Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2010

1. bzw. 2. Juli 2010

73) Was sind die *Euler-Winkel* einer Drehung in einem dreidimensionalen orientierten euklidischen Raum?
Berechnen Sie die Euler-Winkel bezüglich der Standardbasis für die Drehung um $\frac{\pi}{4}$ um die Gerade $\mathbb{R}(1,1,1)$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Dabei sei $\mathbb{R}^3$ durch die Standardbasis und die Drehachse durch $(1,1,1)$ orientiert.

74) Was ist eine *Symmetrieoperation*, was ist die *Symmetriegruppe* einer Teilmenge eines euklidischen Raums? Berechnen Sie die Symmetriegruppen von

$$\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$\{(1,1),(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$\{(1,0,0),(-1,0,0),(0,-1,0),(0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

75) Was ist die zu einer linearen Funktion *adjungierte* lineare Funktion? Was ist eine *selbstadjungierte* lineare Funktion? Was besagt der *Spektralsatz für selbstadjungierte Funktionen*? Berechnen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} T$$

eine Diagonalmatrix ist.

76) Was ist eine *normale* lineare Funktion? Was besagt der *Spektralsatz für normale Funktionen*? Zeigen Sie, dass die lineare Funktion

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \ (a,b) \longmapsto (12a - 5ib, 5ia + 12b)$$

normal ist (das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ sei das Standardskalarprodukt). Berechnen Sie eine ON-Basis aus Eigenvektoren dieser Funktion.

77) Was ist eine *orthogonale* Funktion? Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Funktion.
Zeigen Sie: Die lineare Funktion f ist genau dann normal, wenn f selbstadjungiert oder ein skalares Vielfaches einer orthogonalen Funktion ist.
Zeigen Sie: Wenn f orthogonal ist, dann ist f genau dann selbstadjungiert, wenn f eine Spiegelung oder Id_V oder $-Id_V$ ist.

78) Berechnen Sie Basen der verallgemeinerten Eigenräume von

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c,d) & \longmapsto & (a+b+2c+2d, b+c+2d, 3c+2d, 3d) \end{array} .$$

E N D E