de kern.

De uitdrukking vertoont sterk gelijkenis met de wet van Ohm toegepast op een geleider:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{E}{\frac{l}{\gamma A}}$$

Bemerk de gelijkenis van de uitdrukking van de reluctantie met dit van de weerstand van een geleider. Hierbij is de soortelijke geleidbaarheidscoëfficiënt  $\gamma = 1/\rho$  in overeenstemming te brengen met de permeabiliteit  $\mu$ .

De flux  $\Phi$  (stroom magnetische veldlijnen) stemt overeen met de elektrische stroom  $I$

De magnetomotorische kracht  $M$  (bron magnetische veldlijnen) stemt overeen met de emk  $E$  van een bron.

De reluctantie  $\mathfrak{R}$  stemt overeen met de weerstand  $R$ .

### 10.3. Wet van Hopkinson in een heterogene kring.

Beschouwen we een magnetische kring opgebouwd uit verschillende delen. Elk deel is vervaardigd uit een specifiek ferromagnetisch materiaal, tenzij de luchtspleet, en bezit een bepaalde doorsnede (elk deel wordt als homogeen verondersteld, de permeabiliteit, doorsnede en gemiddelde lengte is gegeven)

Door de spoel wordt een magnetisch veld opgewekt. De flux  $\Phi$  sluit zich door de kern (we verwaarlozen lekvelen). Daar de veldlijnen gesloten lijnen zijn, geldt dat we overal dezelfde flux noteren.

Daar de verschillende onderdelen een verschillende doorsnede hebben, zal de inductie van deel tot deel verschillend zijn. De veldsterkte zal dan ook afhankelijk zijn van deel tot deel.

Passen we de wet van Ampère toe langs de kern, dan bekomen we:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 l_0 = NI$$

Hierin kunnen we elk product  $H_i l_i$  vervangen door:

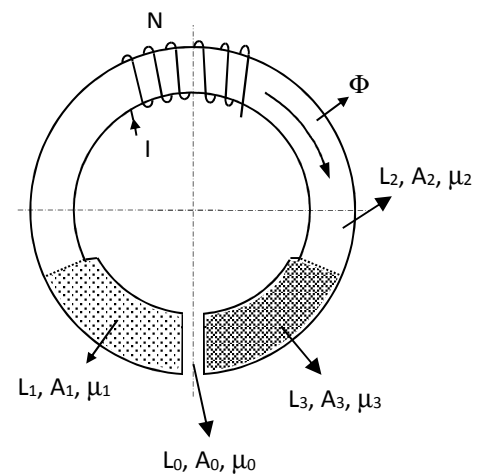
$$H_i l_i = \frac{B_i}{\mu_i} l_i = \frac{\Phi}{A_i} \frac{l_i}{\mu_i}$$

Aldus wordt vorige vergelijking:

$$\Phi \frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \Phi \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \Phi \frac{l_3}{\mu_3 A_3} + \Phi \frac{l_0}{\mu_0 A_0} = NI$$

Of wordt de flux  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{l_3}{\mu_3 A_3} + \frac{l_0}{\mu_0 A_0}} = \frac{M}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_0}$$



Figuur 10-3 Beperkte bedekking bij heterogene kring

Dit vormt de wet van Hopkinson voor heterogene kringen:

*“De flux  $\Phi$  is te noteren als de magnetomotorische kracht gedeeld door de som van de magnetische weerstanden van de kring”*

Bezit de magnetische kring meerdere spoelen, dan geldt dat de magnetomotorische kracht  $M$  de algebraïsche som wordt van de ampèrewindingen van elke spoel:

$$M = \sum N_i I_i$$

Het teken hangt af van de richting waarin het veld van de deelspoel afzonderlijk werkt.

Bemerk de gelijkenis met een elektrische kring. In een kring met één of meerdere bronnen en één of meerdere weerstanden in serie geldt:

$$I = \frac{\sum E_i}{\sum R_i} = \frac{E_{tot}}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots}$$

De flux  $\Phi$  (“stroom veldlijnen”) stemt overeen met de elektrische stroom  $I$

De magnetomotorische kracht  $M_{tot}$  stemt overeen met de totale  $Emk$  in de kring;

De totale reluctantie  $\mathfrak{R}$  stemt overeen met de totale serieweerstand.

Over elke weerstand  $R$  ontstaat een elektrische spanningsval  $U_R = I R$

In analogie kunnen we het product

$$\Phi \mathfrak{R} = M_{\mathfrak{R}}$$

de magnetische spanningsval noemen.

Hierbij is eveneens:

$$\Phi \mathfrak{R} = H_i l_i$$

te noteren.

De wet van Ampère in een magnetische kring luidt dan ook:

**“In een gesloten kring geldt dat de som van de magnetische spanningsvallen gelijk is aan de totale magnetomotorische kracht”:**

#### Opmerkingen:

- Kringen waarin een luchtspleet aanwezig is, geldt dat deze laatste meestal zorgt voor de grootste bijdrage tot de totale weerstand. Immers, de ferromagnetische onderdelen bezitten een reluctantie:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}$$

Hierin is in de noemer de factor  $\mu_r$  vrij groot, waardoor de reluctantie klein wordt.

- Niet altijd is de luchtspleet zoals in dit voorbeeld (twee gelijke evenwijdige eindvlakken). Bij andere vormen bestaan er formules om de reluctantie te berekenen.

**- Verloop van de flux in functie van toenemende stroom:**

Op een magnetische kring met luchtspleet wordt een spoel aangebracht. De stroom in de spoel laat men geleidelijk toenemen. Hierdoor zal de flux ook stijgen.

Steunende op de wet van Hopkinson zal deze flux aanvankelijk lineair toenemen:

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_o}{\mu_0 A_0}} = \frac{M}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_0}$$

Bemerkt dat hierin de reluctantie  $\mathfrak{R}_1$  van het ferromagnetisch deel veel kleiner is dan dit van de lucht, niettegenstaande de grotere lengte  $l_1$ . Dit komt door de hoge permeabiliteit  $\mu_{r1}$ :

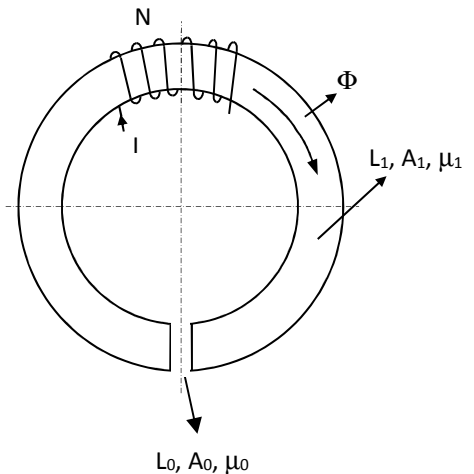
$$\mathfrak{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 A_1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_{r1} A_1}$$

De flux  $\Phi$  kan vereenvoudigd genoteerd worden als:

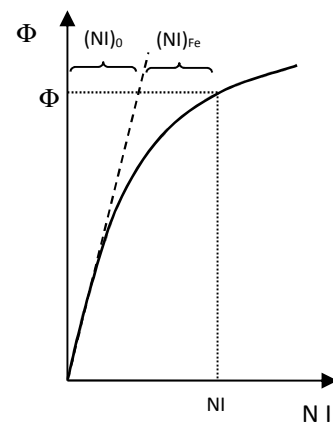
$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l_o}{\mu_0 A_0}} = \frac{M}{\mathfrak{R}_0}$$

Bij groter wordende fluxwaarden en daarmee ook de inductie komen we echter in het verzadigingsgebied van het materiaal. Dit betekent dat de relatieve permeabiliteit snel daalt, wat een verhoging van de reluctantie  $\mathfrak{R}_1$  met zich meebrengt. Het gevolg is dat de flux minder dan lineair met de stroom stijgt, dit door de niet meer verwaarloosbare reluctantie  $\mathfrak{R}_1$  en dus toenemende noemer. De karakteristiek buigt af en vertoont hiermee eveneens een verzadigingskenmerk.

We kunnen stellen dat de totale magnetomotorische kracht te noteren valt als de som van de magnetische spanningsvallen over het ferromagnetisch gedeelte en de luchtspleet. Of nog het aantal ampèrewindingen  $NI$  is te splitsen in deels deze noodzakelijk om het veld te laten sluiten door de luchtspleet, deels om het veld te leiden door de ferromagnetische kern.



Figuur 10-4 Magnetische kring met luchtspleet



Figuur 10-5 Flux bij magnetische kring met luchtspleet

## 10.4. Zelfinductantie van een spoel op een ferromagnetische kern.

In paragraaf 7.3 werd de zelfinductiespanning gedefinieerd. Daarbij werd de inductantie L van een spoel vastgelegd als:

$$L = \frac{N \phi}{i}$$

In de uitdrukking van de flux:

$$\phi = \frac{N i}{\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_o}{\mu_0 A_0} + \dots} = \frac{M}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_0 + \dots}$$

zijn de flux  $\phi$  en de stroom  $i$  veranderlijke grootheden.

Daarmee wordt de uitdrukking van de zelfinductiecoëfficiënt of inductantie L van de spoel:

$$L = \frac{N \phi}{i} = \frac{N^2}{\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_o}{\mu_0 A_0} + \dots} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_0 + \dots}$$

Ingeval van een uniforme ferromagnetische kern wordt de inductantie L:

$$L = \frac{N \phi}{i} = \frac{N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu_0 \mu_r A_{Fe}}} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_{Fe}}$$

Daar de permeabiliteit  $\mu_{r Fe}$  in principe niet constant is, wat kan afgeleid worden uit de B/H karakteristiek, hebben we ook een niet constante inductantie L! We zijn verplicht met een gemiddelde waarde te rekenen, uitgaande van een gemiddelde waarde van de permeabiliteit.

Nemen we het geval van een eenvoudige ringkern met luchtspleet, dan wordt de inductantie:

$$L = \frac{N \phi}{i} = \frac{N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu_0 \mu_{r Fe} A_{Fe}} + \frac{l_o}{\mu_0 A_0}} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_{Fe} + \mathfrak{R}_0}$$

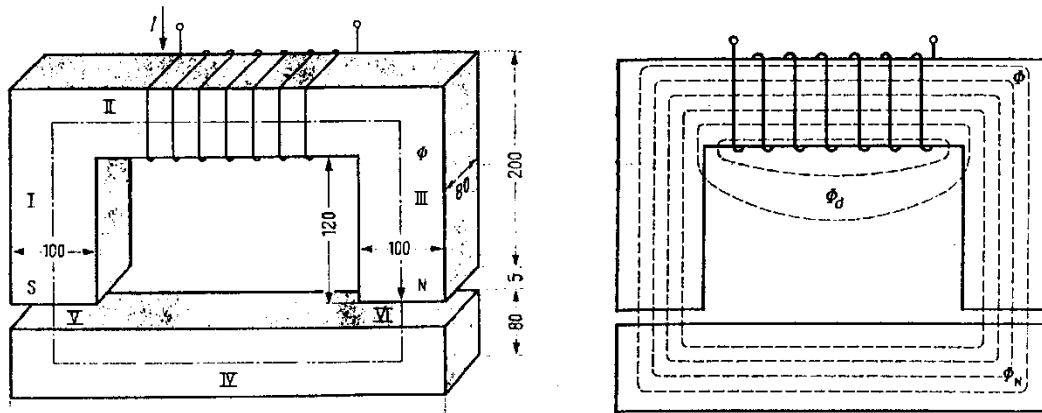
Indien we kunnen aannemen dat de stroom ogenblikkelijk niet te groot wordt, dan blijven we uit het verzadigingsgebied van het materiaal en kunnen we de magnetische weerstand of reluctantie  $\mathfrak{R}_{Fe}$  verwaarlozen. Dan geldt dat de noemer enkel bepaald wordt door de constante reluctantie  $\mathfrak{R}_0$  van de luchtspleet waaruit volgt dat de inductantie L eveneens constant blijft. Wenst men een relatief grote en constante inductantie, in vergelijking met deze van een luchtspoel, dan biedt een spoel op een kern met luchtspleet een oplossing.

## 10.5. Het berekenen van een eenvoudige magnetische kring.

In de meeste gevallen zijn de geometrische afmetingen en de gebruikte materialen van de magnetische keten bekend. Op een bepaalde plaats wordt een zekere inductie B gewenst, waarvoor de totale magnetomotorische kracht  $M=NI$  moet berekend worden. We sluiten lekveld uit. (geen spreidingsflux)

In bijgaand vraagstuk wenst men in de luchtspleet een inductie van 1T.

De totale magnetomotorische kracht wordt bepaald uit de som van alle magnetische spanningsvallen  $H_i l_i$  over elke afzonderlijke magnetische weerstand. Het meest doelmatig wordt de berekening in tabelvorm uitgevoerd.



Figuur 10-6 Afmetingen van de gebruikte materialen

Tabel 10-1 Gegevens van de gebruikte materialen

strook	materiaal	magnetische flux	Dwarsdoorsnede	inductie B	veldsterkte H	gemiddelde lengte	magnetisch potentiaalverschil	magnetische weerstand.
		$\Phi$	A	B	H	L	$M_i$	$\mathcal{R}$
		Wb	$m^2$	T	A/m	m	A	A/Wb
I	dynamoblik	0,008	0,0080	1	300	0,16	48	6.000
II	dynamoblik	0,008	0,0064	1,25	600	0,20	120	15.000
III	dynamoblik	0,008	0,0080	1	300	0,16	48	6.000
IV	gietijzer	0,008	0,0064	1,25	24.000	0,28	6.720	840.000
V	lucht	0,008	0,0080	1	793.000	0,01	3.980	496.000
VI	lucht	0,008	0,0080	1	793.000	0,01	3.980	496.000

$$M_{\text{tot}} = 14.896 \text{ Aw}$$

We merken op dat de delen uit dynamoblik slechts weinig invloed hebben op de totale magnetomotorische kracht.

Vooraf de niet ferromagnetische onderdelen, het gietijzeren anker en de twee luchtspleten bepalen in hoofdzaak het totaal te voorzien ampèrewindingen.

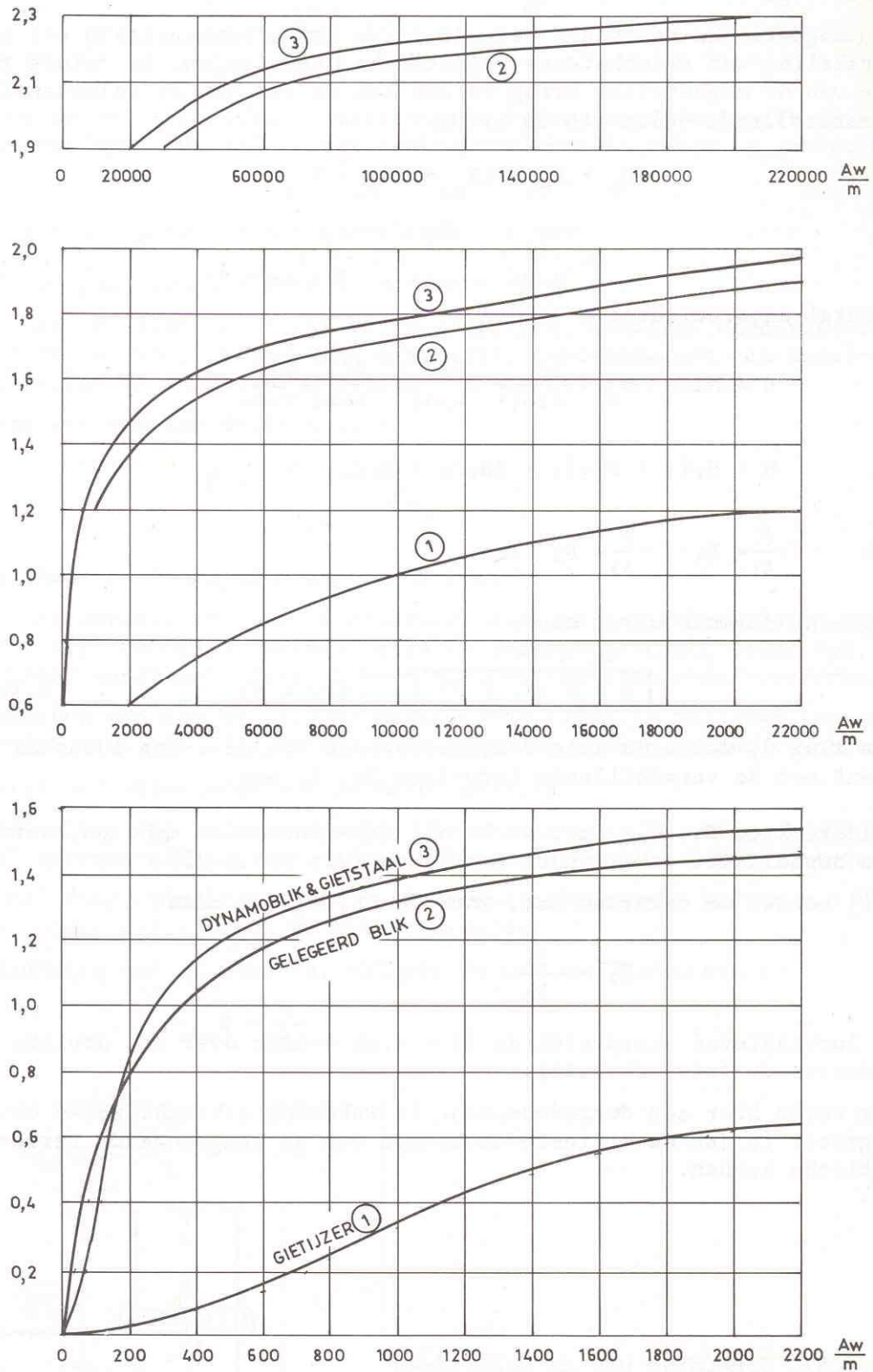
Als aanvulling werd in de tabel eveneens de reluctantie van elk onderdeel aangegeven. Ook daaruit moet blijken dat vooral de twee luchtspleten en het gietijzer de grootste magnetische weerstand bezitten.

Spreiding van de magnetische flux.

In het voorgaand voorbeeld werd aangenomen dat de totale flux door de ijzeren kern gaat. Dit is echter niet altijd het geval. We dienen rekening te houden met een zekere hoeveelheid lekflux. De strooicoëfficiënt wordt meestal experimenteel bepaald en aangegeven in een aantal procenten.

In de berekening zal men veiligheidshalve aannemen dat de lekflux geconcentreerd is bij het begin van de luchtspleet. Indien in het voorbeeld een spreiding van 25% wordt aangenomen, dan moet de flux in de delen I, II en III overeenkomstig tot 0,01 Wb worden verhoogd.

De rest van de berekening verloopt analoog.



Figuur 10-7 Gegevens van verschillende materialen

## 10.6. Magnetische trekspanning.

Het is algemeen bekend dat een stuk metaal in een magnetisch veld geplaatst, door dat magnetisch veld een kracht zal ondervinden. Deze kracht is het resultaat van de magnetische trekspanning uitgeoefend op het oppervlak van het materiaal.

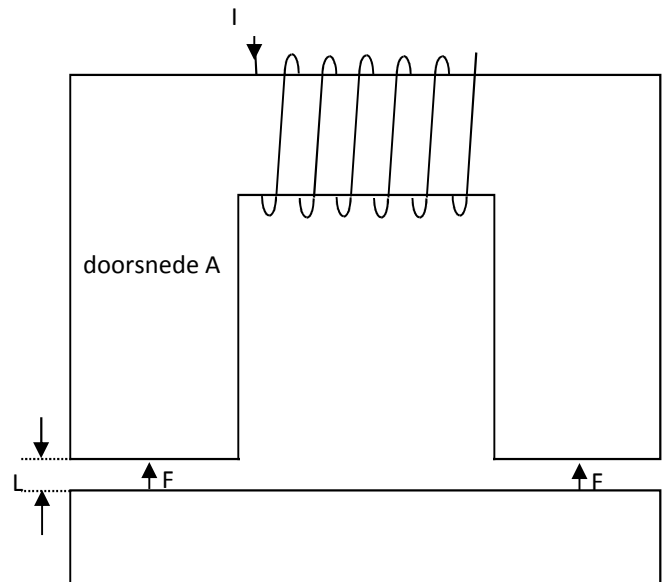
In deze paragraaf wensen we de uitdrukking van de magnetische trekspanning af te leiden. Hiervoor gaan we uit van een U-vormige kern voorzien van een spoel en daartegenover een verplaatsbaar anker

Vloeit door de spoel een stroom  $I$ , dan ontstaat een magnetisch veld.

De totale magnetische energie is dit van de energie binnen het ferromagnetisch materiaal en anderzijds van dit in de twee luchtspleten.

Bij verwaarlozing van de reluctantie van het ijzer of relatieve permeabiliteit oneindig geldt dat de totale magnetische energie neerkomt op de energie in de twee luchtspleten of:

$$W_m = \frac{1}{2} B H V = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} (2AL)$$



Figuur 10-8 U-vormige kern met spoel en beweegbaar anker

Stel dat met een uitwendige kracht  $F_u$  het anker over een kleine afstand  $dL$  verplaatst wordt, dan wordt een hoeveelheid energie toegevoerd gelijk de uitgeoefende arbeid:

$$dW = F_u dL = 2 F dL$$

Deze energie leidt tot een toename in de magnetische energie van het systeem:

$$dW_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot dV = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} (2A \cdot dL)$$

Bij gelijkstelling van deze twee uitdrukkingen leiden we af:

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} A$$

Drukken we de kracht uit per oppervlakte-eenheid, dan bekommen we de magnetische trekspanning:

$$\sigma_m = \frac{F}{A} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

**Opmerking:**



Deze formule geldt enkel bij constante inductie . Bij gelijkstroomvoeding is de inductie echter afhankelijk van de luchtspleetbreedte L, waardoor de draagkracht F daalt als L toeneemt. Immers de stroom I blijft constant, onafhankelijk van de luchtspleetbreedte L. Uit de uitdrukking van de flux:

$$\Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}} = \frac{NI}{2 \frac{L}{\mu_0 A}}$$

Volgt dat de flux en daarmee ook de inductie  $B = \Phi/A$  zal dalen.

Bij wisselstroomvoeding varieert de stroom sinusoïdaal. Bij verwaarlozing van de weerstand van de spoel, kunnen we stellen dat de aangelegde spanning u en de inductiespanning e gelijk zijn:

$$u = -e = L \frac{di}{dt}$$

Met u:

$$u = \sqrt{2} U \sin \omega t$$

Volgt dat

$$i = \sqrt{2} \frac{U}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Verder geldt dat de inductiviteit L van de spoel gelijk is aan:

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

Bij toenemende luchtspleet neemt eveneens de reluctantie  $\mathfrak{R}$  toe, waardoor de inductiviteit daalt en de stroomamplitude toeneemt. In de uitdrukking van de flux:

$$\phi = \frac{Ni}{\mathfrak{R}} = \frac{N \sqrt{2} I}{\mathfrak{R}} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

neemt de teller en noemer toe, waardoor de amplitude van de flux gelijk blijft.

Het spreekt voor zich dat deze uitdrukking geldig is voor aanvaardbare verplaatsingen van het anker.

De magnetische trekspanning varieert kwadratisch met de inductie.

Daar deze als de flux sinusoïdaal verloopt met een amplitude die onafhankelijk blijft van de luchtspleetbreedte, ontstaat een constante gemiddelde trekkracht.

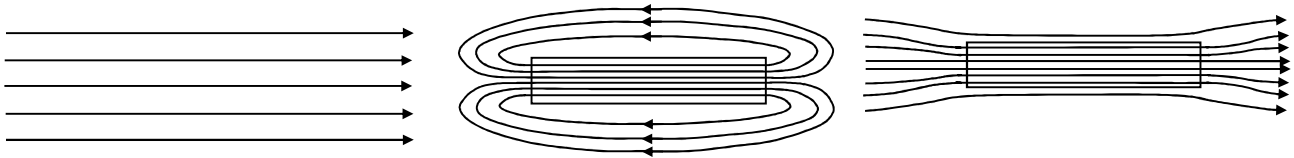
Daar de ogenblikkelijke trekspanning varieert met een frequentie het dubbel van de netfrequentie, ontstaat een trillende kracht op 100Hz, wat een typische bromtoon veroorzaakt.

## 10.7. Veldvervorming door inbreng van een ferromagnetisch materiaal.

Brengt men in een uniform magnetisch veld een stuk zacht magnetisch materiaal (week-ijzer) dan verandert het veldbeeld.

Door het magnetisch veld worden de magnetische dipolen in het ijzer gedeeltelijk gericht waardoor het stuk ijzer als een magneet gaat werken. Dit veld stelt zich samen op het oorspronkelijk veld, waardoor een veldbeeld bekomen wordt als weergegeven in bijgaande figuur. Het week-ijzer zuigt als het ware het uitwendig magnetisch veld op, of nog, het magnetisch veld bezit de *neiging het pad met lage reluctantie* te volgen.

Bij vergelijking van de inductie aan de eindvlakken van het stukje weekijzer stellen we een verschil vast. Hierdoor is de magnetische spanning verschillend. Een resulterende kracht ontstaat dat het stukje weekijzer doet verplaatsen tegengesteld aan de veldrichting.



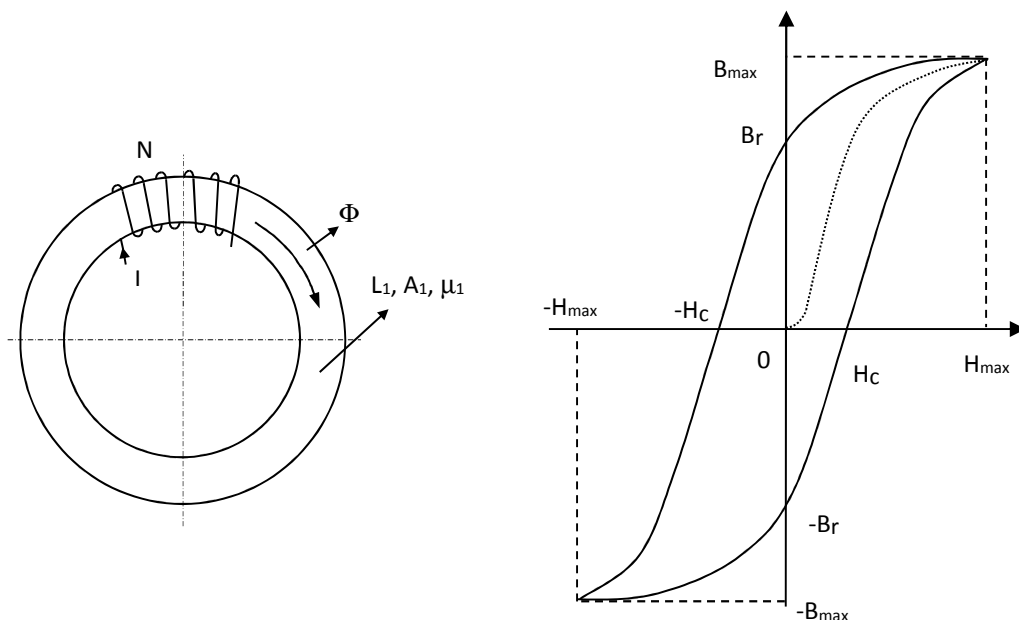
Figuur 10-9 Veldvorming door inbrenging van ferromagnetisch materiaal

## 10.8. De remanentie in en magnetisch circuit met luchtspleet.

### 10.8.1. Magnetische kring zonder luchtspleet.

Gaan we uit van een gesloten ijzeren ring uit ferromagnetisch materiaal. De stroom  $I$  in de spoel drijft men aanvankelijk op om daarna terug nul te maken.

Bij stroom nul zal door het gekend hysteresiseffect de inductie in de kern gelijk de remanente inductie  $B_R$  worden. De veldsterkte is hierbij nul.



Figuur 10-10 Magnetische kring zonder luchtspleet



## 10.8.2. Magnetische kring met luchtspleet.

Ook in dit geval zal bij uitschakelen van de stroom een zekere inductie blijven bestaan. Deze is echter niet meer gelijk aan de remanente inductie  $B_r$  dit door de aanwezigheid van de luchtspleet. Wel moet worden gesteld dat de inductie  $B_y$  van het ijzer moet voldoen aan de hysteresislus.

Volgens de wet van Ampère toegepast langs de magnetische kring geldt:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_y l_y + H_0 l_0 = 0$$

“De magnetische spanning over het ferromagnetisch materiaal is gelijk, doch tegengesteld aan de magnetische spanning over de luchtspleet.”

Uit de gelijkheid van de flux:

$$\Phi_y = \Phi_0$$

volgt:

$$A_y B_y = A_0 B_0 = A_0 \mu_0 H_0$$

Hieruit leiden we de veldsterkte  $H_0$  af en brengen dit in de vergelijking van de magnetische spanning:

$$H_y l_y + H_0 l_0 = H_y l_y + \frac{A_y B_y}{A_0 \mu_0} l_0 = 0$$

of:

$$B_y = -\frac{A_0 l_y}{A_y l_0} \mu_0 H_y$$

Deze vergelijking legt een rechte vast door de oorsprong in het tweede kwadrant van de BH karakteristiek. Het snijpunt van deze rechte met de hysteresislus geeft de waarde aan van  $B_y$  en  $H_y$ . Daarmee kan dan ook de waarde van  $H_0$  en  $B_0$  bepaald worden.

Bij gebruikelijke afmetingen van een magnetisch circuit kunnen we noteren dat de coëfficiënt:

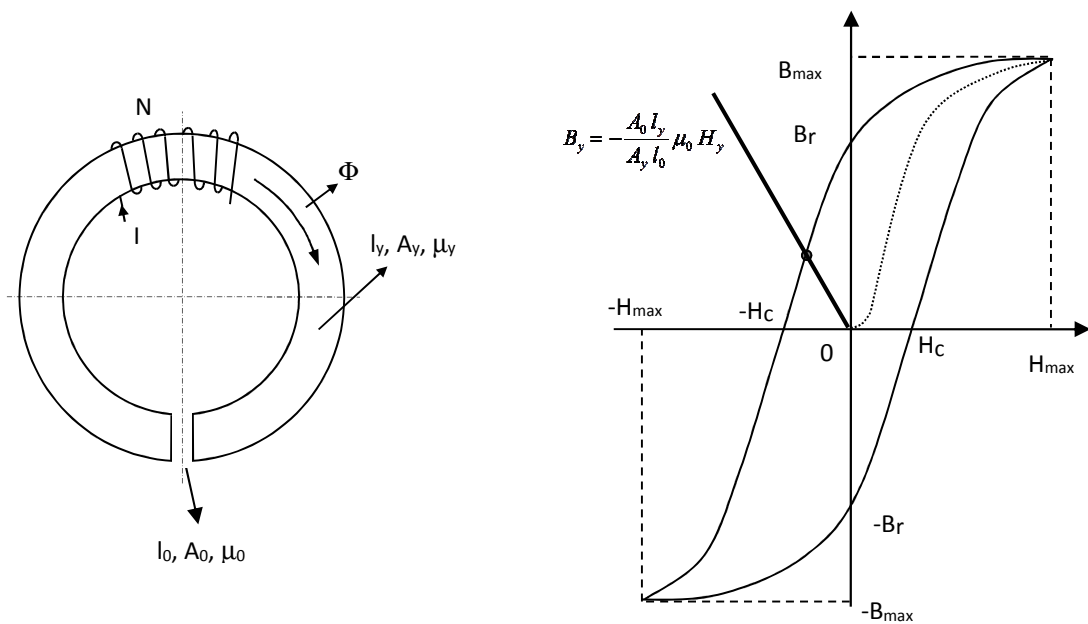
$$\frac{A_0 l_y}{A_y l_0} \approx 10^2$$

Dan geldt voor  $B_y$ :

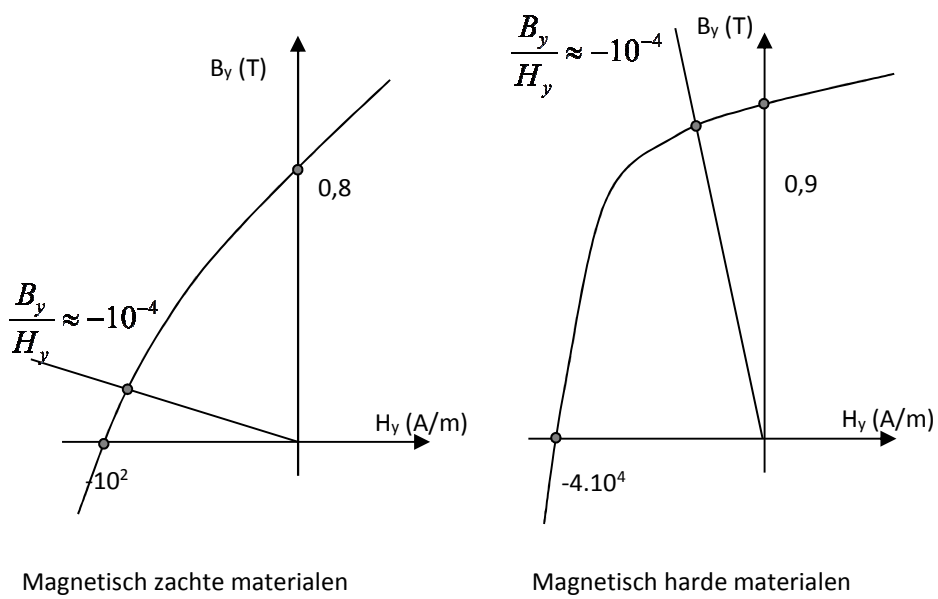
$$B_y \approx -10^{-4} H_y$$

Bij magnetisch zacht materiaal blijven er tengevolge van de luchtspleet slechts weinig remanente inductie  $B_y$  over! De waarde van de inductie wordt in hoofdzaak bepaald door de coërcitieve veldsterkte  $H_c$ .

Bij magnetisch harde materialen daarentegen waar  $H_c$  veel groter is, valt het snijpunt bij veel grotere inductiewaarden (let op de schaalwaarden). De waarde van de inductie wordt hier in hoofdzaak bepaald door de remanente inductie  $B_r$  van het materiaal.



Figuur 10-11 Magnetische kring met luchtspleet



Magnetisch zachte materialen

Magnetisch harde materialen

Figuur 10-1 Verschil magnetische zachte en harde materialen

# Bibliografie

---

- Belmans R. en Geysen W., Algemene elektrotechniek, Leuven, Garant.
- Parker S. en Kolmer K., Elektriciteit en magnetisme, Leidschendam, Biblion 2004.
- Freedman R. en Douglas G., Natuurkunde voor wetenschap & techniek, Den Haag, Academic Service 2005.
- Hammond P., Electromagnetism for Engineers, an introductory course, Pergamon Press, 1993.